NGUYỄN QUỐC HOÀN

0913 661 886

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

(Quyển 3)

(Năm học 2019 – 2020)

Hà Nội, 6 – 2019

LỜI NÓI ĐẦU

Nguyên hàm, Tích phân và Ứng dụng hình học của nó là chủ đề xuất hiện rất nhiều trong các bài thi THPT QG, và có đủ các cấp độ từ nhận biết đến vận dụng cao. Do đó tôi đã cố gắng chắt lọc những bài toán hay vào cuốn sách này. Hi vọng đây là tài liệu tham khảo giúp các em học sinh học tốt hơn phần này và yêu thích môn toán hơn.

Quyển 3 Giải tích tập trung chủ yếu kiến thức chương 3 môn Toán Giải Tích lớp 12 và hoàn toàn phù hợp chương trình lớp 12 hiện hành. Tuy nhiên thiếu sót khó tránh khỏi, rất mong nhận được góp ý tích cực của mọi người để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Trân trọng cảm ơn !

Hà Nội, 6 / 2019

Nguyễn Quốc Hoàn

MỤC LỤC

NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F\left(x\right)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K nếu $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ với mọi $x\in K$.

Định lí:

1) Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K.

2) Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K đều có dạng $F\left(x\right)+C$, với C là một hằng số.

Do đó $F\left(x\right)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K. Ký hiệu $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f\left(x\right)dx\right)'=f\left(x\right)$ và $\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)+C$

Tính chất 2: $\int kf\left(x\right)dx=k\int f\left(x\right)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]dx=\int f\left(x\right)dx\pm\int g\left(x\right)dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	**Nguyên hàm của hàm số hợp** $\left(u=u\left(x\right)\right)$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$
$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\left(\alpha\ne-1\right)$	$\int u^{\alpha}du=\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C\left(\alpha\ne-1\right)$
$\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\dfrac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+C$
$\int e^{x}dx=e^{x}+C$	$\int e^{u}du=e^{u}+C$
$\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C\left(a>0,a\ne1\right)$	$\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C\left(a>0,a\ne1\right)$
$\int\sin xdx=-\cos x+C$	$\int\sin udu=-\cos u+C$
$\int\cos xdx=\sin x+C$	$\int\cos udu=\sin u+C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

B - CÂU HỎI TNKQ

DẠNG 1: SỬ DỤNG LÍ THUYẾT

Câu 1. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(1): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có đạo hàm trên $[a;b]$.

(2): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(4): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Khẳng định (1): Sai, vì hàm số $y = |x|$ liện tục trên $[-1;1]$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$ nên không thể có đạo hàm trên $[-1;1]$

Khẳng định (2): đúng vì mọi hàm số **liên tục** trên $[a;b]$ đều có **nguyên hàm** trên $[a;b]$.

Khẳng định (3): Đúng vì mọi hàm số có **đạo hàm** trên $[a;b]$ thì đều liên tục trên $[a;b]$ nên đều có **nguyên hàm** trên $[a;b]$.

Khẳng định (4): Đúng vì mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int [f(x).g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \ (k \neq 0; k \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 3. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm.
Hoặc B, C, D đúng do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm nên A sai.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$ với $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ với $\alpha\neq -1$.

D. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 5. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k\in\mathbb{R}$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (II) và (III). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (I) và (II).

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Mệnh đề: $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì khi $k=0$ thì $\int kf(x)dx\neq k\int f(x)dx$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x)=F(x)$, $\forall x\in K$. **B.** $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in K$.

C. $F(x)=f(x)$, $\forall x\in K$. **D.** $F'(x)=f'(x)$, $\forall x\in K$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$, $\forall x\in K\Rightarrow[F(x)]'=f(x)$, $\forall x\in K$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K.

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Dựa theo định lí 1 trang 95 SGK 12 CB suy ra khẳng định A đúng.
Dựa theo định lí 3 Sự tồn tại nguyên hàm trang 97 SGK 12 CB kết luận B đúng.
Và C đúng dựa vào định nghĩa của nguyên hàm.

DẠNG 2: ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BẢNG NGUYÊN HÀM

Câu 9. Cho $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Trên $(-2;+\infty)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)+C_1$; trên khoảng $(-\infty;-2)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(-x-2)+C_2$ (C_1, C_2 là các hằng số).

B. Trên khoảng $(-\infty;-2)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x)=\ln(-x-2)-3$.

C. Trên $(-2;+\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)$.

D. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của của $f(x)$ thì chúng sai khác nhau một hằng số.

Hướng dẫn giải

Chọn D. D sai vì $F(x)=\ln(x+2)$ và $G(x)=\ln(-x-2)-3$ đều là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nhưng trên các khoảng khác nhau thì khác nhau.

Câu 10. Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \cos x\,dx=-\sin x+C$.
B. $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.
C. $\int 2x\,dx=x^2+C$.
D. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int \cos x\,dx=\sin x+C \Rightarrow$ A sai.

Câu 11. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\int x^3dx=\dfrac{x^4+C}{4}$.
B. $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln x+C$.
C. $\int \sin x dx=C-\cos x$.
D. $\int 2e^x dx=2(e^x+C)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int dx=x+2C$ (C là hằng số).
B. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (C là hằng số; $n\in\mathbb{Z}$).
C. $\int 0dx=C$ (C là hằng số).
D. $\int e^x dx=e^x-C$ (C là hằng số).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đáp án B sai vì công thức trên chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện $n\neq -1$.

Câu 13. Tìm nguyên hàm $F(x)=\int \pi^2 dx$.

A. $F(x)=\pi^2x+C$.
B. $F(x)=2\pi x+C$.
C. $F(x)=\dfrac{\pi^3}{3}+C$.
D. $F(x)=\dfrac{\pi^2x^2}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $F(x)=\int \pi^2dx=\pi^2x+C$ (vì π^2 là hằng số).

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+\cos x+2018$ là

A. $F(x)=e^x+\sin x+2018x+C$.
B. $F(x)=e^x-\sin x+2018x+C$.
C. $F(x)=e^x+\sin x+2018x$.
D. $F(x)=e^x+\sin x+2018+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-9$ là:

A. $\frac{1}{2}x^4-9x+C$. **B.** $4x^4-9x+C$. **C.** $\frac{1}{4}x^4+C$. **D.** $4x^3-9x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int(2x^3-9)\mathrm{d}x=2.\frac{x^4}{4}-9x+C=\frac{x^4}{2}-9x+C$.

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4$ là

A. 101376. **B.** $\mathrm{e}^2.x^{\mathrm{e}-1}+C$. **C.** $\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Câu 17. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$. **B.** x^5-2x^3+x+C.

C. $20x^5-12x^3+x+C$. **D.** $\frac{x^4}{4}+2x^2-2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int(5x^4-6x^2+1)\mathrm{d}x=x^5-2x^3+x+C$.

Câu 18. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x=C$. **B.** $\int x^4\,\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}+C$. **C.** $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\Rightarrow$ C sai.

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln x+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2-3\ln 2$. Tính $T=a+b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{a}{x}+b\ln|x|+2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=a+1+b\ln 2$.

Theo giả thiết, ta có $2-3\ln 2=a+1+b\ln 2$. Từ đó suy ra $a=1$, $b=-3$.

Vậy $T=a+b=-2$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là

A. $F(x)=x^3+x^2+5$. **B.** $F(x)=x^3+x+C$.

C. $F(x)=x^3+x^2+5x+C$. **D.** $F(x)=x^3+x^2+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là $F(x)=x^3+x^2+5x+C$.

Câu 22. Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^5$?

A. $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}+8$. **B.** $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}-2$.

C. $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}$. **D.** $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Áp dụng $\int(ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq-1$ và C là hằng số.

Vậy hàm số ở phương án D thỏa yêu cầu đề.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-x^2-\dfrac{1}{3}$ là

A. $\dfrac{-x^4+x^2+3}{3x}+C$. **B.** $\dfrac{-2}{x^2}-2x+C$. **C.** $-\dfrac{x^4+x^2+3}{3x}+C$. **D.** $\dfrac{-x^3}{3}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\int\left(\dfrac{1}{x^2}-x^2-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{-2}-x^2-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{3}+C$.

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=7x^6+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-2$ là

A. $x^7+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-2x$. **B.** $x^7+\ln|x|+\dfrac{1}{x}-2x+C$.

C. $x^7+\ln x+\dfrac{1}{x}-2x+C$. **D.** $x^7+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^7+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-2x+C$.

Câu 25. Nguyên hàm của $f(x)=x^3-x^2+2\sqrt{x}$ là:

A. $\dfrac{1}{4}x^4-x^3+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$. **B.** $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\dfrac{1}{4}x^4-x^3+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. **D.** $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\left(x^3-x^2+2\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$. **B.** $2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int\left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=3.\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C=2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

Câu 27. Hàm số $F(x)=e^x+\tan x+C$ là nguyên hàm của hàm số f(x) nào

A. $f(x)=e^x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **B.** $f(x)=e^x+\dfrac{1}{\sin^2 x}$

C. $f(x)=e^x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ **D.** $f(x)=e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\left(e^x+\tan x+C\right)'=e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 28. Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$. **B.** $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2x}$.

C. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(2x)$. **D.** $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\Rightarrow F'(x)=f(x)$

Do đó $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\ln|2x|\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\left(\ln|2x|\right)'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{(2x)'}{2x}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ với $x\in(0;+\infty)$.

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\dfrac{1}{x-1}+C$. **B.** $1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Có $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 30. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $F(x)=3x-\tan x+C$. **B.** $F(x)=3x+\tan x+C$.

C. $F(x)=3x+\cot x+C$. **D.** $F(x)=3x-\cot x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là $F(x)=3x+\cot x+C$.

Câu 31. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x+\dfrac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $-3\sin x+\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $3\sin x-\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $3\cos x+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $3\cos x+\ln x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(3\cos x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=3\sin x-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $x^3+\sin x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $3x^3-\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là $x^3-\cos x+C$.

Câu 33. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+8\sin x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=6x-8\cos x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=6x+8\cos x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-8\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+8\cos x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+8\sin x\right)\mathrm{d}x=x^3-8\cos x+C$.

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\sin x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\sin x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+C$.

Câu 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\cos x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\sin x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=1-\sin x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\sin x+C$.

Câu 36. $\int\left(x^2+2x^3\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(x^2+2x^3\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có: $\int\left(x^2+2x^3\right)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+C$.

Suy ra để $\int\left(x^2+x^3\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ thì $a=1, b=2$.

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$.

Ví dụ:

A. Thay $a=2$ vào $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ ta được $\frac{2}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$. Lấy đạo hàm của $\frac{2}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$: $\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C\right)'=2x^2+bx^3$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho $x^2+2x^3=2x^2+bx^3, \forall x\in\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án A

B. Thay $a=1$ vào $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ ta được $\frac{1}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$. Lấy đạo hàm của $\frac{1}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$: $\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C\right)'=x^2+bx^3$, vì tồn tại số hữu tỉ b sao cho $x^2+2x^3=2x^2+bx^3,\forall x\in\mathbb{R}$ (cụ thể $b=2\in\mathbb{Q}$) nên ta nhận đáp án **B**

C. Thay $a=9$ vào $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ ta được $3x^3+\frac{b}{4}x^4+C$. Lấy đạo hàm của $3x^3+\frac{b}{4}x^4+C$: $\left(3x^3+\frac{b}{4}x^4+C\right)'=9x^2+bx^3$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho $9x^2+2x^3=2x^2+bx^3,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án **C**

D. Thay $a=32$ vào $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ ta được $\frac{32}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$. Lấy đạo hàm của $\frac{32}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$: $\left(\frac{32}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C\right)'=32x^2+bx^3$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho $32x^2+2x^3=2x^2+bx^3,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án **D**

Chú ý:
Ta chỉ cần so sánh hệ số của x^2 ở 2 vế của đẳng thức $x^2+2x^3=2x^2+bx^3$; $9x^2+2x^3=2x^2+bx^3$;
$32x^2+2x^3=2x^2+bx^3$ và có thể loại nhanh các đáp án A, C, **D**

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.
Một số học sinh không đọc kĩ đề nên tìm giá trị của b. Nên khoanh đáp ánA.

C. Đáp án C sai.
Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm như sau:
$\int\left(x^2+2x^3\right)dx=3x^3+8x^4+C$.
Vì thế, $a=9$ để $\int\left(x^2+2x^3\right)dx=3x^3+8x^4+C$ có dạng $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$.
Học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai.
Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm như sau:
$\int\left(x^2+2x^3\right)dx=3x^3+8x^4+C$.
Học sinh không đọc kĩ yêu cầu đề bài nên tìm giá trị b.
Để $\int\left(x^2+2x^3\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{4}x^4+C$ thì $b=32$.
Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm.

Câu 37. $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx$ có dạng $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 1. **B.** 12. **C.** $\frac{36}{5}\left(1+\sqrt{3}\right)$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **Cách 1:** Theo đề, ta cần tìm $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx$ sau đó xác định giá trị của a.

Ta có: $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx=\frac{1}{12}x^4+\frac{1+\sqrt{3}}{30}x^6+C$.

Suy ra để $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx$ có dạng $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$ thì $a=1\in\mathbb{Q},\ b=\frac{1+\sqrt{3}}{5}\notin\mathbb{Q}.$

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ. Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$.

Ví dụ:

A. Thay $a=1$ vào $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$ ta được $\frac{1}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$. Lấy đạo hàm của $\frac{1}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$:

$\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C\right)'=\frac{1}{3}x^3+bx^5$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho $\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5=\frac{1}{3}x^3+bx^5,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án A.

B. Thay $a=12$ vào $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$ ta được $x^4+\frac{b}{6}x^6+C$. Lấy đạo hàm của $x^4+\frac{b}{6}x^6+C$:

$\left(x^4+\frac{b}{6}x^6+C\right)'=4x^3+bx^5$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho $\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5=4x^3+bx^5,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án **B**

C. Loại đáp án **C**

Ta có thể loại nhanh đáp án C vì $\frac{36}{5}\left(1+\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}$ và $a\in\mathbb{Q}$. Vậy đáp án chính xác là **D**

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kĩ đề nên sau khi tìm được giá trị của a (không tìm giá trị của b). Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm và chỉ tìm giá trị của a:

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx=3\cdot\frac{1}{3}x^4+6\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^6+C=x^4+\frac{6\left(1+\sqrt{3}\right)}{5}x^6+C.$$

Vì thế, $a=12$ để $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx=x^4+\frac{6\left(1+\sqrt{3}\right)}{5}x^6+C$ có dạng $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm và chỉ tìm giá trị của b do không đọc kĩ yêu cầu bài toán:

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx=3\cdot\frac{1}{3}x^4+6\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^6+C=x^4+\frac{6\left(1+\sqrt{3}\right)}{5}x^6+C.$$

Vì thế, $b=\frac{36}{5}\left(1+\sqrt{3}\right)$ để $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx=x^4+\frac{6\left(1+\sqrt{3}\right)}{5}x^6+C$ có dạng $\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^6+C$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

Câu 38. $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Biết rằng $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx=\frac{3}{4}x^4+x^3+C$. Giá trị a, b lần lượt bằng:

A. 1; 3. **B.** 3; 1. **C.** $-\frac{1}{8}$; 1. **D.** $\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1:** Ta cần tìm $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx$.

Ta có: $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx=\frac{1}{4}(2a+1)x^4+\frac{1}{3}bx^3+C$.

Vì ta có giả thiết $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx=\frac{3}{4}x^4+x^3+C$ nên $\frac{1}{4}(2a+1)x^4+\frac{1}{3}bx^3+C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4+x^3+C$.

Để $\frac{1}{4}(2a+1)x^4+\frac{1}{3}bx^3+C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4+x^3+C$ thì $\begin{cases}\frac{1}{4}(2a+1)=\frac{3}{4}\\ \frac{1}{3}b=1\end{cases}$, nghĩa là $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$.

Cách 2:
Ta loại nhanh đáp án C vì giá trị a ở đáp án C không thỏa điều kiện $a\in\mathbb{Q}$.
Tiếp theo, ta thay giá trị a, b ở các đáp án A, B vào $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx$ và tìm $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx$. Ta có: $\int\left(3x^3+3x^2\right)dx=\frac{3}{4}x^4+x^3+C$.

Chú ý: Giả sử các giá trị a, b ở các đáp án A, B, C không thỏa yêu cầu bài toán thì đáp án chính xác là **Chọn D.**

Sai lầm thường gặp:
B. Đáp án B sai.
Một số học sinh không chú ý đến thứ tự sắp xếp nên học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.
C. Đáp án C sai.
Một số học sinh sai lầm ở chỗ:
Ta có: $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx=(2a+1)x^4+bx^3+C$.

Vì ta có giả thiết $\int\left((2a+1)x^3+bx^2\right)dx=\frac{3}{4}x^4+x^3+C$ nên $(2a+1)x^4+bx^3+C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4+x^3+C$.

Để $\frac{1}{4}(2a+1)x^4+\frac{1}{3}bx^3+C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4+x^3+C$ thì $\begin{cases}(2a+1)=\frac{3}{4}\\ b=1\end{cases}$, nghĩa là $\begin{cases}a=-\frac{1}{8}\\ b=1\end{cases}$.

Câu 39. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x)=2x-3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

A. $F(x)=x^2-3\sin x+6+\frac{\pi^2}{4}$ **B.** $F(x)=x^2-3\sin x-\frac{\pi^2}{4}$

C. $F(x)=x^2-3\sin x+\frac{\pi^2}{4}$ **D.** $F(x)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x)=\int(2x-3\cos x)dx=x^2-3\sin x+C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2-3\sin\frac{\pi}{2}+C=3 \Leftrightarrow C=6-\frac{\pi^2}{4}$. Vậy $F(x)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$

Câu 40. Một nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=2x+\frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F(\frac{\pi}{4})=-1$ là:

A. $F(x)=-\cot x+x^2-\frac{\pi^2}{16}$ **B.** $F(x)=\cot x-x^2+\frac{\pi^2}{16}$

C. $F(x)=-\cot x+x^2$ **D.** $F(x)=-\cot x+x^2-\frac{\pi^2}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $F(x)=\int\left(2x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=x^2-\cot x+C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\cot\frac{\pi}{4}+C=-1 \Leftrightarrow C=\frac{\pi^2}{16}$. Vậy $F(x)=-\cot x+x^2-\frac{\pi^2}{16}$

Câu 41. Nếu $\int f(x)dx=e^x+\sin^2 x+C$ thì $f(x)$ là hàm nào?

A. $e^x+\cos^2 x$ **B.** $e^x-\sin 2x$ **C.** $e^x+\cos 2x$ **D.** $e^x+\sin 2x$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\left(e^x+\sin^2 x+C\right)'=e^x+\sin 2x$

Câu 42. Tìm một nguyên hàm F(x) của $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2}$ biết F(1) = 0

A. $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$ **B.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}$

C. $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ **D.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x)=\int\frac{x^3-1}{x^2}dx=\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

$F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1^2}{2}+\frac{1}{1}+C=0 \Leftrightarrow C=\frac{-3}{2}$. Vậy $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}$ là :

A. $4\sqrt{x}+3\ln|x|+C$. **B.** $2\sqrt{x}+3\ln|x|+C$.

C. $\left(4\sqrt{x}\right)^{-1}+3\ln|x|+C$. **D.** $16\sqrt{x}-3\ln|x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}\right)dx=4\sqrt{x}+3\ln|x|+C$.

Câu 44. Tính $\int(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x})dx$

A. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$. **B.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-4\ln|x|+C$.

C. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$. **D.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx=\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+4\ln|x|+C$.

Câu 45. Nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=4x^3-3x^2+2x-2$ thỏa mãn $F(1)=9$ là:

A. $F(x)=x^4-x^3+x^2-2$.
B. $F(x)=x^4-x^3+x^2+10$.
C. $F(x)=x^4-x^3+x^2-2x$.
D. $F(x)=x^4-x^3+x^2-2x+10$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x)=\int\left(4x^3-3x^2+2x-2\right)dx=x^4-x^3+x^2-2x+C$

$F(1)=9\Leftrightarrow 1^4-1^3+1^2-2.1+C=9\Leftrightarrow C=10\Rightarrow F(x)=x^4-x^3+x^2-2x+10$.

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $y=(2x+1)^5$ là:

A. $\frac{1}{12}(2x+1)^6+C$.
B. $\frac{1}{6}(2x+1)^6+C$.
C. $\frac{1}{2}(2x+1)^6+C$.
D. $10(2x+1)^4+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int(2x+1)^5\,dx=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^6}{6}=\frac{1}{12}(2x+1)^6+C$.

Câu 47. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x^2+x^3-4$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=0$ là

A. $2x^3-4x^4$.
B. $\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}-4x$.
C. x^3-x^4+2x.
D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x)=\int\left(2x^2+x^3-4\right)dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-4x+C$

$F(0)=0\Leftrightarrow\frac{2.0^3}{3}+\frac{0^4}{4}+C=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}-4x$.

Câu 48. Tìm hàm số F(x) biết rằng $F'(x)=4x^3-3x^2+2$ và $F(-1)=3$

A. $F(x)=x^4-x^3-2x-3$
B. $F(x)=x^4-x^3+2x+3$
C. $F(x)=x^4-x^3-2x+3$
D. $F(x)=x^4+x^3+2x+3$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F(x)=\int F'(x)dx=\int\left(4x^3-3x^2+2\right)dx=x^4-x^3+2x+C$

$F(-1)=3\Leftrightarrow(-1)^4-(-1)^3+2.(-1)+C=3\Leftrightarrow C=3$

Vậy $F(x)=x^4-x^3+2x+3$

Câu 49. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x)=|x-1|$. Biết rằng $f(0)=3$. Tính $f(2)+f(4)$?

A. 10.
B. 12.
C. 4.
D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $f'(x)=\begin{cases}x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ -(x-1) & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Khi $x\ge 1$ thì $f(x)=\int(x-1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+C_1$.

Khi $x<1$ thì $f(x)=-\int(x-1)\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+C_2$.

Theo đề bài ta có $f(0)=3$ nên $C_2=3 \Rightarrow f(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+3$ khi $x<1$.

Mặt khác do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+3\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+C_1\right] \Leftrightarrow -\left(\dfrac{1}{2}-1\right)+3=\dfrac{1}{2}-1+C_1 \Leftrightarrow C_1=4$.

Vậy khi $x\ge 1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+4 \Rightarrow f(2)+f(4)=12$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x)=x+\sin x$ và $f(0)=1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+2$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x-2$.

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x+\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x+\sin x \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$; $f(0)=1 \Leftrightarrow -1+C=1 \Leftrightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+2$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\cos x$ và $f(0)=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=3x+5\sin x+2$. **B.** $f(x)=3x-5\sin x-5$.

C. $f(x)=3x-5\sin x+5$. **D.** $f(x)=3x+5\sin x+5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $f(x)=\int(3-5\cos x)\mathrm{d}x=3x-5\sin x+C$.

Lại có: $f(0)=5 \Leftrightarrow 3.0-5\sin 0+C=5 \Leftrightarrow C=5$. Vậy $f(x)=3x-5\sin x+5$.

Câu 52. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $F(x)=-\cos x+C$, với C là hằng số tùy ý.

Đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên

$1=-\cos 0+C \Leftrightarrow C=2 \Rightarrow F(x)=-\cos x+2$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 53. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ thỏa mãn $F(0)=2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int x^2-2x+3\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+C$.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0)=2\Rightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+2\Rightarrow F(1)=\frac{13}{3}$.

Câu 54. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\frac{b}{x^2}(x\neq 0)$, biết rằng $F(-1)=1$, $F(1)=4$, $f(1)=0$.

A. $F(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$.

B. $F(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{7}{4}$.

C. $F(x)=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4x}-\frac{7}{4}$.

D. $F(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(ax+bx^{-2}\right)\mathrm{d}x=\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^{-1}}{-1}+C=\frac{ax^2}{2}-\frac{b}{x}+C$$

Ta có: $\begin{cases}F(-1)=1\\F(1)=4\\f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}+b+C=1\\\frac{a}{2}-b+C=4\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{3}{2}\\C=\frac{7}{4}\end{cases}$. Vậy $F(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$.

Câu 55. Biết hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Hàm số $f(x)$ là

A. x^3+x^2-3x-5. **B.** x^3+2x^2-5x-5. **C.** $2x^3+x^2-7x-5$. **D.** x^3+x^2+4x-5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f(x)=\int\left(3x^2+2x-m+1\right)\mathrm{d}x=x^3+x^2+(1-m)x+C$.

Theo đề bài, ta có

$\begin{cases}f(2)=1\\f(0)=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(1-m)+C+12=1\\C=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\C=-5\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3+x^2-3x-5$.

Câu 56. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$ bằng

A. 10. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$3F(1)-2F(2)=3\left[F(1)-F(2)\right]+F(2)-F(0)+F(0)=3\int_2^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=4.$$

$\Rightarrow\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]=\log_2 4=2$.

Câu 57. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+2(m-1)x+m+5$, với m là tham số thực. Một nguyên hàm của $f(x)$ biết rằng $F(1)=8$ và $F(0)=1$ là:

A. $F(x)=x^4+2x^2+6x+1$ **B.** $F(x)=x^4+6x+1$.

C. $F(x)=x^4+2x^2+1$. **D.** Đáp án A và **B**

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\left[4x^3+2(m-1)x+m+5\right]dx=x^4+(m-1)x^2+(m+5)x+C$.

Lại có: $\begin{cases}F(0)=1\\F(1)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=1\\1+m-1+m+5+C=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=1\\m=1\end{cases}$. Vậy $F(x)=x^4+6x+1$.

Câu 58. Tìm $T=\int\dfrac{x^n}{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}}dx$?

A. $T=x.n!+n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)+C$.

B. $T=x.n!-n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)+C$.

C. $T=n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)+C$.

D. $T=n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)-x^n.n!+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $g(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\Rightarrow g'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Ta có: $g(x)-g'(x)=\dfrac{x^n}{n!}\Rightarrow x^n=n!\left(g(x)-g'(x)\right)$

$$\Rightarrow T=\int\frac{n!.\left[g(x)-g'(\ )\right]}{g(x)}dx=n!\int\left[1-\frac{g'(x)}{g(x)}\right]dx=n!.x-n!\ln=n!x-n!\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)+C$$

DẠNG 3: NGUYÊN HÀM CÁC PHÂN THỨC HỮU TỈ

f(x) là hàm hữu tỉ: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc của P(x) ≥ bậc của Q(x) thì ta thực hiện phép chia đa thức.
– Nếu bậc của P(x) < bậc của Q(x) và Q(x) có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích f(x) thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn: $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$

$\dfrac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x-m}+\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, *vôùi* $\Delta=b^2-4ac<0$

$\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}+\dfrac{D}{(x-b)^2}$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$ **B.** $\int f(x)dx=2x^3-\dfrac{5}{x}+C$

C. $\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{5}{x}+C$ **D.** $\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int \frac{5+2x^4}{x^2}dx=\int\left(\frac{5}{x^2}+2x^2\right)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

Câu 60. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+2x+C$. **B.** $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+2x+C$.

C. $F(x)=\frac{\frac{x^3}{3}+x}{\frac{x^2}{2}}+C$. **D.** $F(x)=\left(\frac{\frac{x^3}{3}+x}{\frac{x^2}{2}}\right)^3+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2dx=\int\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}dx=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C$.

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y=\frac{2x^4+3}{x^2}$ là:

A. $\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+C$. **B.** $-3x^3-\frac{3}{x}+C$. **C.** $\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{x}+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\frac{2x^4+3}{x^2}dx=\int\left(2x^2+\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+C$.

Câu 62. Tính nguyên hàm $\int\left(\frac{1}{2x+3}\right)dx$

A. $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **C.** $2\ln|2x+3|+C$. **D.** $\ln|2x+3|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\left(\frac{1}{2x+3}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2x+3}\right)d(2x+3)=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$

Câu 63. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\frac{e-1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ là:

A. $F(x)=2\ln|2x+1|-\frac{1}{2}$. **B.** $F(x)=2\ln|2x+1|+1$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+1$. **D.** $F(x)=\ln|2x+1|+\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng

$F(x)=\int\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Mà $F\left(\frac{e-1}{2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left|2\left(\frac{e-1}{2}\right)+1\right|+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=1$.

Câu 64. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\frac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int \frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C$. Theo đề $F(2)=1 \Leftrightarrow \ln 1+C=1 \Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(3)=\ln 2+1$.

Câu 65. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x+1}$ và $F(0)=2$ thì $F(1)$ bằng.

A. $\ln 2$. **B.** $2+\ln 2$. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $F(x)=\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$ mà $F(0)=2$ nên $F(x)=\ln|x+1|+2$.

Do đó $F(1)=2+\ln 2$.

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{(3-2x)^3}$ là :

A. $\frac{-1}{2(3+2x)^2}+C$. **B.** $\frac{1}{4(3-2x)}+C$. **C.** $\frac{2}{(3-2x)^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2(3-2x)^2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int \frac{2}{(3-2x)^3}dx=\frac{1}{2(3-2x)^2}+C$.

Câu 67. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$

A. $\frac{x^2-x-1}{x+1}$. **B.** $\frac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $\frac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $\frac{x^2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}x^2+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}2x+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

Câu 68. Tính $\int \frac{1}{x(x-3)}dx$.

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right|+C$. **B.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right|+C$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int \frac{1}{x(x-3)}dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{3}.\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C$.

Câu 69. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{1}{2x+1}$. Biết $F(0)=0$, $F(1)=a+\frac{b}{c}\ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.

A. 4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn A . Ta có $F(x)=\int\left(3x^2+\frac{1}{2x+1}\right)dx=x^3+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Do $F(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=x^3+\frac{1}{2}\ln|2x+1|$.

Vậy $F(1)=1+\frac{1}{2}\ln 3 \Rightarrow a=1;\ b=1;\ c=2 \Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 70. Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

A. $F_1(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $F_3(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $(F_1(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án A là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_2(x))'=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, đáp án B không phải là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_3(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án C là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_4(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án D là nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 71. Cho biết $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$$\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C.$$

Vậy $\begin{cases}a=5\\ b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=8$.

Câu 72. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2)=3$. Tìm $F(x)$:

A. $F(x)=x+4\ln|2x-3|+1$. **B.** $F(x)=x+2\ln(2x-3)+1$.

C. $F(x)=x+2\ln|2x-3|+1$. **D.** $F(x)=x+2\ln|2x-3|-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $F(x)=\int\frac{2x+1}{2x-3}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|2x-3|+C$.

Lại có $F(2)=3 \Leftrightarrow 2+2\ln|1|+C=3 \Leftrightarrow C=1$.

Câu 73. Tích phân $I=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x^2+1|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

Khi đó $a=-1$, $b=2$, $c=1$. Vậy $a+b+c=2$.

Câu 74. Tính $\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx$, kết quả là:

A. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$. **C.** $\ln\left|x^2-4x+3\right|+C$. **D.** $\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$.

Câu 75. Nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2-7x+6}dx$ là:

A. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x-6}\right|+C$.

B. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-6}{x-1}\right|+C$.

C. $\frac{1}{5}\ln\left|x^2-7x+6\right|+C$.

D. $-\frac{1}{5}\ln\left|x^2-7x+6\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có:

$$\int \frac{1}{x^2-7x+6}dx=\int \frac{1}{(x-1)(x-6)}dx=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{5}\left(\ln|x-6|-\ln|x-1|\right)+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-6}{x-1}\right|+C$$

Câu 76. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, biết $F(0)=1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

A. $1+\frac{1}{2}\ln 3$. **B.** $1+\frac{1}{2}\ln 5$. **C.** $1+\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}(1+\ln 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

$F(0)=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+1\Rightarrow F(-2)=1+\frac{1}{2}\ln 3$.

Câu 77. Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{1}{4-x^2}\mathrm{d}x.$

A. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C.$

B. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

C. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

D. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $I=-\int\frac{1}{(x-2)(x+2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C.$

Câu 78. Tìm nguyên hàm $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

A. $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$.

B. $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$.

C. $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$.

D. $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.

Câu 79. Nguyên hàm $\int \frac{2x^3-6x^2+4x+1}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$.

B. $\frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

C. $\frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$.

D. $x^2 + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$\int \frac{2x^3-6x^2+4x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)dx = \int \left(2x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = x^2 + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$$

Câu 80. Nguyên hàm $\int \frac{3x+3}{-x^2-x+2}dx$ là:

A. $2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$.

B. $-2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$.

C. $2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$.

D. $-2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có:

$$\int \frac{3x+3}{-x^2-x+2}dx = \int \frac{3x+3}{(1-x)(x+2)}dx = \int \left(\frac{2}{1-x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = -2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$$

Câu 81. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$ khi biết $F(1) = \frac{1}{3}$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$.

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}$.

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1}$.

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int \frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = \int \left(x+1 - \frac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C = F(x)$.

Mà $F(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + 1 + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{13}{6}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$.

Câu 82. Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b \neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x) = [F(x)-1]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1$, $b=4$.

B. $a=1$, $b=-1$.

C. $a=1$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$.

D. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x) = \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó: $2f^2(x)=\left(F(x)-1\right)f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4}=\left(\dfrac{ax+b}{x+4}-1\right)\dfrac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$\Leftrightarrow 4a-b=-(ax+b-x-4)\Leftrightarrow(x+4)(1-a)=0\Leftrightarrow a=1$ (do $x+4\neq 0$)

Với $a=1$ mà $4a-b\neq 0$ nên $b\neq 4$.

Vậy $a=1$, $b\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+ Vì $4a-b\neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a=1$, $b=4$ và phương án D: $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$
.

+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b=0$, $a=1$. Khi đó, ta có

$F(x)=\dfrac{x}{x+4}$, $f(x)=\dfrac{4}{(x+4)^2}$, $f'(x)=-\dfrac{8}{(x+4)^3}$.

Thay vào $2f^2(x)=\left(F(x)-1\right)f'(x)$ thấy đúng nên.

DẠNG 4: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ VÔ TỈ

Câu 83. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x^2}$ là :

A. $\dfrac{2x\sqrt[3]{x}}{4}+\dfrac{9x\sqrt{x^2}}{8}+C$.

B. $\dfrac{5x\sqrt{x}}{3}+\dfrac{27x^2\sqrt[3]{x^2}}{8}+C$.

C. $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}-\dfrac{9x^2\sqrt[3]{x}}{5}+C$.

D. $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+\dfrac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\left(\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+3.\dfrac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}+C=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+\dfrac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8}+C$.

Câu 84. Nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+3$ là:

A. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+3x+C$.

B. $2\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^2}+3x+C$.

C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+3x+C$.

D. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^2}+3x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+3\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}+3\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}+3x+C=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+3x+C$.

Câu 85. Tính $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ thu được kết quả là:

A. $\dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$

B. $-2\sqrt{1-x}+C$

C. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}+C$

D. $\sqrt{1-x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}+C$.

Câu 86. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{x^2}$. Nguyên hàm của $f(x)$ biết $F(3)=6$ là:

A. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}$.

B. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}$.

C. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}$. **D.** $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{1}{x}+C$.

Theo đề bài, ta lại có:

$F(3)=6\Leftrightarrow\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}+\frac{1}{3}+C=6\Leftrightarrow C=\frac{1}{3}$. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$.

Câu 87. Cho $\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a(x+2)\sqrt{x+2}+b(x+1)\sqrt{x+1}+C$. Khi đó $3a+b$ bằng:

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})\,dx=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$

$\Rightarrow a=\frac{2}{3};\ b=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow 3a+b=\frac{4}{3}$

Câu 88. Tìm $Q=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$?

A. $Q=\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **B.** $Q=\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

C. $Q=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{x^2-1}+C$. **D.** Cả đáp án B,C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện: $\frac{x-1}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x<-1\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Nếu $x\ge 1$ thì

$Q=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

Trường hợp 2: Nếu $x<-1$ thì

$Q=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{x^2-1}+C$

Câu 89. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. –2. **B.** 3. **C.** –3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)dx=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}F(0)=0\\F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\m=3\end{cases}$. Vậy $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

Câu 90. Hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a,b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F'(x)=a\sqrt{4x+1}+(ax+b).\dfrac{2x}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6a=12\\a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+b=1$.

Câu 91. Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{Z})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=8$. **B.** $T=5$. **C.** $T=6$. **D.** $T=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $F'(x)=f(x)$.

Tính $F'(x)=(2ax+b)\sqrt{2x-3}+(ax^2+bx+c).\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

$=\dfrac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}=\dfrac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}$. Do đó

$\dfrac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}=\dfrac{20x^2-30x+11}{\sqrt{2x-3}}\Rightarrow 5ax^2+(3b-6a)x-3b+c=20x^2-30x+11$

$\Rightarrow\begin{cases}5a=20\\3b-6a=-30\\-3b+c=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-2\\c=5\end{cases}\Rightarrow T=7$.

DẠNG 5: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 92. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos 2x$ là

A. $-2\sin 2x+C$. **B.** $\sin 2x+C$. **C.** $2\sin 2x+C$. **D.** $\sin 2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=2.\dfrac{1}{2}\sin 2x+C=\sin 2x+C$.

Câu 93. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x+2$ là

A. $5\cos 5x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **C.** $\dfrac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **D.** $\cos 5x+2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\sin 5x+2)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{5}\cos 5x+2x+C$.

Câu 94. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\sin 2x$ là

A. $x^2-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $x^2+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $x^2-2\cos 2x+C$. **D.** $x^2+2\cos 2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x=x^2-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 95. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^2 2x$ là:

A. $\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{8}+C$. **B.** $\frac{x}{2}-\frac{\cos 4x}{2}+C$. **C.** $\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}+C$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int \cos^2 2x.dx=\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}+C$.

Câu 96. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=6\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Áp dụng công thức: $\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.

Câu 97. Cho $F(x)=\cos 2x-\sin x+C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi)=-3$. **B.** $f(\pi)=1$. **C.** $f(\pi)=-1$. **D.** $f(\pi)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $f(x)=F'(x)\Rightarrow f(x)=-2\sin 2x-\cos x$. Do đó: $f(\pi)=1$.

Câu 98. Tính: $\int\frac{dx}{1+\cos x}$

A. $2\tan\frac{x}{2}+C$. **B.** $\tan\frac{x}{2}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+C$. **D.** $\frac{1}{4}\tan\frac{x}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}+C$.

Câu 99. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$, biết $F(0)=\frac{2}{3}$.

A. $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}$. **B.** $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}-1$.

C. $F(x)=3x^2+\frac{\cos 3x}{3}+1$. **D.** $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(6x+\sin 3x)\mathrm{d}x=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+C=F(x)$.

$F(0)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 0-\frac{1}{3}.1+C=\frac{2}{3}\Leftrightarrow C=1$. Vậy $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+1$.

Câu 100. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 x$ là:

A. $\cot x-x+C$. **B.** $\tan x-x+C$. **C.** $-\cot x-x+C$. **D.** $-\tan x-x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\tan^2 xdx=\int(\tan^2 x+1-1)dx=\tan x-x+C$.

Câu 101. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=-\frac{1}{\cos^2 x}$ và $F(0)=1$. Khi đó, ta có $F(x)$ là:

A. $-\tan x$. **B.** $-\tan x+1$. **C.** $\tan x+1$. **D.** $\tan x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F(x)=\int -\frac{dx}{\cos^2 x}=-\tan x+C$. Mà $F(0)=1\Leftrightarrow -\tan 0+C=1\Leftrightarrow C=1$

Vậy $F(x)=-\tan x+1$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)=\sin^4 2x$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{8}\left(3x-\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{8}\left(3x+\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int \sin^4 2x.dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 4x)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$

$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 4x+\cos 8x)dx=\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$.

Câu 103. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(1-2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos(1-2x)+\frac{3}{2}$. **B.** $F(x)=\cos(1-2x)$.

C. $F(x)=\cos(1-2x)+1$. **D.** $F(x)=\frac{1}{2}\cos(1-2x)+\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sin(1-2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left[-\cos(1-2x)\right]+C=\frac{1}{2}\cos(1-2x)+C$.

Mà $F\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos\left(1-2.\frac{1}{2}\right)+C=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}+C=1\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\cos(1-2x)+\frac{1}{2}$.

Câu 104. Nguyên hàm $\int(\sin 2x+\cos x)dx$ là:

A. $\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x+C$. **B.** $-\cos 2x+\sin x+C$.

C. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x+C$. **D.** $-\cos 2x-\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int(\sin 2x+\cos x)dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x+C$.

Câu 105. Nguyên hàm $\int\left[\sin(2x+3)+\cos(3-2x)\right]dx$ là:

A. $-2\cos(2x+3)-2\sin(3-2x)+C$. **B.** $-2\cos(2x+3)+2\sin(3-2x)+C$.

C. $2\cos(2x+3)-2\sin(3-2x)+C$. **D.** $2\cos(2x+3)+2\sin(3-2x)+C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$\int\left[\sin(2x+3)+\cos(3-2x)\right]dx=-2\cos(2x+3)-2\sin(3-2x)+C$.

Chọn A

Câu 106. Nguyên hàm $\int\left[\sin^2(3x+1)+\cos x\right]dx$ là:

A. $\frac{1}{2}x-3\sin(6x+2)+\sin x+C$. **B.** $x-3\sin(6x+2)+\sin x+C$.

C. $\frac{1}{2}x-3\sin(3x+1)+\sin x+C$. **D.** $\frac{1}{2}x-3\sin(6x+2)-\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$$\int\left[\sin^2(3x+1)+\cos x\right]dx=\int\left[\frac{1-\cos(6x+2)}{2}+\cos x\right]dx=\int\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6x+2)+\cos x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}x-3\sin(6x+2)+\sin x+C$$

Câu 107. Kết quả nào dưới đây không phải là nguyên hàm của $\int(\sin^3x+\cos^3x)dx$?

A. $3\cos x.\sin^2x-3\sin x.\cos^2x+C$. **B.** $\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)+C$.

C. $3\sqrt{2}\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **D.** $3\sqrt{2}\sin x.\cos x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int(\sin^3x+\cos^3x)dx=3\cos x.\sin^2x-3\sin x.\cos^2x+C$

$$=\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)+C=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Câu 108. Cho hàm số $f(x)=\cos 3x.\cos x$. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng 0 khi $x=0$ là:

A. $3\sin 3x+\sin x$ **B.** $\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}$ **C.** $\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$ **D.** $\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x)=\int\cos 3x.\cos .dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+cos4x)dx=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

$F(0)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}\sin 0+\frac{1}{4}\sin 0+C=0\Leftrightarrow C=0$. Vậy $F(x)=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{4}$

Câu 109. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cot^2x$ là:

A. $\cot x-x+C$ **B.** $-\cot x-x+C$ **C.** $\cot x+x+C$ **D.** $\tan x+x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\cot^2xdx=\int(\cot^2x+1-1)dx=-\cot x-x+C$.

Câu 110. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 4x}{1+\cos^2x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-4+6\ln 2$. **B.** $F(0)=-4-6\ln 2$. **C.** $F(0)=4-6\ln 2$. **D.** $F(0)=4+6\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

$$F(x)=\int\frac{\sin 4x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin 2x.\cos 2x}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{4\sin 2x.\cos 2x}{3+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{-2.\cos 2x.(3+\cos 2x)'}{3+\cos 2x}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int\frac{(3+\cos 2x)-3}{3+\cos 2x}\mathrm{d}(3+\cos 2x)=-2\int\left(1-\frac{3}{3+\cos 2x}\right)\mathrm{d}(3+\cos 2x)$$

$$=-2(3+\cos 2x)+6\ln|3+\cos 2x|+C.$$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow-2(3+\cos\pi)+6\ln|3+\cos\pi|+C=0\Leftrightarrow C=4-6\ln 2$.

$\Rightarrow F(0) = -2(3+\cos 0) + 6\ln|3+\cos 0| + 4 - 6\ln 2 = -4 + 6\ln 2$.

Cách 2:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -F(0) \Rightarrow F(0) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \approx 0,15888$.

Câu 111. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$. **B.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. **C.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. **D.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int\left[\left(\tan^2 x + 1\right) - 1\right]\mathrm{d}x = \tan x - x + C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}$. Vậy $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Câu 112. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1+\sin x)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x.$ **B.** $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x.$

C. $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x.$ **D.** $F(x) = \frac{3}{2}x + 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int(1+\sin x)^2 dx = \int\left(1 + 2\sin x + \sin^2 x\right)dx = \int\left(1 + 2\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$= \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi + c = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

Câu 113. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-3\sin 3x + 2\cos 3x}{5\sin 3x - \cos 3x}$.

A. $-\frac{17}{26}x + \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C$. **B.** $-\frac{17}{26}x - \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C$.

C. $\frac{17}{26}x + \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C$. **D.** $\frac{17}{26}x - \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$-3\sin 3x + 2\cos 3x = A(5\sin 3x - \cos 3x) + B(15\cos 3x + 3\sin 3x) \Rightarrow \begin{cases} 5A + 3B = -3 \\ -A + 15B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-17}{26} \\ B = \frac{7}{78} \end{cases}$$

Câu 114. Biết $\int(\sin 2x - \cos 2x)^2\,\mathrm{d}x = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) dx = \int (1 - \sin 4x) dx = x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$.

Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 115. Tính $I = \int 8\sin 3x \cos x dx = a\cos 4x + b\cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$I = \int 8\sin 3x \cos x dx = 4\int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\cos 4x - 2\cos 2x + C \Rightarrow a = -1, b = -2$.

Câu 116. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = 2\sin x \cos 3x$ và $F(0) = 0$, khi đó

A. $F(x) = \cos 4x - \cos 2x$.

B. $F(x) = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{8}$.

C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $y = \sin 4x - \sin 2x \Rightarrow F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C$, vì $F(0) = 0$ nên $C = -\frac{1}{4}$.

Nên $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$.

Câu 117. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm số nào sau đây không phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

A. $F_1(x) = -\cos x$.

B. $F_2(x) = 2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}$.

C. $F_3(x) = -2\sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{x}{2}\right)$.

D. $F_4(x) = 2\cos\frac{\alpha+x}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Đáp án A là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2} = \cos\alpha - \cos x$. Đáp án B là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$-2\sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{x}{2}\right) = \cos(2\alpha) - \cos x$. Đáp án C là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$2\cos\frac{\alpha+x}{2}.\sin\frac{\alpha-x}{2} = \sin\alpha - \sin x$. Đáp án D không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

Câu 118. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 2x + \frac{1}{2}$.

A. $\int\left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right)dx = 2\tan 2x - 2x + C$.

B. $\int\left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \tan 2x - \frac{x}{2} + C$.

C. $\int\left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \tan 2x - x + C$.

D. $\int\left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$.

Câu 119. Hàm số $F(x)=\ln|\sin x-3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x)=\dfrac{\sin x-3\cos x}{\cos x+3\sin x}$.

B. $f(x)=\dfrac{-\cos x-3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

C. $f(x)=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

D. $f(x)=\cos x+3\sin x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $f(x)=F'(x)=\left(\ln|\sin x-3\cos x|\right)'=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

Câu 120. Hàm số $f(x)=\dfrac{7\cos x-4\sin x}{\cos x+\sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\dfrac{3\pi-11\ln 2}{4}$.

B. $\dfrac{3\pi}{4}$.

C. $\dfrac{3\pi}{8}$.

D. $\dfrac{3\pi-\ln 2}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{11}{2}(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}$

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}x+\int\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}\int\dfrac{1}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C$.

Mà $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{8}\Rightarrow\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{11}{2}\ln\sqrt{2}+C=\dfrac{3\pi}{8}\Rightarrow C=-\dfrac{11}{4}\ln 2$

Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+C=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{11}{4}\ln 2$.

Câu 121. Tìm $I=\int\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$?

A. $I=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$.

B. $I=x+\ln|\sin x+\cos x|+C$.

C. $I=x-\ln|\sin x+\cos x|+C$.

D. $I=\dfrac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt: $T=\int\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$\Rightarrow I+T=\int\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=x+C_1$ (1)

Ta lại có:

$I-T=\int\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx-\int\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=$

$\Leftrightarrow I-T=-\int\dfrac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|+C_2$ (2)

Từ $(1);(2)$ ta có hệ: $\begin{cases}I+T=x+C_1\\ I-T=-\ln|\sin x+\cos x|+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I=\dfrac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C\\ T=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C\end{cases}$

Câu 14. Biết $I=\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int A+B\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$. Kết quả của A, B lần lượt là

A. $A=B=\frac{1}{2}$. **B.** $A=B=-\frac{1}{2}$. **C.** $A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$. **D.** $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}=A+B\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{A(\cos x+\sin x)+B(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

$$\Rightarrow \sin x=A(\cos x+\sin x)+B(\cos x-\sin x)=(A+B)\cos x+(A-B)\sin x$$

Do đó: $\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Câu 122. Tìm $I=\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$?

A. $I=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)\right)+C$. **B.** $I=x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C$.

C. $I=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)\right)+C$. **D.** $I=x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt: $T=\int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

$$\Rightarrow I+T=\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx+\int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=x+C_1 \quad (1)$$

Mặt khác:

$$I-T=\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx-\int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int \frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$$

$$\Leftrightarrow I-T=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-2\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int \frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}dx$$

$$\Leftrightarrow I-T=\int \frac{2\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C_2 \quad (2)$$

Từ $(1);(2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases}I+T=x+C_1\\I-T=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)\right)+C\\T=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)\right)+C\end{cases}$$

Câu 123. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=-3\sin 2x+2\cos x-e^x$ là

A. $-6\cos 2x+2\sin x-e^x+C$. **B.** $6\cos 2x-2\sin x-e^x+C$.

C. $\frac{3}{2}\cos 2x-2\sin x-e^x+C$. **D.** $\frac{3}{2}\cos 2x+2\sin x-e^x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int\left(-3\sin 2x+2\cos x-e^{x}\right)dx=\frac{3}{2}\cos 2x+2\sin x-e^{x}+C$.

Câu 124. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\tan x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f\left(0\right)=0$, $f\left(\pi\right)=1$. Tỉ số giữa $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $2\left(\log_2 e+1\right)$. B. 2. C. $\frac{1\left(1+\ln 2\right)}{2+\ln 2}$. D. $2\left(1-\log_2 e\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f\left(x\right)=\int\tan x\,dx=-\ln\left|\cos x\right|+C=\begin{cases}-\ln\cos x+C_1 & \text{khi } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\ln\left(-\cos x\right)+C_2 & \text{khi } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

$f\left(0\right)=0\Rightarrow C_1=0$ và $f\left(\pi\right)=1\Rightarrow C_2=1$.

Khi đó $f\left(x\right)==\begin{cases}-\ln\cos x & \text{khi } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\ln\left(-\cos x\right)+1 & \text{khi } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

Suy ra $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\ln 2+1\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$. Vậy tỉ số cần tìm là $2\left(\log_2 e+1\right)$.

DẠNG 6: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ MŨ LÔGARIT

Câu 125. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x}dx=2.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C$.

B. $\int 5^{2x}dx=\frac{25^{x}}{2\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}dx=2.5^{2x}\ln 5+C$.

D. $\int 5^{2x}dx=\frac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int 5^{2x}dx=\int 25^{x}dx=\frac{25^{x}}{\ln 25}+C=\frac{25^{x}}{2\ln 5}+C$.

Câu 126. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{2018x}$.

A. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{2018}.e^{2018x}+C$.

B. $\int f\left(x\right)dx=e^{2018x}+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=2018e^{2018x}+C$.

D. $\int f\left(x\right)dx=e^{2018x}\ln 2018+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo công thức nguyên hàm mở rộng.

Câu 127. Tìm nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=e^{2x}$, biết $F\left(0\right)=1$.

A. $F\left(x\right)=e^{2x}$. B. $F\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$. C. $F\left(x\right)=2e^{2x}-1$. D. $F\left(x\right)=e^{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Theo giả thiết: $F(0)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$.

Câu 128. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^{3x}$ thỏa mãn $F(0)=1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$. **B.** $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+1$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $F(x)=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+C$. Lại có $F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+C=1 \Leftrightarrow C=\frac{2}{3}$

Câu 129. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$. **B.** $F(x)=2e^x+x^2-\frac{1}{2}$.

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$. **D.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$F(x)=\int(e^x+2x)dx=e^x+x^2+C$ $F(0)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0+C=\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$ $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2018^x\ln 2018-\cos x$ và $f(0)=2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x)=2018^x+\sin x+1$. **B.** $f(x)=\frac{2018^x}{\ln 2018}+\sin x+1$.

C. $f(x)=\frac{2018^x}{\ln 2018}-\sin x+1$. **D.** $f(x)=2018^x-\sin x+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $f(x)=\int(2018^x\ln 2018-\cos x)dx=2018^x-\sin x+C$

Mà $f(0)=2 \Leftrightarrow 2018^0-\sin 0+C=2 \Leftrightarrow C=1$. Vậy $f(x)=2018^x-\sin x+1$.

Câu 131. Tính $\int(2+e^{3x})^2dx$

A. $3x+\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{6}e^{6x}+C$ **B.** $4x+\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{5}{6}e^{6x}+C$

C. $4x+\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{6}e^{6x}+C$ **D.** $4x+\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{6}e^{6x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int(2+e^{3x})^2dx=\int(4+4e^{3x}+e^{6x})dx=4x+\frac{4e^{3x}}{3}+\frac{e^{6x}}{6}+C$.

Câu 132. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x(1-e^{-x})$ và $F(0)=3$ thì $F(x)$ là?

A. e^x-x **B.** e^x-x+2 **C.** e^x-x+C **D.** e^x-x+1

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F(x)=\int e^x.(1-e^{-x})dx=\int(e^x-1)dx=e^x-x+C$

$F(0)=3 \Leftrightarrow e^0-0+C=3 \Leftrightarrow C=2$. Vậy $F(x)=e^x-x+2$

Câu 133. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-e^{-x}$ là :

A. $e^x+e^{-x}+C$. **B.** $e^x-e^{-x}+C$.

C. $-e^x+e^{-x}+C$. **D.** e^x+e^x+C.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\left(e^x-e^{-x}\right)dx=e^x+e^{-x}+C$.

Câu 134. Hàm số $F(x)=e^x+e^{-x}+x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=e^{-x}+e^x+1$ **B.** $f(x)=e^x-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2$

C. $f(x)=e^x-e^{-x}+1$ **D.** $f(x)=e^x+e^{-x}+\frac{1}{2}x^2$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\left(e^x+e^{-x}+1\right)dx=e^x-e^{-x}+x+C$.

Câu 135. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}-e^{-3x}$ là :

A. $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{-2x}}{2}+C$. **B.** $\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{3}+C$.

C. $\frac{e^{3x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{2}+C$. **D.** $\frac{e^{-2x}}{3}+\frac{e^{3x}}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\left(e^{2x}-e^{-3x}\right)dx=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{3}+C$.

Câu 136. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{2x}-2^{-3x}$ là :

A. $\frac{3^{2x}}{2.\ln 3}+\frac{2^{-3x}}{3.\ln 2}+C$. **B.** $\frac{3^{2x}}{2.\ln 3}-\frac{2^{-3x}}{3.\ln 2}+C$.

C. $\frac{3^{-2x}}{2.\ln 3}+\frac{2^{3x}}{3.\ln 2}+C$. **D.** $\frac{3^{-2x}}{2.\ln 3}-\frac{2^{3x}}{3.\ln 2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A . Ta có: $\int\left(3^{2x}-2^{-3x}\right)dx=\frac{3^{2x}}{2.\ln 3}+\frac{2^{-3x}}{3.\ln 2}+C$.

Câu 137. Hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}$

.

A. $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$. **B.** $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

C. $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$. **D.** $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$ nên ta có: $f(x)=\left(F(x)\right)'=2\mathrm{e}^{2x}$.

Khi đó: $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)dx=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Câu 138. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.

Câu 139. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + 5\right)$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

D. $F(x) = -\frac{1}{2}\left(2 - e^{x^2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = -xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y = xe^{x^2}$.

Câu 140. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x}\left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

A. $F(x) = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C$.

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

D. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}\ln 4}{4^x}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 2^{2x}\left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right) = 12^x - \sqrt{x}$. Nên $F(x) = \int\left(12^x - \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

Câu 141. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x\left(2017 - \frac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(2017\mathrm{e}^x - 2018x^{-5}\right)\mathrm{d}x = 2017\mathrm{e}^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 142. Tính $\int 2^{2x}.3^x.7^x\,dx$

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

B. $\frac{2^{2x}.3^x.7^x}{\ln 4.\ln 3.\ln 7} + C$

C. $84^x + C$

D. $84^x \ln 84 + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int 2^{2x}.3^x.7^x\,dx = \int 84^x\,dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C$.

Câu 143. Nguyên hàm $\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}}dx$ là:

A. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + C$.

B. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$.

C. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$.

D. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$\int \frac{e^{2x+1}-2}{\sqrt[3]{e^x}}dx = \int \left(\frac{e^{2x+1}}{e^{\frac{x}{3}}} - \frac{2}{e^{\frac{x}{3}}} \right) dx = \int \left(e^{2x+1-\frac{x}{3}} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \int \left(e^{\frac{5}{3}x+1} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + C$$

.

Câu 144. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x+3) = 2$ là

A. $S = \{2\}$. **B.** $S = \{-2;2\}$. **C.** $S = \{1;2\}$. **D.** $S = \{-2;1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A Ta có: $F(x) = \int \frac{dx}{e^x+3} = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \ln(e^x+3)\right) + C$.

Do $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$ nên $C = 0$. Vậy $F(x) = \frac{1}{3}\left(x - \ln(e^x+3)\right)$.

Do đó: $3F(x) + \ln(e^x+3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 145. Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

A. $f(x) = (x^2+2x-1)e^{3x+1}$. **B.** $f(x) = (x^2-2x-1)e^{3x+1}$.

C. $f(x) = (x^2-2x+1)e^{3x+1}$. **D.** $f(x) = (x^2-2x-1)e^{3x-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$F'(x) = \left(\frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-24x+17)\right)' = \frac{1}{27}\left[3.e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + e^{3x+1}(9x^2-24x+17)'\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[3.e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + e^{3x+1}(18x-24)\right] = \frac{1}{27}e^{3x+1}(27x^2-54x+27) = e^{3x+1}(x^2-2x+1)$$

.

Câu 146. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2+ax+b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2+3x+6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7$. **B.** $a = -1, b = -7$. **C.** $a = -1, b = 7$. **D.** $a = 1, b = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a - b)e^{-x} = f(x)$ nên $\begin{cases} 2-a = 3 \\ a-b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -7 \end{cases}$.

Câu 147. Tìm $F = \int x^n e^x dx$?

A. $F = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n\right] + x^n + C$.

B. $F = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n\right] + C$.

C. $F = n!e^x + C$.

D. $F = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n + e^x + C$.

Hướng dẫn giải

Lưu ý: ta luôn có điều sau $\left[e^x f(x)\right]' = e^x.f(x) + e^x.f'(x) + C = e^x\left[f(x) + f'(x)\right] + C$

$$F = \int e^x\left[(x^n + n.x^{n-1}) - n(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}) + n(n-1)(x^{n-2} + (n-2)x^{n-3}) + ... + n!(-1)^{n-1}(x+1) + n!(-1)^n\right]dx$$

$$\Leftrightarrow F = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n\right]$$

Chọn B

Câu 148. Giả sử $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$ nên

$$\left((ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C\right)'=(3ax^2+2bx+c)e^{2x}+2e^{2x}(ax^3+bx^2+cx+d)$$

$$=\left(2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+c+2d\right)e^{2x}=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}$$

Do đó $\begin{cases}2a=2\\3a+2b=5\\2b+2c=-2\\c+2d=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\\d=3\end{cases}$.

Vậy $a+b+c+d=3$.

Câu 149. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(2017-\dfrac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{2018}{x^4}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{2018}{x^4}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2017\mathrm{e}^x-2018x^{-5}\right)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

Câu 150. Giả sử $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$ nên

$$\left((ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C\right)'=(3ax^2+2bx+c)e^{2x}+2e^{2x}(ax^3+bx^2+cx+d)$$

$$=\left(2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+c+2d\right)e^{2x}=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}$$

Do đó $\begin{cases}2a=2\\3a+2b=5\\2b+2c=-2\\c+2d=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\\d=3\end{cases}$. Vậy $a+b+c+d=3$.

Câu 151. Cho $F(x)=\left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T=a+2b+4c$.

A. $T=-3035$. **B.** $T=1007$. **C.** $T=-5053$. **D.** $T=1011$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $F(x)=\left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ nên ta có: $\left(F(x)\right)'=f(x)$, với mọi $x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow\left(2ax^2+x(2b+2a)-2c+b\right)\mathrm{e}^{2x}=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$, với mọi $x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2b + 2a = -3 \\ -2c + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\dfrac{2021}{2} \\ c = -\dfrac{2023}{4} \end{cases}$.

Vậy $T = a + 2b + 4c = 1009 + 2.\left(-\dfrac{2021}{2}\right) + 4.\left(-\dfrac{2023}{4}\right) = -3035$.

Câu 152. Biết $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(2x^2 - 5x + 2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f\left[F(0)\right]$.

A. $-e^{-1}$. **B.** $20e^2$. **C.** $9e$. **D.** $3e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$F'(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)' e^{-x} + \left(ax^2 + bx + c\right)\left(e^{-x}\right)' = (2ax + b)e^{-x} - \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$

$F'(x) = \left[-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right]e^{-x}$

Vì $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(2x^2 - 5x + 2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right]e^{-x} = \left(2x^2 - 5x + 2\right)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$.

Như vậy $F(x) = \left(-2x^2 + x - 1\right)e^{-x} \Rightarrow F(0) = \left(-2.0^2 + 0 - 1\right)e^{-0} = -1$.

Bởi vậy $f\left[F(0)\right] = f(-1) = \left(2.1^2 + 5.1 + 2\right)e = 9e$.

Câu 153. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + ... + F(2017)$.

A. $T = 1009.\dfrac{2^{2017} + 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2017.2018}$. **C.** $T = \dfrac{2^{2017} - 1}{\ln 2}$. **D.** $T = \dfrac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

Mà $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln 2} + C = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

Khi đó: $T = F(0) + F(1) + F(2) + ... + F(2017)$

$= \dfrac{2^0}{\ln 2} + \dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{2^2}{\ln 2} + ... + \dfrac{2^{2017}}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}.\dfrac{1 - 2^{2018}}{1 - 2} = \dfrac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM ĐỔI BIẾN

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐƯA VÀO VI PHÂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = 2\ln\left(1+x^2\right)+C$.
B. $\int f(x)dx = 3\ln\left(1+x^2\right)+C$.
C. $\int f(x)dx = 4\ln\left(1+x^2\right)+C$.
D. $\int f(x)dx = \ln\left(1+x^2\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\dfrac{2x.dx}{x^2+1}=\int\dfrac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\ln\left|x^2+1\right|+C$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x\left(x^2+1\right)^4$. Biết *F(x)* là một nguyên hàm của $f(x)$ đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(1;6)$. Khi đó *F(x)* là:

A. $F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^4}{4}-\dfrac{2}{5}$.
B. $F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{10}-\dfrac{15}{8}$.
C. $F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{10}+\dfrac{15}{8}$.
D. $F(x)=\dfrac{1}{10}\left(x^2+1\right)^5+\dfrac{14}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $F(x)=\int x\left(x^2+1\right)^4dx=\dfrac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^4d\left(x^2+1\right)=\dfrac{1}{10}\left(x^2+1\right)^5+C$

$M(1;6)\in(C): y=F(x)\Leftrightarrow 6=\dfrac{1}{10}(1+1)^5+C\Leftrightarrow C=\dfrac{14}{5}\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{10}\left(x^2+1\right)^5+\dfrac{14}{5}$

Câu 3. Tính $\int\dfrac{-2x}{1-x^2}dx$ thu được kết quả là:

A. $\dfrac{1+x}{1-x}+C$
B. $\dfrac{x}{1-x}+C$
C. $\dfrac{1}{1-x}+C$
D. $\ln\left|1-x^2\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\dfrac{-2x.dx}{1-x^2}=\int\dfrac{d\left(1-x^2\right)}{1-x^2}=\ln\left|1-x^2\right|+C$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$ là:

A. $2\ln\left|x^2+x+4\right|+C$.
B. $\ln\left|x^2+x+4\right|+C$.
C. $\dfrac{\ln\left|x^2+x+4\right|}{2}+C$.
D. $4\ln\left|x^2+x+4\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}dx=\int\dfrac{d\left(x^2+x+4\right)}{x^2+x+4}=\ln\left|x^2+x+4\right|+C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2+4x-4}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}.\ln\left|x^2+4x-4\right|+C$.
B. $\ln\left|x^2+4x-4\right|+C$.
C. $2\ln\left|x^2+4x-4\right|+C$.
D. $4\ln\left|x^2+4x-4\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int \frac{x+2}{x^2+4x-4}dx = \int \frac{1}{2}.\frac{d\left(x^2+4x+4\right)}{x^2+4x+4} = \frac{1}{2}.\ln\left|x^2+4x-4\right|+C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ là:

A. $2\ln\left|x^2+4\right|+C$
B. $\frac{\ln\left|x^2+4\right|}{2}+C$
C. $\ln\left|x^2+4\right|+C$
D. $4\ln\left|x^2+4\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int \frac{2x}{x^2+4} = \int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} = \ln\left|x^2+4\right|+C$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3\ln\left|x^3+4\right|+C$
B. $-3\ln\left|x^3+4\right|+C$
C. $\ln\left|x^3+4\right|+C$
D. $-\ln\left|x^3+4\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int \frac{3x^2.dx}{x^3+4} = \int \frac{d\left(x^3+4\right)}{x^3+4} = \ln\left|x^3+4\right|+C$

Câu 8. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ là:

A. $\frac{1}{2}\ln|x+1|$
B. $2\ln\left(x^2+1\right)$
C. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
D. $\ln(x^2+1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int \frac{x.dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

Câu 9. Tính $F(x)=\int \frac{x^3}{x^4-1}dx$

A. $F(x) = \ln\left|x^4-1\right|+C$
B. $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+C$
C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|x^4-1\right|+C$
D. $F(x) = \frac{1}{3}\ln\left|x^4-1\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int \frac{x^3}{x^4-1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+C$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 3}$ là:

A. $-\ln\left|\cos x-3\right|+C$
B. $2\ln\left|\cos x-3\right|+C$
C. $-\frac{\ln\left|\cos x-3\right|}{2}+C$
D. $4\ln\left|\cos x-3\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int \frac{\sin x}{\cos x-3}dx = \int \frac{-d\left(\cos x-3\right)}{\cos x-3} = -\ln\left|\cos x-3\right|+C$

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 2+2$. **B.** $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2+2$.

C. $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2-2$. **D.** $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 2-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2+2$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số: $y=sin^2x.cos^3x$ là:

A. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. **B.** $-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

C. $\sin^3 x+\sin^5 x+C$. **D.** $\sin^3 x-\sin^5 x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$$\int\sin^2 x.\cos^3 .dx=\int\left(sin^2x-\sin^4 x\right).\cos x.dx=\int\left(sin^2x-\sin^4 x\right).d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số: $y=sin^3x.cosx$ là:

A. $\frac{1}{4}\cos^4 x+C$. **B.** $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. **C.** $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. **D.** $-\cos^2 x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\sin^3 x.\cos x.dx=\int\sin^3 x.d(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

Câu 14. Tính $\int\cos x.\sin^2 x.dx$

A. $\frac{3\sin x-\sin 3x}{12}+C$ **B.** $\frac{3\cos x-\cos 3x}{12}+C$

C. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$ **D.** $\sin x.\cos^2 x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\cos x.\sin^2 x.dx=\int\sin^2 x.d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C$

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ là:

A. $\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right|+C$ **B.** $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ **C.** $-\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ **D.** $\ln|\sin x|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x.dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{-\sin x.dx}{\cos^2 x-1}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan x$ là:

A. $\ln|\cos x|+C$ **B.** $-\ln|\cos x|+C$ **C.** $\frac{\tan^2 x}{2}+C$ **D.** $\ln(\cos x)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\tan x.dx=\int\frac{\sin x.dx}{\cos x}=-\int\frac{d(cosx)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1-2\sin^2 x}{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|\sin x+\cos x|+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|1+\sin 2x|+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng công thức $1-2\sin^2 x=\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ và $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2$

Hàm số được rút gọn thành $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$

Nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C$

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$ là:

A. $-e^x-3+C$
B. $3e^x+9+C$
C. $-2\ln\left|e^x+3\right|+C$
D. $\ln\left|e^x+3\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\dfrac{e^x}{e^x+3}dx=\int\dfrac{d\left(e^x+3\right)}{e^x+3}=\ln\left|e^x+3\right|+C$

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x2^{x^2}$ là:

A. $\dfrac{1}{\ln 2.2^{x^2}}+C$
B. $\dfrac{1}{\ln 2}.2^{x^2}+C$
C. $\dfrac{\ln 2}{2^{x^2}}+C$
D. $\ln 2.2^{x^2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int 2x.2^{x^2}dx=\dfrac{1}{\ln 2}\int 2x.2^{x^2}.\ln 2=\dfrac{1}{\ln 2}\int d\left(2^{x^2}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}.2^{x^2}+C$

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ là:

A. $\dfrac{-e^x}{2}+C$.
B. $\dfrac{e^{x^2}}{2}+C$.
C. $-e^x+C$.
D. $e^{x^2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int 2x.e^{x^2}dx=\int d\left(e^{x^2}\right)=e^{x^2}+C$.

Câu 21. Tính $\int x.e^{x^2+1}dx$

A. $e^{x^2+1}+C$.
B. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$.
C. $\dfrac{1}{2}e^{x^2+1}+C$.
D. $\dfrac{1}{2}e^{x^2-1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int xe^{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int d(e^{x^2+1})=\dfrac{1}{2}e^{x^2+1}+C$.

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+C$
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$ là :

A. $\ln 2x + C$. **B.** $\ln^2 x + C$. **C.** $\frac{\ln^2 2x}{2} + C$. **D.** $\frac{\ln x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int \frac{\ln 2x}{x} dx = \int \ln 2x . d(\ln 2x) = \frac{\ln^2 2x}{2} + C$.

Câu 24. Nguyên hàm $\int \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x \, (x>0)$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C$. **B.** $x + \ln^2 x + C$. **C.** $\ln^2 x + \ln x + C$. **D.** $x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Câu 25. Tính $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 1}}$

A. $F(x) = 2\sqrt{2\ln x + 1} + C$ **B.** $F(x) = \sqrt{2\ln x + 1} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2\ln x + 1} + C$ **D.** $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2\ln x + 1} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F(x) = \int d(\sqrt{2\ln x + 1}) = \sqrt{2\ln x + 1} + C$.

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là:

A. $\ln^2 x + C$ **B.** $\ln x + C$ **C.** $\frac{\ln^2 x}{2} + C$ **D.** $\frac{\ln x}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x . d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}\ln(x^2+1)$ là:

A. $\frac{1}{2}\ln^2(x^2+1) + \mathrm{C}$ **B.** $\ln(x^2+1) + \mathrm{C}$

C. $\frac{1}{2}\ln^2(x^2+1) + \mathrm{C}$ **D.** $\frac{1}{2}\ln^2(x^2+1) + \mathrm{C}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int \frac{2x}{x^2+1}\ln(x^2+1)dx = \int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{2}\ln^2(x^2+1) + \mathrm{C}$

Câu 28. Tính $\int \frac{dx}{x.\ln x}$

A. $\ln x + C$ **B.** $\ln|x| + C$ **C.** $\ln(\ln x) + \mathrm{C}$ **D.** $\ln|\ln x| + \mathrm{C}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int \frac{dx}{x.\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

Câu 29. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$.

A. $F(x)=2\sqrt{2x-1}$. **B.** $F(x)=2\sqrt{2x-1}+1$.

C. $F(x)=\sqrt{2x-1}+4$. **D.** $F(x)=\sqrt{2x-1}-10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\int\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2x-1}+C$; do $F(5)=7$ nên $6+C=7\Rightarrow C=1$.

Câu 30. Họ nguyên hàm $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)}+C$. **B.** $\frac{3}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)}+C$. **C.** $\frac{3}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$. **D.** $\frac{1}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^4}+C$.

Câu 31. Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$. **B.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=6x\ln(3x-1)+C$.

C. $\int f(3x)\mathrm{d}x=6x\ln(9x-1)+C$. **D.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\ln(9x-1)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1: $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$

$\Rightarrow\int f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int f(3x)\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}2.(3x)\ln(3.3x-1)+C=2x\ln(9x-1)+C$

Cách 2:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C\Rightarrow f(x)=\left(2x\ln(3x-1)+C\right)'=2\ln(3x-1)+\frac{6x}{3x-1}$.

Khi đó $f(3x)=2\ln(9x-1)+\frac{18x}{9x-1}$.

$\int f(3x)\mathrm{d}x=\int\left[2\ln(9x-1)+\frac{18x}{9x-1}\right]\mathrm{d}x=2\int\ln(9x-1)\mathrm{d}x+\int\left(2+\frac{2}{9x-1}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{9}\left[(9x-1)\ln(9x-1)-9x\right]+2x+\frac{2}{9}\ln(9x-1)+C=2\ln(9x-1)+C$.

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐỔI BIẾN SỐ

Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ thì $\int f\left[u(x)\right].u'(x)\mathrm{d}x=F\left[u(x)\right]+C$.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I=\int f(x)\mathrm{d}x$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g\left(u(x)\right)u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t=u(x)$, suy ra $\mathrm{d}t=u'(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G\left[u(x)\right]+C.$

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t=u(x)$.

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 32. Cho $\int f(x)dx=F(x)+C$. Khi đó với a ≠ 0, ta có $\int f(a\,x+b)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a}F(a\,x+b)+C$ **B.** $a.F(a\,x+b)+C$

C. $\frac{1}{a}F(\mathrm{a}\,x+b)+\mathrm{C}$ **D.** $F(\mathrm{a}\,x+b)+\mathrm{C}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I=\int f\left(ax+b\right)dx$ Đặt: $t=ax+b\Rightarrow dt=adx\Rightarrow\frac{1}{a}dt=dx$.

Khi đó: $I=\frac{1}{a}\int f\left(t\right)dt=\frac{1}{a}F\left(t\right)+C$ Suy ra: $I=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$

Câu 33. Hàm số $f(x)=x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x)=\frac{(x-1)^{12}}{12}-\frac{(x-1)^{11}}{11}+C$. **B.** $F(x)=\frac{(x-1)^{12}}{12}+\frac{(x-1)^{11}}{11}+C$.

C. $\frac{(x-1)^{11}}{11}+\frac{(x-1)^{10}}{10}+C$. **D.** $F(x)=\frac{(x-1)^{11}}{11}-\frac{(x-1)^{10}}{10}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\mathrm{I}=\int x.(1-x)^{10}.dx$. Đặt: $t=1-x\Rightarrow -dt=dx\,,x=1-t$.

Khi đó $I=\int(t-1).t^{10}.dt=\int(t^{11}-t^{10}).dt=\frac{1}{12}t^{12}-\frac{1}{11}t^{11}+c$

Suy ra $I=\frac{1}{12}(1-x)^{12}-\frac{1}{11}(1-x)^{11}+C$.

Câu 34. Tính $\int\frac{dx}{(1+x^2)x}$ thu được kết quả là:

A. $\ln|x|\left(x^2+1\right)+C$. **B.** $\ln|x|\sqrt{1+x^2}+C$.

C. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **D.** $\frac{1}{2}.\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\frac{dx}{(1+x^2)x}=\int\frac{xdx}{(1+x^2)x^2}$. Đặt: $t=1+x^2\Rightarrow\frac{1}{2}dt=x.dx\,,x^2=t-1$.

Khi đó: $I=\int\frac{1}{2}.\frac{1}{t.(t-1)}dt=\frac{1}{2}.\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|+C$.

Câu 35. Tính $\int x\left(x+1\right)^3dx$ là :

A. $\frac{\left(x+1\right)^5}{5}+\frac{\left(x+1\right)^4}{4}+C$ **B.** $\frac{\left(x+1\right)^5}{5}-\frac{\left(x+1\right)^4}{4}+C$

C. $\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}+C$ **D.** $\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int x\left(x+1\right)^3dx$ Đặt: $t=x+1\Rightarrow dt=dx\,,x=t-1$

Khi đó: $I=\int\left(t-1\right).t^3.dt=\int\left(t^4-t^3\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C$ Suy ra: $I=\frac{\left(x+1\right)^5}{5}-\frac{\left(x+1\right)^4}{4}+C$

Câu 36. Tìm nguyên hàm $\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **B.** $-\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **C.** $\frac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **D.** $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=x^2+7\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Ta có $\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int t^{15}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{16}}{16} + C = \dfrac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16} + C$.

Câu 37. Xét $I = \int x^3\left(4x^4-3\right)^5\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt: $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \dfrac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$. **B.** $I = \dfrac{1}{12}\int u^5\mathrm{d}u$. **C.** $I = \int u^5\mathrm{d}u$. **D.** $I = \dfrac{1}{4}\int u^5\mathrm{d}u$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $u = 4x^4-3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 16x^3\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{16}\mathrm{d}u = x^3\mathrm{d}x \Rightarrow I = \dfrac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$.

Câu 38. Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với A, $B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\dfrac{23}{252}$. **B.** $\dfrac{241}{252}$. **C.** $\dfrac{52}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = 3x-2 \Rightarrow x = \dfrac{t+2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Ta có: $\dfrac{2}{3}\int \dfrac{t+2}{3}.t^6\mathrm{d}t = \dfrac{2}{9}\int\left(t^7+2t^6\right)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{9}.\dfrac{t^8}{8} + \dfrac{4}{9}.\dfrac{t^7}{7} + C = \dfrac{1}{36}.(3x-2)^8 + \dfrac{4}{63}.(3x-2)^7 + C$.

Suy ra $A = \dfrac{1}{36}$, $B = \dfrac{4}{63}$, $12.\dfrac{1}{36} + 7.\dfrac{4}{63} = \dfrac{7}{9}$.

Câu 39. Giả sử $\int x(1-x)^{2017}\mathrm{d}x = \dfrac{(1-x)^a}{a} - \dfrac{(1-x)^b}{b} + C$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $2a-b$ bằng:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$$\int x(1-x)^{2017}\mathrm{d}x = \int(x-1+1)(1-x)^{2017}\mathrm{d}x = \int\left((1-x)^{2017} - (1-x)^{2018}\right)\mathrm{d}x = -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C$$

Vậy $a = 2019, b = 2018 \Rightarrow 2a-b = 2020$.

Câu 40. Nguyên hàm của $\int \dfrac{x}{x^2+1}dx$ là:

A. $\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$. **B.** $-\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

C. $\dfrac{1}{2}\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \int\dfrac{x}{x^2+1}dx = \ldots = \dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t}dt = \dfrac{1}{2}\ln|t| + C$.

Câu 41. Tính $\displaystyle\int \frac{2x}{\left(x^2+9\right)^4}\mathrm{d}x$ là:

A. $-\dfrac{1}{5\left(x^2+9\right)^5} + C$ **B.** $-\dfrac{1}{3\left(x^2+9\right)^3} + C$

C. $-\dfrac{4}{\left(x^2+9\right)^5} + C$ **D.** $-\dfrac{1}{\left(x^2+9\right)^3} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int \frac{2x}{\left(x^2+9\right)^4}\,\mathrm{d}x$ Đặt: $t=x^2+9 \Rightarrow dt=2x.dx$

Khi đó: $\mathrm{I}=\int \frac{dt}{t^4}=\int t^{-4}.dt=-\frac{1}{3t^3}+C$ Suy ra: $I=-\frac{1}{3\left(x^2+9\right)}+C$

Câu 42. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của $K=\int \frac{(7x-1)^{2017}}{(2x+1)^{2019}}dx$?

A. $\frac{1}{18162}.\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2018}$.

B. $\frac{18162(2x+1)^{2018}+(7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

C. $\frac{-18162(2x+1)^{2018}+(7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

D. $\frac{18162(2x+1)^{2018}-(7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $K=\int \frac{(7x-1)^{2017}}{(2x+1)^{2019}}dx=\int\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(2x+1)^2}dx$

Đặt $t=\frac{7x-1}{2x+1} \Rightarrow dt=\frac{9}{(2x+1)^2}dx \Leftrightarrow \frac{dt}{9}=\frac{1}{(98x+1)^2}dx$

$\Rightarrow K=\frac{1}{9}\int t^{2017}dt=\frac{t^{2018}}{18162}+C=\frac{1}{18162}.\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2018}+C$

Câu 43. Với phương pháp đổi biến số $(x\to t)$, nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2+1}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}t+C$. **C.** t^2+C. **D.** $t+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta đặt: $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+1}dx=...=\int dt=t+C$.

Câu 44. Giả sử $\int \frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1=\left[\left(x^2+3x\right)+1\right]^2$.

Đặt $t=x^2+3x$, khi đó $\mathrm{d}t=(2x+3)\mathrm{d}x$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}+C$.

Trở lại biến x, ta có $\int \frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C$.

Vậy $g(x)=x^2+3x+1$. $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

HÀM CHỨA CĂN THỨC

Câu 45. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{2x+3}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét $I=\int\left(\sqrt{2x+3}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\sqrt{2x+3}=t \Leftrightarrow t^2=2x+3 \Leftrightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

$I=\int t.t\mathrm{d}t=\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+C \Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

Câu 46. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+C$.

B. $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$.

C. $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

D. $F(x)=\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x$. Đặt: $t=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3=x+1 \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int t.3t^2\mathrm{d}t=\int 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Vậy $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Câu 47. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

B. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}2}+\frac{1}{2}$.

D. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}$ suy ra $t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Khi đó $I=\int t.2t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3+C \Rightarrow I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$. Vậy $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

Câu 48. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\sqrt{2x+1}=t \Rightarrow 2x+1=t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Khi đó ta có $\int\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 49. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$ **B.** $F(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$

C. $F(x)=\frac{x^2}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$ **D.** $F(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $I=\int x\sqrt{1+x^2}dx$. Đặt: $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow t.dt=x.dx$

Khi đó: I $=\int t.t.dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C$. Suy ra: I $=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$ là:

A. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$ **B.** $-2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$

C. $\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$ **D.** $\frac{-1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $I=\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2tdt=2xdx$.

Khi đó: I $=\int t.2t.dt=\int 2t^2.dt=\frac{2t^3}{3}+C$. Suy ra: I $=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$.

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$ **B.** $-\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$

C. $2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$ **D.** $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I=\int 2x\sqrt{1-x^2}dx$. Đặt: $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow -2tdt=2xdx$.

Khi đó: I $=\int t.(-2t).dt=\int -2t^2.dt=-\frac{2t^3}{3}+K$. Suy ra: I $=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$.

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt[3]{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{21}\sqrt[3]{(3x-1)^7}+\frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x-1)^5}+C$. **B.** $\frac{1}{18}\sqrt[3]{(3x-1)^6}+\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4}+C$.

C. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x-1)^3}+\sqrt[3]{(3x-1)}+C$. **D.** $\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-1)}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $I=\int x\sqrt[3]{3x-1}dx$. Đặt: $t=\sqrt[3]{3x-1}\Rightarrow t^3=3x-1\Rightarrow t^2.dt=dx$

Khi đó: $I=\int\frac{t^3+1}{3}.t.t^2.dt=\frac{1}{3}\int\left(t^6+t^4\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}\right)+C$

Suy ra $I=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\sqrt[3]{(3x-1)^7}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-1)^5}\right)+C$.

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\sqrt[3]{1-2x}$ là:

A. $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6}+\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12}+C$ **B.** $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8}+\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14}+C$

C. $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6}-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12}+C$ **D.** $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8}-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int 2x\sqrt[3]{1-2x}dx$. Đặt: $t=\sqrt[3]{1-2x}\Rightarrow t^3=1-2x\Rightarrow -\frac{3}{2}t^2.dt=dx$.

Mặt khác: $2x=1-t^3$. Khi đó: I $=-\int(1-t^3)t\frac{3}{2}t^2.dt=-\frac{3}{2}\int(t^3-t^6)dt=-\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)+C$

Suy ra: I $=-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{4}-\frac{\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{7}\right)+C$.

Câu 54. Cho $I=\int x^3\sqrt{x^2+5}dx$, đặt $u=\sqrt{x^2+5}$ khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I=\int(u^4-5u^2)du$. **B.** $I=\int u^2du$. **C.** $I=\int(u^4-5u^3)du$. **D.** $I=\int(u^4+5u^3)du$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow u^2=x^2+5\Rightarrow udu=xdx$

Khi đó: $I=\int x^3\sqrt{x^2+5}dx=\int x^2.x.\sqrt{x^2+5}dx=\int\left(u^2-5\right).u.udu=\int\left(u^4-5u^2\right)du$

Câu 55. Cho $I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}\,dx$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\left(x^2-1\right)dx$.

B. $I=\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

C. $I=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\right|_1^3$.

D. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)\Rightarrow dx=u\,du$, đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$, $x=4\Rightarrow u=3$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_1^3\left(u^2-1\right)u^2du$.

Câu 56. Khi tính nguyên hàm $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u\left(u^2-4\right)du$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)du$. **C.** $\int 2\left(u^2-4\right)du$. **D.** $\int\left(u^2-3\right)du$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\geq 0$ nên $u^2=x+1\Rightarrow\begin{cases}dx=2udu\\x=u^2-1\end{cases}$.

Khi đó $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{u^2-1-3}{u}.2udu=\int 2\left(u^2-4\right)du$.

Câu 57. Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(2\sqrt{x^2+1}+5\right)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa $F(0)=6$. Tính $F\left(\frac{3}{4}\right)$.

A. $\frac{125}{16}$. **B.** $\frac{126}{16}$. **C.** $\frac{123}{16}$. **D.** $\frac{127}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(2\sqrt{x^2+1}+5\right)\mathrm{d}x=\int(2t+5)\mathrm{d}t=t^2+5t+C=\left(x^2+1\right)+5\sqrt{x^2+1}+C$.

$F(0)=6\Rightarrow C=0$. Vậy $F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{125}{16}$.

Câu 58. Tính tích phân: $I=\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** –1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $u=\sqrt{3x+1}\rightarrow x=\frac{u^2-1}{3}\rightarrow dx=\frac{1}{3}2udu$

Đổi cận: $x=1\rightarrow u=2$ $x=5\rightarrow u=4$

Vậy $I=\int_2^4\frac{2}{u^2-1}du=\int_2^4\frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}du=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|_2^4=\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}=2\ln 3-\ln 5$

Do đó $a=2;\ b=-1\rightarrow a+b=1$.

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C$ **B.** $-\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}+C$

C. $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}+C$ **D.** $-\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có : $I=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow -tdt=xdx$

Khi đó: $I=-\int\frac{(1-t^2)}{t}tdt=\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C$.

Thay $t=\sqrt{1-x^2}$ ta được $I=\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3}-\sqrt{1-x^2}+C=-\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C$.

Câu 60. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\sqrt{x^2+1}+C$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$

C. $2\sqrt{x^2+1}+C$ **D.** $4\sqrt{x^2+1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2t.dt=2x.dx$.

Khi đó: I $=\int\frac{2t.dt}{t}=2t+C$. Suy ra: I $=2\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 61. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$ là:

A. $-2\sqrt{4-x^2}+C$. **B.** $4\sqrt{4-x^2}+C$.

C. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C$. **D.** $-4\sqrt{4-x^2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I=\int\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Đặt: $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4-x^2\Rightarrow -4tdt=4xdx$.

Khi đó: $I=\int\frac{-4tdt}{t}=-4t+C\Rightarrow I==-4\sqrt{4-x^2}+C$.

Câu 62. Với phương pháp đổi biến số $(x\to t)$, nguyên hàm $I=\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$ bằng:

A. $\sin t+C$. **B.** $-t+C$. **C.** $-\cos t+C$. **D.** $t+C$.

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi: $I=\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$. Đặt $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

$\Rightarrow I=\int dt=t+C$.

Chọn D

Câu 63. Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\sqrt{2x-3}\Rightarrow t^2=2x-3\Rightarrow dx=tdt$. Khi đó

$$\int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}dx=\int\frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2-30\left(\frac{t^2+3}{2}\right)+7}{t}tdt=\int(5t^4+15t^2+7)dt$$

$=t^5+5t^3+7t+C=\sqrt{(2x-3)^5}+5\sqrt{(2x-3)^3}+7\sqrt{2x-3}+C$

$=(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+5(2x-3)\sqrt{2x-3}+7\sqrt{2x-3}+C=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$

Vậy $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S=a+b+c=3$.

Câu 64. $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị b, a lần lượt bằng:

A. $2;1$. **B.** $1;1$. **C.** $a,b\in\varnothing$ **D.** $1;2$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có: $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ và $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$

* Tìm $I_1=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$.

$I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

* Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$.

Dùng phương pháp đổi biến: Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \ge 0$ ta được $t^2 = x+1,\ 2tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C.$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$

thì $a = 1 \in \mathbb{Q},\ b = 2 \in \mathbb{Q}$. Vậy đáp án chính xác là đáp án **D**

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a, b ở các đáp án vào $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$. Sau đó, với mỗi a, b ở các đáp án A, B, D ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không chú ý đến thứ tự b, a nên học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

B. Đáp án B sai. Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$.

Dùng phương pháp đổi biến: Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \ge 0$ ta được $t^2 = x+1,\ tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C.$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$ thì $a = 1 \in \mathbb{Q},\ b = 1 \in \mathbb{Q}$. Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai. Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$. $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + C_2$.

Suy ra $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ không thể có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Nên không tồn tại a, b thỏa yêu cầu bài toán. Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

Câu 65. Tìm $T=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(x^n+1\right)^{n+1}}}$?

A. $T=\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{-\frac{1}{n}}+C$ **B.** $T=\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}+C$ **C.** $T=\left(x^n+1\right)^{-\frac{1}{n}}+C$ **D.** $T=\left(x^n+1\right)^{\frac{1}{n}}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $T=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(x^n+1\right)^{n+1}}}=\int \frac{dx}{x^{n+1}.\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{n+1}}}=\int \frac{x^{-n-1}}{\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{1+\frac{1}{n}}}dx=\int x^{-n-1}\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{-1-\frac{1}{n}}dx$

Đặt: $t=\frac{1}{x^n}+1\Rightarrow dt=-\frac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$ $\Rightarrow T=-\frac{1}{n}\int t^{-1-\frac{1}{n}}dt=t^{\frac{-1}{n}}+C=\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{\frac{-1}{n}}+C$

Câu 66. Tìm $R=\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$?

A. $R=-\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

B. $R=-\frac{\tan 2t}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

C. $R=\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

D. $R=\frac{\tan 2t}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $x=2\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\begin{cases} dx=-4\sin 2t.dt \\ \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=\sqrt{\frac{2-2\sin 2t}{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\frac{4\sin^2 t}{4\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{\cos t}\end{cases}$

$$\Rightarrow R=-\int \frac{1}{4\cos^2 2t}.\frac{\sin t}{\cos t}.4\sin 2t.dt=-\int \frac{2\sin^2 t}{\cos^2 2t}dt=-\int \frac{1-\cos 2t}{\cos^2 2t}dt$$

$$\Leftrightarrow R=-\int \frac{1}{\cos^2 2t}dt+\int \frac{1}{\cos 2t}dt=-\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$$

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 67. Theo phương pháp đổi biến số với $t=\cos x, u=\sin x$, nguyên hàm của $I=\int(\tan x+\cot x)dx$ là:

A. $-\ln|t|+\ln|u|+C$. **B.** $\ln|t|-\ln|u|+C$.

C. $\ln|t|+\ln|u|+C$. **D.** $-\ln|t|-\ln|u|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int(\tan x+\cot x)dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Xét $I_1=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Rightarrow I_1=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t|+C_1$.

Xét $I_2=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$. Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx\Rightarrow I_2=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C_2$.

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\ln|t| + \ln|u| + C$

Câu 68. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^3 x.\cos x$ và $F(0)=\pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\pi$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$.

$F(x)=\int f(x)dx=\int \sin^3 x\cos x dx=\int t^3 dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

$F(0)=\pi \Rightarrow \frac{\sin^4\pi}{4}+C=\pi \Leftrightarrow C=\pi \Rightarrow F(x)=\frac{\sin^4 x}{4}+\pi.$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin^4\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{1}{4}+\pi.$

Câu 69. Tìm nguyên hàm $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$. Kết quả là

A. $\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2}+C$. **B.** $\sqrt{1+\sin^2 x}+C$. **C.** $-\sqrt{1+\sin^2 x}+C$. **D.** $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Đặt $t=\sqrt{1+\sin^2 x} \Rightarrow t^2=1+\sin^2 x \Rightarrow 2tdt=\sin 2xdx$

$\Rightarrow \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx=\int\frac{2t}{t}dt=\int 2dt=2t+C=2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$

Câu 70. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2 2x.\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ là

A. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+\frac{1}{15}$. **B.** $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

C. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$. **D.** $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{4}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\sin 2x \Rightarrow dt=2.\cos 2xdx \Rightarrow \frac{1}{2}dt=\cos 2xdx$.

Ta có: $F(x)=\int\sin^2 2x.\cos^3 2xdx=\frac{1}{2}\int t^2.(1-t^2)dt=\frac{1}{2}\int(t^2-t^4)dt=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{10}t^5+C$

$=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{15}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

Câu 71. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^5 x$.

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

B. $\int f(x)dx=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \tan^5 x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\sin^2 x.\sin^2 .\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\cos^2 x).(1-\cos^2 x).\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$ $I=\int\frac{(1-t^2).(1-t^2)}{t^5}(-\mathrm{d}t)=\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^5}(-\mathrm{d}t)$

$=\int\left(-\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\left(-t^{-5}+2t^{-3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^{-4}-t^{-2}-\ln|t|+C$

$=\frac{1}{4}\cos x^{-4}-\cos x^{-2}-\ln|\cos x|+C=\frac{1}{4}.\frac{1}{\cos x^4}-\frac{1}{\cos x^2}-\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{4}.(\tan^2 x+1)^2-(\tan^2 x+1)-\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{4}(\tan^4 x+2\tan^2 x+1)-(\tan^2 x+1)-\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+\frac{1}{4}+C$ $=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Câu 72. Theo phương pháp đổi biến số $(x\to t)$, nguyên hàm của $I=\int\frac{2\sin x+2\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}}dx$ là:

A. $2\sqrt[3]{t}+C$. **B.** $6\sqrt[3]{t}+C$. **C.** $3\sqrt[3]{t}+C$. **D.** $12\sqrt[3]{t}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int\frac{2\sin x+2\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}}dx=\int\frac{2(\sin x+\cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}}dx$.

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow dt=(\sin x+\cos x)dx$ $\Rightarrow I=\int\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}dt=2.\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}t^{\frac{1}{3}}+C=6\sqrt[3]{t}+C$.

HÀM MŨ –LÔGARIT

Câu 73. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^{x^3+1}$

A. $\int\left(-t^{-5}+2t^{-3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^{-4}-t^{-2}-\ln|t|+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3e^{x^3+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}e^{x^3+1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=x^3+1\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Do đó, ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3+1}\mathrm{d}x=\int e^t.\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Câu 74. Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

A. $I=x-\ln|1-e^x|+C$. **B.** $I=x+\ln|1+e^x|+C$.

C. $I=-x-\ln\left|1+e^x\right|+C$. **D.** $I=x-\ln\left|1+e^x\right|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x\left(1+e^x\right)}$. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$

$$I=\int\frac{e^x dx}{e^x\left(1+e^x\right)}=\int\frac{dt}{t(1+t)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$

$$=\ln\left|e^x\right|-\ln\left|e^x+1\right|+C=x-\ln\left|e^x+1\right|+C$$

Câu 75. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2e^x+3}$ thỏa mãn $F(0)=10$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(2e^x+3\right)\right)+10+\frac{\ln 5}{3}$. **B.** $F(x)=\frac{1}{3}\left(x+10-\ln\left(2e^x+3\right)\right)$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+\frac{3}{2}\right)\right)+10+\ln 5-\ln 2$. **D.** $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+\frac{3}{2}\right)\right)+10-\frac{\ln 5-\ln 2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{2e^x+3}dx=\int\frac{e^x}{\left(2e^x+3\right)e^x}dx$. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$. Suy ra

$$F(x)=\int\frac{1}{(2t+3)t}dt=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{2t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{e^x}{2e^x+3}\right)+C=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(2e^x+3\right)\right)+C.$$

Vì $F(0)=10$ nên $10=\frac{1}{3}(0-\ln 5)+C\Leftrightarrow C=10+\frac{\ln 5}{3}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(2e^x+3\right)\right)+10+\frac{\ln 5}{3}$.

Câu 76. Với phương pháp đổi biến số $(x\to t)$, nguyên hàm $\int\frac{\ln 2x}{x}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2+C$. **B.** t^2+C. **C.** $2t^2+C$. **D.** $4t^2+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\ln 2x\Rightarrow dt=2.\frac{1}{2x}dx\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$ $\Rightarrow\int\frac{\ln 2x}{x}dx=\ldots=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C$.

Câu 77. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y=2^{\sin x}.2^{\cos x}(\cos x-\sin x)$?

A. $y=2^{\sin x+\cos x}+C$. **B.** $y=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}$ **C.** $y=\ln 2.2^{\sin x+\cos x}$ **D.** $y=-\frac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int 2^{\sin x}.2^{\cos x}(\cos x-\sin x)dx=\int 2^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)dx$.

Đặt: $t=\sin x+\cos x\Rightarrow dt=(\cos x-\sin x)dx$.

$$\Rightarrow I=\int 2^t dt=\frac{2^t}{\ln 2}+C=\frac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}+C.$$

Vậy hàm số đã cho có 1 nguyên hàm là hàm số: $y=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=2^{\sqrt{x}}\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x)=2^{\sqrt{x}}+C$. **B.** $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)+C$.

C. $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}+1\right)+C$. **D.** $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1:** Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2dt=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

$F(x)=\int f(x)dx=\int\dfrac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{\sqrt{x}}dx=\int 2^t 2.\ln 2dt=2.2^t+C=2.2^{\sqrt{x}}+C$ nên A sai.

Ngoài ra:

+ D đúng vì $F(x)=2.2^{\sqrt{x}}+C$.

+ B đúng vì $F(x)=2.2^{\sqrt{x}}-2+C=2.2^{\sqrt{x}}+C'$.

+ C đúng vì $F(x)=2.2^{\sqrt{x}}+2+C=2.2^{\sqrt{x}}+C'$.

Cách 2: Ta thấy B, C, D chỉ khác nhau một hằng số nên theo định nghĩa nguyên hàm thì chúng phải là nguyên hàm của cùng một hàm số. Chỉ còn mình A " lẻ loi" nên chắc chắn sai thì A sai thôi.

Cách 3: Lấy các phương án A, B, C, D đạo hàm cũng tìm được A sai.

Câu 79. Nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}$ là

A. $\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$. **B.** $\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx=\ln|x^2.\ln x|+C$.

C. $\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx=\ln|x+\ln x|+C$. **D.** $\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx=\ln|x.\ln x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $I=\int f(x)dx=\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx$. Đặt $x\ln x=t\Rightarrow(\ln x+1)dx=dt$.

Khi đó ta có $I=\int\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}dx=\int\dfrac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|x.\ln x|+C$

Câu 80. $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\dfrac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\dfrac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a, b lần lượt bằng:

A. $3;1$. **B.** $1;3$. **C.** $3;2$. **D.** $6;1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1:**

Theo đề, ta cần tìm $\int\left((x+1)e^{2(x+1)}+\cos 2x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có:

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)+(7x-3)}+\cos 2x\right)dx.$$

$$=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx+\int\cos 2x\,dx$$

Để tìm $\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx$ và $I_2=\int\cos 2x\,dx$

* Tìm $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx$. Đặt $t=(x+1)^2;dt=2(x+1)(x+1)'dx=2(x+1)dx$.

$I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx=\int\dfrac{1}{2}e^t dt=\dfrac{1}{2}e^t+C_1=\dfrac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

* Tìm $I_2=\int\cos 2x\,dx$. $I_2=\int\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=\dfrac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_2=\dfrac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=3\in\mathbb{Q},\ b=1\in\mathbb{Q}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp loại trừ bằng cách thay lần lượt các giá trị $a,\ b$ ở các đáp án vào $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ và lấy đạo hàm của chúng.

Sai lầm thường gặp

B. Đáp án B sai. Một số học sinh sai lầm ở chỗ không để ý đến thứ tự sắp xếp $b,\ a$ nên khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai. Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_2=\int\cos 2x\,dx$. $I_2=\int\cos 2x\,dx=\sin 2x+C_2$.

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\sin 2x+C_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\sin 2x+C.$$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=3\in\mathbb{Q},\ b=2\in\mathbb{Q}$.

D. Đáp án D sai. Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx$. Đặt $t=(x+1)^2;\ dt=(x+1)(x+1)'\,dx=(x+1)dx$.

$I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx=\int e^t dt=e^t+C_1=e^{(x+1)^2}+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$ nên ta được:

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=e^{(x+1)^2}+C_1+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2=e^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=6\in\mathbb{Q},\ b=1\in\mathbb{Q}$.

Câu 81. Tìm $I=\int\frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx$?

A. $I=x+\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$.

B. $I=x-\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$.

C. $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$.

D. $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}-1\right)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I=\int\frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx=\int\frac{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx=\int dx+\int\frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx$$

Đặt: $t=e^x.\sqrt{x-1}+1\Rightarrow dt=\left(\frac{e^x}{2\sqrt{x-1}}+e^x\sqrt{x-1}\right)dx=\frac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}}dx$

Vậy $I=\int dx+\int\frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x\sqrt{x-1}+1\right)}dx=x+\int\frac{1}{t}dt=x+\ln|t|+C=x+\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$

Câu 82. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}$?

A. $\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

B. $\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

C. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $I=\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx$. Ta có:

$$I=\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx=\int\frac{x\ln\left(1+x^2\right)+2017x}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+\ln e\right]}dx=\int\frac{x\left[\ln\left(1+x^2\right)+2017\right]}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+1\right]}dx$$

Đặt: $t=\ln\left(1+x^2\right)+1\Rightarrow dt=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$$\Rightarrow I=\int\frac{t+2016}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2016}{t}\right)dt=\frac{1}{2}t+1008\ln t+C$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C$$

Câu 83. Tìm $G=\int\frac{2x^2+\left(1+2\ln x\right).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx$?

A. $G=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **B.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$.

C. $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **D.** $G=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

$$G=\int\frac{2x^2+\left(1+2\ln x\right).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx=\int\frac{\left[x^2+2x\ln x+\ln^2 x\right]+x+x^2}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}dx=\int\frac{\left(x+\ln x\right)^2+x\left(x+1\right)}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}dx$$

$$\Leftrightarrow G=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\right)dx=-\frac{1}{x}+\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx=\frac{-1}{x}+J \quad \left(J=\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx\right)$$

Xét nguyên hàm: $J=\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx$

+ Đặt: $t=x+\ln x\Rightarrow dt=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow J=\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{-1}{t}+C=\frac{-1}{x+\ln x}+C$

Do đó: $G=\frac{-1}{x}+J=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$

Câu 84. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}$?

A. $\frac{1}{n}\ln\left|x\right|-\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$. **B.** $\frac{1}{n}\ln\left|x\right|+\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$.

C. $-\frac{1}{n}\ln\left|x\right|+\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$. **D.** $-\frac{1}{n}\ln\left|x\right|-\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|-2016$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

$$L=\int \frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}dx=\int \frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{x^{-n-1}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}dx=\int \frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{\frac{\ln x}{x}\left(1+\frac{\ln^n x}{x^n}\right)}dx$$

Đặt: $t=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow dt=\frac{1-\ln x}{x^2}dx\Rightarrow L=\int \frac{dt}{t\left(t^n+1\right)}=\int \frac{t^{n-1}dt}{t^n\left(t^n+1\right)}$

+ Đặt $u=t^n+1\Rightarrow du=n.t^{n-1}dt$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{n}\int \frac{du}{u\left(u-1\right)}=\frac{1}{n}\int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{n}.\left[\ln\left|u-1\right|-\ln\left|u\right|\right]+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C$$

$$\Leftrightarrow L=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{t^n}{t^n+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\frac{\ln^n x}{x^n}}{\frac{\ln^n x}{x^n}+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\ln^n x}{\ln^n x+x^n}\right|+C.$$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.\ (*)$. Để tính nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x)\mathrm{d}x = u\mathrm{d}v$ (chú ý $\mathrm{d}v = v'(x)\mathrm{d}x$). Sau đó tính $v = \int \mathrm{d}v$ và $\mathrm{d}u = u'.\mathrm{d}x$.

Bước 2. Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v\mathrm{d}u$.

Chú ý: Cần phải lựa chọn và $\mathrm{d}v$ hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v\mathrm{d}u$ dễ tính hơn $\int u\mathrm{d}v$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. u. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x)e^{ax+b}\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = e^{ax+b}\mathrm{d}x \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x)\ln(mx+n)\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ \mathrm{d}v = P(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^x\mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix} \\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \end{cases}$.

DẠNG 1

Câu 1. Tìm $\int x\sin 2x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x\sin x + \cos x + C$ **B.** $\frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

C. $x\sin x + \cos x$ **D.** $\frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I = \int x\sin 2x dx$ Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int vdu = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin x$ là:

A. $F(x) = -x\cos x - \sin x + C$. **B.** $F(x) = x\cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x\cos x + \sin x + C$. **D.** $F(x) = x\cos x + \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I = \int f(x)\mathrm{d}x = \int x\sin x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$I = \int f(x)\mathrm{d}x = \int x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$.

Câu 3. Biết $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = ax\sin 2x + b\cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab = \frac{1}{8}$. **B.** $ab = \frac{1}{4}$. **C.** $ab = -\frac{1}{8}$. **D.** $ab = -\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Khi đó $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{4}$.

Vậy $ab = \frac{1}{8}$.

Câu 4. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$.

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

C. $x\sin x + \cos x + C$.

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Suy ra $a = 1$.

Khi đó $\int g(x)\mathrm{d}x = \int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\sin x = x.\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x.\sin x + \cos x + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của $I = \int x\sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x\sin 2x - \cos 2x) + C$.

B. $\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + C$.

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x - x\sin 2x\right) + C$.

D. Đáp án A và C đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta biến đổi:

$$I = \int x\sin^2 x dx = \int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\int x\cos 2x dx}_{I_1} + C_1$$

$I_1 = \int x\cos 2x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1 = \int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x - x\sin 2x\right) + C = \frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + C$$

Câu 6. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$

A. $I = \frac{(1-2x)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

B. $I = \frac{(2-2x)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

C. $I = \frac{(1-2x)\cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

D. $I = \frac{(2-2x)\cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

Khi đó

$I = \int (x-1)\sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \sin\sqrt{x}dx$

A. $\int \sin\sqrt{x}dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + C$.

B. $\int \sin\sqrt{x}dx = -\cos\sqrt{x} + C$.

C. $\int \sin\sqrt{x}dx = \cos\sqrt{x} + C$.

D. $\int \sin\sqrt{x}dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $\int \sin\sqrt{x}dx = \int 2t\sin t dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = 2dt \\ v = -\cos t \end{cases}$

$\int 2t\sin t dt = -2t\cos t + \int 2\cos t dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$

Câu 8. Nguyên hàm của $I = \int x\sin x\cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x\cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

B. $I_1 = -x\cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

C. $I_1 = x\cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

D. $I_1 = x\cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta đặt: $\begin{cases} u = x \\ du = \sin x\cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ u = -\cos^3 x dx \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \int x\sin x\cos^2 x dx = -x\cos^3 x + \underbrace{\int \cos^3 x dx}_{I_1} + C_1$.

Xét $I_1 = \int \cos^3 x dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$\Rightarrow I_1 = \int (1-t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C_2 \Rightarrow I = -x\cos^3 x + I_1 = -x\cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C$.

Câu 9. Một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$ là :

A. $x\tan x - \ln|\cos x|$

B. $x\tan x + \ln(\cos x)$

C. $x\tan x + \ln|\cos x|$

D. $x\tan x - \ln|\sin x|$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I = \int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$ Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int vdu = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C$

Câu 10. Một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ là :

A. $x\cot x - \ln|\sin x|$

B. $-x\cot x + \ln(\sin x)$

C. $-x\tan x + \ln|\cos x|$

D. $x\tan x - \ln|\sin x|$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I = \int \dfrac{x}{\sin^2 x}dx$. Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int vdu = -x\cot x + \int \cot xdx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$

Câu 11. Cho $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $F(x) = \int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$

Ta lại có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan x) = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x = x\tan x - \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$= x\tan x + \int \dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = x\tan x + \ln|\cos x| + C \Rightarrow F(x) = xf(x) - x\tan x - \ln|\cos x| + C$

Lại có: $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, do đó: $F(x) = xf(x) - x\tan x - \ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a) = af(a) - a\tan a - \ln|\cos a|$

Khi đó $f(a) = \dfrac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a$ và $\dfrac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow |\cos a| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right| - 10a^2 + 3a = \dfrac{1}{2}\ln 10$.

DẠNG 2

Câu 12. Họ nguyên hàm của $\int e^x(1+x)dx$ là:

A. $I = e^x + xe^x + C$. **B.** $I = e^x + \dfrac{1}{2}xe^x + C$.

C. $I = \dfrac{1}{2}e^x + xe^x + C$. **D.** $I = 2e^x + xe^x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I = \int e^x(1+x)dx = \int e^x dx + \int e^x xdx = e^x + C_1 + \underbrace{\int xe^x dx}_{I_1}$.

Xét $I_1 = \int e^x xdx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x \\ v = e^x \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = xe^x - \int xe^x dx \Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{2}xe^x + C_2 \Rightarrow I = e^x + \dfrac{1}{2}xe^x + C$.

Câu 13. Biết $\int xe^{2x}\mathrm{d}x = axe^{2x} + be^{2x} + C$ $(a,\ b \in \mathbb{Q})$. Tính tích ab.

A. $ab = -\dfrac{1}{4}$. **B.** $ab = \dfrac{1}{4}$. **C.** $ab = -\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab = \dfrac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra: $\int xe^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

Vậy: $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow ab = -\dfrac{1}{8}$.

Câu 14. Cho biết $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x}(ax+b)+C$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $a+2b=0$. **B.** $b>a$. **C.** ab. **D.** $2a+b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $u=x \Rightarrow du=dx$, $dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{e^{2x}}{2}$.

Ta có $\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$. Suy ra $a=2$, $b=-1$.

Câu 15. Biết $F(x)=(ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y=(2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int(2x+3)e^x dx=(ax+b)e^x$, nghĩa là: $\left[(ax+b)e^x\right]'=(2x+3)e^x$

$\Leftrightarrow a.e^x+e^x(ax+b)=(2x+3)e^x \Leftrightarrow e^x(ax+a+b)=(2x+3)e^x$

Đồng nhất hệ số ta được: a=2 và b =1. Vậy $a+b=3$.

Câu 16. Biết $\int(x+3).e^{-2x}dx=-\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n)+C$, với $m,n\in\mathbb{Q}$. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=10$. **B.** $S=5$. **C.** $S=65$. **D.** $S=41$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases}u=x+3\\ dv=e^{-2x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=dx\\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{cases}$

Khi đó $\int(x+3).e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3)+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}.e^{-2x}(x+3)-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

$=-\frac{1}{4}e^{-2x}.(2x+6+1)+C=-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7)+C \Rightarrow m=4; n=7$. $S=m^2+n^2=65$.

Câu 17. Tìm nguyên hàm $I=\int(2x-1)e^{-x}dx$.

A. $I=-(2x+1)e^{-x}+C$. **B.** $I=-(2x-1)e^{-x}+C$.

C. $I=-(2x+3)e^{-x}+C$. **D.** $I=-(2x-3)e^{-x}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\ dv=e^{-x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=2dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$.

Ta có $I=-(2x-1)e^{-x}+\int 2.e^{-x}dx=-(2x-1)e^{-x}-2e^{-x}+C=-(2x+1)e^{-x}+C$.

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+1)e^x$ và $F(0)=3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=11e-3$. **B.** $F(1)=e+3$. **C.** $F(1)=e+7$. **D.** $F(1)=e+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $F(x)=\int(5x+1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases}u=5x+1\\ dv=e^x dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=5dx\\ v=e^x\end{cases}$.

$F(x)=(5x+1)e^x-\int 5e^x dx=(5x+1)e^x-5e^x+C=(5x-4)e^x+C$.

Mặt khác $F(0)=3 \Leftrightarrow -4+C=3 \Leftrightarrow C=7 \Rightarrow F(x)=(5x-4)e^x+7$. Vậy $F(1)=e+7$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=(2x-3)e^x$. Nếu $F(x)=(mx+n)e^x$ $(m,n\in\mathbb{R})$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu $m-n$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Tính $\int (2x-3)e^x\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-3 \Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \Rightarrow v=e^x$. Suy ra:

$$\int (2x-3)e^x\mathrm{d}x=(2x-3)e^x-2\int e^x\mathrm{d}x+C=(2x-3)e^x-2e^x+C\ =(2x-5)e^x+C$$

Suy ra: $m=2$; $n=-5$. Vậy $m-n=7$.

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\frac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4-\frac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\frac{15}{\mathrm{e}}-4$. **D.** $\frac{10}{\mathrm{e}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$ khi đó $I=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int \mathrm{e}^t t^2\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} t^2=u \\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u \\ \mathrm{e}^t=v \end{cases} \Rightarrow I=3\left(\mathrm{e}^t t^2-2\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t\right)=3\mathrm{e}^t t^2-6\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$.

Tính $\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases} t=u \\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}t=\mathrm{d}u \\ \mathrm{e}^t=v \end{cases} \Rightarrow \int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t$.

Vậy $\Rightarrow I=3\mathrm{e}^t t^2-6\left(\mathrm{e}^t t-\mathrm{e}^t\right)+C \Rightarrow F(x)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Theo giả thiết ta có

$F(0)=2 \Rightarrow C=-4 \Rightarrow F(x)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)-4 \Rightarrow F(-1)=\frac{15}{\mathrm{e}}-4$.

DẠNG 3

Câu 21. Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x\ln x+x+C$ **B.** Đáp án khác

C. $x\ln x+C$ **D.** $x\ln x-x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I=\int \ln x dx$. Đặt: $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=x \end{cases}$

Khi đó: $I=uv-\int vdu=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$

Câu 22. Nguyên hàm của $I=\int x\ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2}\ln x-\int xdx+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{2}xdx+C$.

C. $x^2\ln x-\int \frac{1}{2}xdx+C$. **D.** $x^2\ln x-\int xdx+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta đặt: $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I=\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{2}xdx$.

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\ln(x+2)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{4}+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\dfrac{x^2-4x}{4}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\ln(x+2)-\dfrac{x^2+4x}{2}+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\dfrac{x^2+4x}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

Suy ra $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x\ln(x+2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\ln(x+2)-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2}{x+2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^2}{2}\ln(x+2)-\dfrac{1}{2}\int\left(x-2+\dfrac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\dfrac{x^2-4x}{2}+C$.

Câu 24. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x)=\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$?

A. $\dfrac{-\ln 2x-x\ln 2}{x+1}+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+1999$.

B. $\dfrac{-\ln x}{x+1}-\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+1998$.

C. $\dfrac{\ln x}{x+1}-\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+2016$.

D. $\dfrac{\ln x}{x+1}+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+2017$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{1}{(x+1)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=\dfrac{-1}{x+1}\end{cases}$

$\Rightarrow S=\dfrac{-\ln x}{x+1}+\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=\dfrac{-\ln x}{x+1}+\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\dfrac{-\ln x}{x+1}++\int\dfrac{1}{x}dx-\int\dfrac{dx}{x+1}$.

$\Leftrightarrow S=\dfrac{-\ln x}{x+1}+\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)+C=\dfrac{-\ln x}{x+1}+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$

Câu 25. Họ nguyên hàm của $I=\int\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}dx$ là:

A. $\cot x.\ln(\cos x)+x+C$.

B. $-\cot x.\ln(\cos x)-x+C$.

C. $\cot x.\ln(\cos x)-x+C$.

D. $-\cot x.\ln(\cos x)+x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta đặt: $\begin{cases}u=\ln(\cos x)\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\tan x dx\\ v=-\cot x\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\cot x.\ln(\cos x)-\int dx=-\cot x.\ln(\cos x)-x+C$.

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

C. $\int f(x)\,dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 1) + C$. **D.** $\int f(x)\,dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I = \int f(x)\,dx = \int \sqrt{x}\ln x.dx$. Đặt: $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2t\,dt = dx$.

$\Rightarrow I = 2\int t^2 \ln t^2.dt = 4\int t^2 \ln t.dt$. Đặt: $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t}dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow I = 2\left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{3}\int t^2 dt\right) = 2\left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 + C\right) = \frac{2}{9}t^3(3\ln t - 1) + C$

$= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln\sqrt{x} - 1) + C = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

Câu 27. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{3}{6}\ln 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1:** Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-3;0)$ và $(0;+\infty)$.

Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+3}dx \\ v = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{x+3}{3x} \end{cases}$ (Chọn $C = -\frac{1}{3}$)

Suy ra: $F(x) = \int \frac{\ln(x+3)}{x^2}dx = -\frac{x+3}{3x}\ln(x+3) + \int \frac{1}{3x}dx = -\frac{x+3}{3x}\ln(x+3) + \frac{1}{3}\ln|x| + C$.

- Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có: $F(-2) = \frac{1}{3}\ln 2 + C_1$; $F(-1) = \frac{2}{3}\ln 2 + C_1$
- Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

$F(1) = -\frac{4}{3}\ln 4 + C_2 = -\frac{8}{3}\ln 2 + C_2$; $F(2) = -\frac{5}{6}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2 + C_2$

Suy ra: $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\ln 2 + C_1\right) + \left(-\frac{8}{3}\ln 2 + C_2\right) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{7}{3}\ln 2$.

Do đó: $F(-1) + F(2) = \left(\frac{2}{3}\ln 2 + C_1\right) + \left(-\frac{5}{6}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2 + C_2\right)$

$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{7}{3}\ln 2 = \frac{10}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5$.

Cách 2: (Tận dụng máy tính)

- Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có:

$F(-1) - F(-2) = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(x+3)}{x^2}dx \approx 0{,}231 \to A$ (lưu vào A)(1)

- Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

$F(2)-F(1)=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x\approx 0,738\to B$ (lưu vào A)(2)

• Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được:

$F(-1)+F(2)-F(-2)-F(1)=A+B\Leftrightarrow F(-1)+F(2)=A+B\approx 0,969$.

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)$?

A. $x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

B. $\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

C. $x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

D. $\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt: $\begin{cases} u=\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) \\ dv=x^3dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{16x}{x^4-16} \\ v=\frac{x^4}{4}-4=\frac{x^4-16}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \int x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx=\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-\int 4x dx=\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2+C$

Câu 29. Tìm $H=\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$?

A. $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$.

B. $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

C. $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$.

D. $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $H=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\frac{x}{\cos x} \\ dv=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\frac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}dx \\ v=-\frac{1}{x\sin x+\cos x} \end{cases}$

$\Rightarrow H=-\frac{x}{\cos x}.\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$

Câu 30. $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Theo đề, ta cần tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có: $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx+\int x\ln x\,dx$.

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ và $I_2=\int x\ln x\,dx$ và tìm I_1,I_2.

* $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến. Đặt $t = \sqrt{x^2+1},\ t \ge 1$ ta được $t^2 = x^2+1,\ xdx = tdt$.
Suy ra:

$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int 2t^2dt = \frac{2}{3}t^3 + C_1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

* $I_2 = \int x\ln x\,dx$.

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$, ta được:

$$I_2 = \int x\ln x\,dx = \int udv = uv - \int vdu$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$
$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{6}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a = 2 \in \mathbb{Q},\ b = 3 \in \mathbb{Q}$.

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Không khuyến khích cách này vì việc tìm đạo hàm của hàm hợp phức tạp và có 4 đáp án nên việc tìm đạo hàm trở nên khó khăn.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai. Một số học sinh không đọc kĩ đề nên chỉ tìm giá trị của b. Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai. Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến. Đặt $t = \sqrt{x^2+1},\ t \ge 1$ ta được $t^2 = x^2+1,\ tdt = 2xdx$.
Suy ra:

$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{6}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a = 1,\ b = 3$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai. Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến. Đặt $t = \sqrt{x^2+1},\ t \ge 1$ ta được $t^2 = x^2+1,\ tdt = 2xdx$.

Suy ra: $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{6}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a = 1 \in \mathbb{Q},\ b = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}$. Học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm do tính sai giá trị của b.

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x)\ln x dx$ bằng:

A. $I = \frac{e^2-3}{2e^2}$. **B.** $I = \frac{2-e^2}{e^2}$. **C.** $I = \frac{e^2-2}{e^2}$. **D.** $I = \frac{3-e^2}{2e^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2}\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Tính $I = \int_1^e f'(x)\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} \ln x = u \\ f'(x)dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$.

Khi đó $I = f(x).\ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{f'(x)}{x}dx = -\frac{1}{x^2}.\ln(x)\Big|_1^e - \frac{1}{2x^2}\Big|_1^e = \frac{e^2-3}{2e^2}$.

Câu 32. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I = \int f(x)dx = \int\left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)dx$. Đặt $\begin{cases} 1+\ln x = u \\ \frac{1}{x^2}dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}dx = du \\ -\frac{1}{x} = v \end{cases}$ khi đó

$$I = -\frac{1}{x}(1+\ln x) + \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 2) + C \Rightarrow a = -1; b = 2.$$

Câu 33. Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1. Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Tính $a + b$?

A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $f'(x)=\dfrac{-3a}{(x+1)^4}+be^x+bxe^x$ nên $f'(0)=-3a+b=-22\ (1)$.

$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[\dfrac{a}{(x+1)^3}+bxe^x\right]\mathrm{d}x=a\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}+b\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x=aI+bJ$.

Tính $I=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}\Big|_0^1=\dfrac{3}{8}$. Tính $J=\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $J=\left(xe^x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x=e^x-e^x\Big|_0^1=1$. Suy ra $\dfrac{3}{8}a+b=5\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}-3a+b=-22\\ \dfrac{3a}{8}+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\ b=2\end{cases}$. Vậy $a+b=10$.

Câu 34. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$. **B.** $a\in\left(0;\dfrac{1}{2018}\right]$. **C.** $a\in[1;2018)$. **D.** $a\in[2018;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x+\int\dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x\ (1)$

• Tính $\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x=e^x\ln(ax)-\int\dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$

• Thay vào (1), ta được: $F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Với $\begin{cases}F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0\\ F(2018)=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\frac{1}{a}}.\ln 1+C=0\\ e^{2018}\ln(a.2018)+C=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\ \ln(a.2018)=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{e}{2018}$.

DẠNG 4

Câu 35. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x\sin x\mathrm{d}x=e^x\cos x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x$. .

B. $\int e^x\sin x\mathrm{d}x=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\mathrm{d}x$. .

C. $\int e^x\sin x\mathrm{d}x=e^x\cos x+\int e^x\cos x\mathrm{d}x$. .

D. $\int e^x\sin x\mathrm{d}x=-e^x\cos x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}\Rightarrow\int e^x\sin x\mathrm{d}x=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\mathrm{d}x$. .

Câu 36. Tìm $J=\int e^x.\sin x dx$?

A. $J=\dfrac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)+C$. **B.** $J=\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$.

C. $J=\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$. **D.** $J=\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x+1)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt: $\begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \sin x.\mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x.dx \\ v_1 = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + T \qquad \left(T = \int e^x.\cos x dx\right)$

Tính $T = \int e^x.\cos x dx$. $\quad T = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J$

$\Rightarrow J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J \Leftrightarrow 2J = e^x\left(\sin x - \cos x\right) \Leftrightarrow J = \dfrac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right) + C$.

TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \; (a<b<c)$ 4. $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \; (k\in\mathbb{R})$

5. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

B. CÂU HỎI TNKQ

ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ BẢNG NGUYÊN HÀM

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^a kf(x)\mathrm{d}x = 0$.

D. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 3. Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục trên K, $a,\ b\in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b kf\left(x\right)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 4. Cho hai số thực a, b tùy ý, $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(b\right)-f\left(a\right)$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(a\right)-F\left(b\right)$. **D.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)+F\left(a\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Theo định nghĩa, ta có $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

Câu 5. Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $c\in\left[a;b\right]$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)-F\left(a\right)+F\left(a\right)-F\left(c\right)=F\left(b\right)-F\left(c\right)=\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng K và $a,b,c\in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Mệnh đề đúng là: $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Cho hàm số $f\left(t\right)$ liên tục trên K và $a,b\in K$, $F\left(t\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(t\right)$ trên K. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $F\left(a\right)-F\left(b\right)=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t=F\left(t\right)\Big|_a^b$.

C. $\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t=\left(\int f\left(t\right)\mathrm{d}t\right)\Bigg|_a^b$. **D.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo định nghĩa ta có: $\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t=F\left(t\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$. Suy ra phương án A sai.

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.
B. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b k\mathrm{d}x = k\left(a-b\right),\ \forall k \in \mathbb{R}$.
D. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x,\ \forall c \in \left(a;b\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\limits_a^b k\mathrm{d}x = kx\Big|_a^b = kb - ka = k\left(b-a\right)$.

Câu 9. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và $a,\ b,\ c$ là ba số bất kỳ trên khoảng K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^a f\left(x\right)dx = 1$.
B. $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = -\int\limits_b^a f\left(x\right)dx$.

C. $\int\limits_a^c f\left(x\right)dx + \int\limits_c^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx,\ c \in \left(a;b\right)$.
D. $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(t\right)dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\int\limits_a^a f\left(x\right)dx = F\left(a\right) - F\left(a\right) = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.
B. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.
D. $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x = 0$.

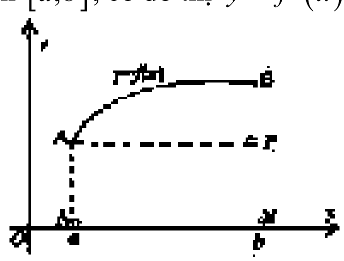
Câu 11. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Khi đó hiệu số $F\left(0\right) - F\left(1\right)$ bằng

A. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.
B. $\int\limits_0^1 -F\left(x\right)\mathrm{d}x$.
C. $\int\limits_0^1 -F\left(x\right)\mathrm{d}x$.
D. $\int\limits_0^1 -f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int\limits_0^1 -f\left(x\right)\mathrm{d}x = -F\left(x\right)\Big|_0^1 = -\left[F\left(1\right) - F\left(0\right)\right] = F\left(0\right) - F\left(1\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$, có đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang $ABMN$.
B. $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ là dộ dài đoạn BP.

C. $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ là dộ dài đoạn MN.
D. $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ là dộ dài đoạn cong AB.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x = f\left(x\right)\Big|_a^b = f\left(b\right) - f\left(a\right) = BM - PM = BP$.

Câu 13. Cho hai tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^{a} g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^{a}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ là:

A. $m-n$. **B.** $n-m$. **C.** $m+n$. **D.** Không thể xác định.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cho hai tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^{a} g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^{a}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ là: $\int_{-a}^{a}\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx - \int_{-a}^{a} g(x)dx = m-n$

Câu 14. Cho tích phân $I_1 = \int_{a}^{b} f(x)dx = m$ và $I_2 = \int_{c}^{a} f(x)dx = n$. Tích phân $I = \int_{c}^{b} f(x)dx$ có giá trị là:

A. $m+n$. **B.** $m-n$. **C.** $-m-n$. **D.** Không thể xác định.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cho tích phân $I_1 = \int_{a}^{b} f(x)dx = m$ và $I_2 = \int_{c}^{a} f(x)dx = n$. Tích phân $I = \int_{c}^{b} f(x)dx$ có giá trị là: Quy tắc "nối đuôi" cho ta: $I = \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{c}^{a} f(x)dx = m+n$.

Câu 15. Tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ được phân tích thành:

A. $\int_{c}^{b} f(x) + \int_{c}^{a} -f(x)dx$. **B.** $\int_{c}^{b} f(x) - \int_{c}^{a} -f(x)dx$.

C. $\int_{c}^{b} f(x) + \int_{c}^{a} f(x)dx$. **D.** $-\int_{c}^{b} f(x) + \int_{c}^{a} f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ được phân tích thành:

Ta có: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{c}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{c} f(x)dx = \int_{c}^{b} f(x)dx - \int_{c}^{a} f(x)dx$.

Câu 16. Cho $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^{1}\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. -9. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I = \int_{-2}^{1}\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1}\mathrm{d}x = 6 - x\big|_{-2}^{1} = 3$.

Câu 17. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2)=2$, $f(3)=5$. Tính $\int_{2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 7. **C.** 10 **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\int_{2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\big|_{2}^{3} = f(3)-f(2) = 3$.

Câu 18. Cho $\int_{a}^{b} f'(x)\mathrm{d}x = 7$ và $f(b)=5$. Khi đó $f(a)$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = 7 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = 7 \Leftrightarrow f(a) = f(b) - 7 = -2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) = -2$, $f(b) = -4$. Tính $T = \int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $T = -6$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $T = \int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = -2$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 2$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5. **B.** 29. **C.** 19. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^3 5f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I = \int\limits_{-1}^3 5f'(x)\mathrm{d}x = 5f(x)\Big|_{-1}^3 = 5f(3) - 5f(-1) = 5.7 - 5.4 = 15$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - 3\ln 2$. Tính $T = a + b$.

A. $T = -1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = -2$. **D.** $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + 2\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{a}{x} + b\ln|x| + 2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = a + 1 + b\ln 2$.

Theo giả thiết, ta có $2 - 3\ln 2 = a + 1 + b\ln 2$. Từ đó suy ra $a = 1$, $b = -3$.

Vậy $T = a + b = -2$.

Câu 24. Tính tích phân $I = \int\limits_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I = \dfrac{4581}{5000}$. **B.** $I = \log\dfrac{5}{2}$. **C.** $I = \ln\dfrac{5}{2}$. **D.** $I = -\dfrac{21}{100}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int_0^3 \frac{dx}{x+2}=\ln|x+2|\Big|_0^3=\ln\frac{5}{2}$.

Câu 25. Tính tích phân $I=\int_1^{2^{2018}}\frac{dx}{x}$.

A. $I=2018.\ln 2-1$. **B.** $I=2^{2018}$. **C.** $I=2018.\ln 2$. **C.** $I=2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\ln|x|\Big|_1^{2^{2018}}=\ln\left(2^{2018}\right)-\ln 1=2018.\ln 2$.

Câu 26. Tính $I=\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)dx$.

A. $2+\ln\sqrt{3}$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1+\ln\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx+3\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^1+3.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 3+2=\ln\sqrt{3}+2.$$

Câu 27. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^{2018}(1+x)dx$

A. $I=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}$. **B.** $I=\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}$.

C. $I=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$. **D.** $I=\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int_0^1 x^{2018}(1+x)dx=\int_0^1\left(x^{2018}+x^{2019}\right)dx=\left(\frac{x^{2019}}{2019}+\frac{x^{2020}}{2020}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1\left(3x^2\right)dx+\int_1^2(4-x)dx=\frac{3x^3}{3}\Bigg|_1^2+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2==\frac{7}{2}.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+1} & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 2x-1 & \text{khi } 1\le x\le 3\end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x)dx$.

A. $6+\ln 4$. **B.** $4+\ln 4$. **C.** $6+\ln 2$. **D.** $2+2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_0^1\frac{2}{x+1}dx+\int_1^3(2x-1)dx$

$$=2\ln|x+1|\Big|_0^1+\left(x^2-x\right)\Big|_1^3=\ln 4+6.$$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^2(4-x)dx=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}6x^2 & \text{khi } x\le 0\\ a-a^2x & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ và $I=\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+22\ge 0$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$I=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}6x^2\mathrm{d}x+\int_0^4(a-a^2x)\mathrm{d}x=2x^3\Big|_{-1}^{0}+\left(ax-\frac{a^2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=2+4a-8a^2$.

$I+22\ge 0\Leftrightarrow 2+4a-8a^2+22\ge 0\Leftrightarrow 2a^2-a-6\le 0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le a\le 2\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a\in\{-1;0;1;2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 32. Biết $\int_a^b(2x-1)\,\mathrm{d}x=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $b-a=1$. **B.** $a^2-b^2=a-b-1$. **C.** $b^2-a^2=b-a+1$. **D.** $a-b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int_a^b(2x-1)\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\Big|_a^b=b^2-b-(a^2-a)$.

Mà $\int_a^b(2x-1)\,\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow b^2-b-a^2+a=1\Leftrightarrow b^2-a^2=b-a+1$.

Câu 33. Đặt $I=\int_1^2(2mx+1)\,\mathrm{d}x$ (m là tham số thực). Tìm m để $I=4$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I=\int_1^2(2mx+1)\,\mathrm{d}x=(mx^2+x)\Big|_1^2=(4m+2)-(m+1)=3m+1$.

$I=4\Leftrightarrow 3m+1=4\Leftrightarrow m=1$.

Câu 34. Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=a$, $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=b$. Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-a-b$. **B.** $b-a$. **C.** $a+b$. **D.** $a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a-b$

Câu 35. Giá trị nào của b để $\int_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=0$?

A. $b=0$ hoặc $b=3$. **B.** $b=0$ hoặc $b=1$ **C.** $b=5$ hoặc $b=0$. **D.** $b=1$ hoặc $b=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=(x^2-6x)\Big|_1^b=(b^2-6b)-(1-6)=b^2-6b+5$.

Theo bài ra, có $b^2-6b+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right.$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị thực của AD để có $\int\limits_0^a (2x+5)\mathrm{d}x = a-4$

A. 1. **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int\limits_0^a (2x+5)\mathrm{d}x = a-4 \Leftrightarrow \left.(x^2+5x)\right|_0^a = a-4\ (H)\ y=\sqrt{x}-1$

Câu 37. Xác định số thực dương m để tích phân $\int\limits_0^m (x-x^2)\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $P=\int\limits_0^m (x-x^2)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^m = \frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3}$.

Đặt $f(m)=\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m)=m-m^2 \Rightarrow f'(m)=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$

Lập bảng biến thiên

m	0		1		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m=1$.

Câu 38. Cho a là số thực thỏa mãn $|a|<2$ và $\int\limits_a^2 (2x+1)\mathrm{d}x = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\limits_a^2 (2x+1)\mathrm{d}x = \left.(x^2+x)\right|_a^2 = 6-a^2-a$. Theo đề: $\begin{cases} |a|<2 \\ 6-a^2-a=4 \end{cases} \Rightarrow a=1$.

Vậy $1+a^3=2$.

Câu 39. Tích phân $I=\int\limits_1^2 2x.dx$ có giá trị là:

A. I = 1. **B.** I =2. **C.** I = 3. **D.** I = 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int\limits_1^2 2x.dx = 2.\int\limits_1^2 x.dx = \left.\left(2.\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = 3$

Câu 40. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 (x^3+3x+2)dx$ có giá trị là:

A. I = 1. **B.** I = 2. **C.** I = 3. **D.** I = 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{-1}^1 (x^3+3x+2)dx = \left.\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\right|_{-1}^1 = 4$.

Câu 41. Cho gá trị của tích phân $I_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+2x^3\right)dx=a$, $I_2=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^2+3x\right)dx=b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

A. $P=-\frac{4}{65}$. **B.** $P=\frac{12}{65}$. **C.** $P=-\frac{12}{65}$. **D.** $P=\frac{4}{65}$.

Hướng dẫn giải

Cho gá trị của tích phân $I_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+2x^3\right)dx=a$, $I_2=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^2+3x\right)dx=b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

Ta có: $I_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+2x^3\right)dx=\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}\Rightarrow a=\frac{2}{5}$.

$I_2=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^2+3x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{13}{6}\Rightarrow b=-\frac{13}{6}\Rightarrow P=\frac{a}{b}=-\frac{12}{65}$. **Chọn C**

Câu 42. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^3+ax+2\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{7}{4}-\frac{a}{2}$. **B.** $I=\frac{9}{4}-\frac{a}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{4}+\frac{a}{2}$. **D.** $I=\frac{9}{4}+\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^3+ax+2\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{7}{4}-\frac{a}{2}$.

Câu 43. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\left(ax^2+bx\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{3}+\frac{b}{3}$. **C.** $I=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. **D.** $I=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{0}^{1}\left(ax^2+bx\right)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$.

Câu 44. Tích phân $I=\int\limits_{2}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}+a^2$. **B.** $I=-\frac{3}{2}-\frac{1}{a}+a^2$. **C.** $I=-\frac{5}{2}-\frac{1}{a}+a^2$. **D.** $I=-\frac{7}{2}-\frac{1}{a}+a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{2}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx=\left(-\frac{1}{x}+x^2\right)\Bigg|_{2}^{a}=a^2-\frac{1}{a}-\frac{7}{2}$.

Câu 45. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{6}$. **C.** $I=-\frac{3}{2}$. **D.** $I=-\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\underbrace{x^2-x}_{f(x)}=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$. Từ bảng xét dấu ta được:

$$I=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(-x^2+x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 46. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-x-1\right|dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{4}{3}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=-\frac{4}{3}$. **D.** $I=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\underbrace{x^3+x^2-x-1}_{f(x)}=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I=\int_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-x-1\right|dx=-\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2-x-1\right)dx=-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Câu 47. Tích phân $I=\int_{-2}^{-1}\frac{\left|x^3-3x+2\right|}{x-1}dx$ có giá trị là:

A. $I=-\frac{7}{6}$. **B.** $I=\frac{17}{6}$. **C.** $I=\frac{7}{6}$. **D.** $I=-\frac{17}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\underbrace{x^3-3x+2}_{f(x)}=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$. Từ bảng xét dấu ta được:

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^2+x-2\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{7}{6}.$$

Câu 48. Tích phân $I=\int_{-2}^{2}\left|\frac{x^2-x-2}{x-1}\right|dx$ có giá trị là:

A. $I=3-2\ln 3$. **B.** $I=-2\ln 3$. **C.** $I=3+2\ln 3$. **D.** $I=3-3\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}\Rightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=2\wedge x\neq 1$ Từ bảng xét dấu ta được:

$$I=\int_{-2}^{0}\left|\frac{x^2-x-2}{x-1}\right|dx=-\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}\right)dx+\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x-2}{x-1}dx.$$

$$I_1=-\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}\right)dx=--\int_{-2}^{-1}\left(x-\frac{2}{x-1}\right)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-2\ln|x-1|\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{5}{2}+2\ln 2-2\ln 3.$$

$$I_2=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}\right)dx=...=\left(\frac{x^2}{2}-2\ln|x-1|\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-2\ln 2\quad\Rightarrow I=I_1+I_2=3-2\ln 3.$$

Câu 49. Tích phân $I=\int_{-2}^{-1}\left(2ax^3+\frac{1}{x}\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=-\frac{15a}{16}+\ln 2$. **B.** $I=\frac{15a}{16}-\ln 2$. **C.** $I=\frac{15a}{16}+\ln 2$. **D.** $I=-\frac{15a}{16}-\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int_{-2}^{-1}\left(2ax^3+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{a}{2}x^4+\ln|x|\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{15a}{16}-\ln 2$.

Câu 50. Biết tích phân $I_1=\int_0^1 2xdx=a$. Giá trị của $I_2=\int_a^2\left(x^2+2x\right)dx$ là:

A. $I_2=\frac{17}{3}$. **B.** $I_2=\frac{19}{3}$. **C.** $I_2=\frac{16}{3}$. **D.** $I_2=\frac{13}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I_1=\int_0^1 2xdx=\left(x^2\right)\Big|_0^1=1\Rightarrow I_2=\int_a^2\left(x^2+2x\right)dx=\int_1^2\left(x^2+2x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{16}{3}$.

Câu 51. Cho tích phân $I=\int_a^b\left(x^2+1\right)dx$. Khẳng định nào dưới đây không đúng?

A. $I=\int_a^b\left(x^2+1\right)dx=\int_a^b x^2dx+\int_a^b dx$.

B. $I=\left(x^3+x\right)\Big|_a^b$.

C. $I=\frac{1}{3}b^3+b-\frac{1}{3}a^3-a$.

D. Chỉ có A và C đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_a^b\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_a^b=\frac{1}{3}b^3+b-\frac{1}{3}a^3-a$.

Phát biểu (A): đúng. Phát biểu (B): sai.
Phát biểu (C): đúng. Phát biểu (D): đúng.

Câu 52. Số nghiệm nguyên âm của phương trình: $x^3-ax+2=0$ với $a=\int_1^{3e}\frac{1}{x}dx$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Số nghiệm nguyên âm của phương trình: $x^3-ax+2=0$ với $a=\int_1^{3e}\frac{1}{x}dx$ là:

Ta có: $a=\int_1^{3e}\frac{1}{x}dx=\left(\ln|x|\right)\Big|_1^{3e}=3\Rightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$.

Câu 53. Số nghiệm dương của phương trình: $x^3+ax+2=0$, với $a=\int_0^1 2xdx$, a và b là các số hữu tỉ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Số nghiệm dương của phương trình: $x^3+ax-2=0$, với $a=\int_0^1 2xdx$ là:

Ta có: $a=\int_0^1 2xdx=\left(x^2\right)\Big|_0^1=1\Rightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k(2x-1)\mathrm{d}x=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. \

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int_1^k(2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^k(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)=\frac{(2x-1)^2}{4}\Bigg|_1^k=\frac{(2k-1)^2}{4}-\frac{1}{4}$

Mà $4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=2$

Khi đó: $\int_1^k(2x-1)\mathrm{d}x=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\Leftrightarrow\frac{(2k-1)^2-1}{4}=2\Leftrightarrow(2k-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\k=-1\end{array}\right.$.

Câu 55. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 1 $\quad +\infty$
$1+x$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \vert \quad$ $+$
$1-x$	$+$ $\quad \vert \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $-$
$f(x)$	-2 $\quad 2x \quad$ 2

Ta có: $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(1)=F(2)-3$ mà $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 2\mathrm{d}x=2$ nên $F(2)=5$.

➢ $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1)-F(0)=3-F(0)$ mà $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1$ nên $F(0)=2$.

➢ $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = F(0)-F(-1)=2-F(-1)$ mà $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_{-1}^0=-1$ nên $F(-1)=3$.

➢ $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = F(-1)-F(-3)=3-F(-3)$ mà $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1} -2\mathrm{d}x=-4$ nên $F(-3)=7$.

Vậy $F(0)+F(2)+F(-3)=2+5+7=14$.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn $\int_0^2 \left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=-2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có:

$\int_0^2 \left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=-2 \Leftrightarrow \left(x-n^2x+x^2+x^3+x^4+...+x^n\right)\Big|_0^2=-2$

$\Leftrightarrow 2-2n^2+2^2+2^3+2^4+...+2^n=-2 \Leftrightarrow 1+2+2^2+...+2^{n-1}=n^2+1$

$\Leftrightarrow 2^n-1=n^2+1 \Leftrightarrow 2^n-n^2-2=0$.

Thử với các giá trị $n\in\{1;2;3;4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 5$ ta chứng minh $2^n>n^2+2$ (1). Dễ thấy $n=5$ thì (1) đúng.

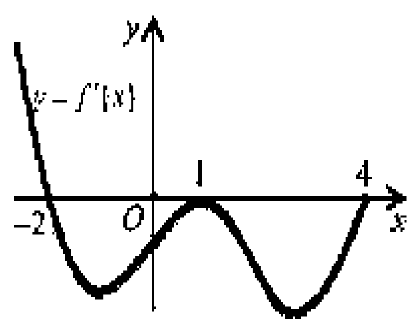
Giả sử (1) đúng với $n=k$ với $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 5$. Khi đó $2^k>k^2+2$.

Khi đó: $2^{k+1}>2\left(k^2+2\right)=k^2+k^2+2+2>k^2+2k+1+2=(k+1)^2+2$.

Do đó (1) đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1}|f'(x)|\mathrm{d}x=9$ và $\int_{1}^{4}|f'(x)|\mathrm{d}x=12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^{1}|f'(x)|\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_{-2}^{1}=-f(-1)+f(-2)$

$\Rightarrow -f(1)+f(-2)=9$. Tương tự ta có $-f(4)+f(1)=12$.

Như vậy $[-f(1)+f(-2)]-[-f(4)+f(1)]=-3 \Leftrightarrow f(-2)+f(4)-2f(1)=-3$

$\Leftrightarrow f(-2)+f(4)-6=-3 \Leftrightarrow f(-2)+f(4)=3$.

Câu 58. Cho $I=\int_{0}^{2}(2x^2-x-m)\mathrm{d}x$ và $J=\int_{0}^{1}(x^2-2mx)\mathrm{d}x$. Tìm điều kiện của m để $I\le J$.

A. $m\ge 3$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $I=\int_{0}^{2}(2x^2-x-m)\mathrm{d}x=\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-mx\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{10}{3}-2m$.

$J=\int_{0}^{1}(x^2-2mx)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-mx^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}-m$. Do đó $I\le J \Leftrightarrow \frac{10}{3}-2m\le\frac{1}{3}-m \Leftrightarrow m\ge 3$

Câu 59. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}$ (với a, b, $c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. $P=-\frac{3}{4}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=\frac{4}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int_{0}^{d}f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_{0}^{d}=\frac{a}{3}d^3+\frac{b}{2}d^2+cd$.

Do đó: $\begin{cases}\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\\ \int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-2\\ \int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$. Vậy $P=a+b+c=-\frac{4}{3}$

TÍCH PHÂN HỮU TỈ

Câu 60. Biết $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x-5}{2x+2}\mathrm{d}x=a+\ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab=\frac{8}{81}$. **B.** $a+b=\frac{7}{24}$. **C.** $ab=\frac{9}{8}$. **D.** $a+b=\frac{3}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x-5}{2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(1-\frac{6}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x-6\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{2}\left(1-6\ln 2-\frac{1}{3}+6\ln\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}+\ln\frac{8}{27}$. Vậy $ab=\frac{1}{3}.\frac{8}{27}=\frac{8}{81}$.

Câu 61. Tích phân $I=\int_0^1 \frac{2ax}{x+1}dx=\ln 2$. Giá trị của a là:

A. $a=\frac{\ln 2}{1-\ln 2}$. **B.** $a=\frac{\ln 2}{2-2\ln 2}$. **C.** $a=\frac{\ln 2}{1+\ln 2}$. **D.** $a=\frac{\ln 2}{2+2\ln 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_0^1 \frac{2ax}{x+1}dx = 2a\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = 2a\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = 2a\left(1-\ln 2\right)$.

Mà $I=\ln 2 \Leftrightarrow 2a\left(1-\ln 2\right)=\ln 2 \Leftrightarrow a=\frac{\ln 2}{2-2\ln 2}$.

Câu 62. Cho $I=\int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2}dx=\left(a-b\right)\ln 2+b\ln 3$. Giá trị $a+b$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{3-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln|x+1|-\ln|x-3|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3 \Rightarrow a=b=\frac{1}{4}\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

Câu 63. Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln b\ \left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Gọi $S=2a+b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây

A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x+1\right)\right)\Big|_0^2=\ln 3=a+\ln b\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=3.$$

Vậy $S\in\left(2;4\right)$.

Câu 64. Tích phân $I=\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3$. **B.** $I=\frac{10}{3}-\ln 2+\ln 3$.

C. $I=\frac{10}{3}-\ln 2-\ln 3$. **D.** $I=\frac{10}{3}+\ln 2+\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$I=\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx=\int_1^2\left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{8}{3}+2-\ln 3-\left(\frac{1}{3}+1-\ln 2\right)=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3$$

Câu 65. Nhận xét: Không thể dùng máy tính để tính ra kết quả như trên mà ta chỉ có thể dùng để kiểm tra mà Tích phân $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=\frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx=\left(-\frac{1}{x}+x^2\right)\Big|_1^2=\frac{7}{2}$.

Câu 66. Tích phân $I=\int_0^1\left(\frac{ax}{x+1}-2ax\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=-a\ln 2$. **B.** $I=-2\ln 2$. **C.** $I=2\ln 2$. **D.** $I=a\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$I=\int_0^1\left(\frac{ax}{x+1}-2ax\right)dx=a\int_0^1\frac{x}{x+1}dx-2a\int_0^1 xdx=a\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1-a\left(x^2\right)\Big|_0^1=a\left(1-\ln 2\right)-a=-a\ln 2$

Câu 67. Tích phân $I=\int_1^a\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)dx$,với $a\neq 0$ có giá trị là:

A. $I=a\ln|a|+\frac{a^2+1}{2a}$. **B.** $I=a\ln a+\frac{a^2+1}{2a}$.

C. $I=a\ln|a|+\frac{a^2-1}{2a}$. **D.** $I=a\ln a+\frac{a^2-1}{2a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int_1^a\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)dx=\left(a\ln|x|+\frac{x^2}{2a}\right)\Big|_1^a=a\ln|a|+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}=a\ln|a|+\frac{a^2-1}{2a}$.

Câu 68. Tích phân $I=\int_2^3\frac{a^2x^2+2x}{ax}dx$ có giá trị nhỏ nhất khi số thực dương a có giá trị là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int_2^3\frac{a^2x^2+2x}{ax}dx=\int_2^3\left(ax+\frac{2}{a}\right)dx=\left(\frac{a}{2}x^2+\frac{2}{a}x\right)\Big|_2^3=\frac{5a}{2}+\frac{2}{a}$

Vì a là số thực dương nên $I=\frac{5a}{2}+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{\frac{5a}{2}.\frac{2}{a}}=2\sqrt{5}$.

Câu 69. Tích phân $I=\int_1^2\left(ax^2+\frac{b}{x}\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{7}{3}a-b\ln 2$. **B.** $I=3a-b\ln 2$. **C.** $I=\frac{7}{3}a+b\ln 2$. **D.** $I=3a+b\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int_1^2\left(ax^2+\frac{b}{x}\right)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+b\ln|x|\right)\Big|_1^2=\frac{7a}{3}+b\ln 2$.

Câu 70. Tích phân $I=\int_{-1}^1\left(ax^3+\frac{b}{x+2}\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=-b\ln 3$. **B.** $I=\frac{a}{2}-b\ln 3$. **C.** $I=\frac{a}{2}+b\ln 3$. **D.** $I=b\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{-1}^{1}\left(ax^3+\dfrac{b}{x+2}\right)dx=\left(\dfrac{a}{4}x^4+b\ln|x+2|\right)\Bigg|_{-1}^{1}=b\ln 3$.

Câu 71. Tích phân $I=\int\limits_{e}^{e^2}\dfrac{x+1}{x^2}dx$ có giá trị là:

A. $I=1-\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}$. **B.** $I=1-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}$. **C.** $I=1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}$. **D.** $I=1+\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{e}^{e^2}\dfrac{x+1}{x^2}dx=\int\limits_{e}^{e^2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln|x|-\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_{e}^{e^2}=1+\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}$.

Câu 72. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x}{x+1}dx=a$. Biểu thức $P=2a-1$ có giá trị là:

A. $P=1-\ln 2$. **B.** $P=2-2\ln 2$. **C.** $P=1-2\ln 2$. **D.** $P=2-\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x}{x+1}dx=\int\limits_{0}^{1}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_{0}^{1}=1-\ln 2\Rightarrow a=1-\ln 2\Rightarrow P=2a-1=1-2\ln 2$

Câu 73. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{e}^{e^2}\left(\dfrac{1+x+x^2}{x}\right)dx=a$. Biểu thức $P=a-1$ có giá trị là:

A. $P=e+\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}e^4$. **B.** $P=-e+\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}e^4$.

C. $P=-e-\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}e^4$. **D.** $P=e+\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}e^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int\limits_{e}^{e^2}\left(\dfrac{1+x+x^2}{x}\right)dx=\int\limits_{e}^{e^2}\left(\dfrac{1}{x}+1+x\right)dx=\left(\ln|x|+x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{e}^{e^2}=1-e+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{2}$.

$\Rightarrow a=1-e+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{2}\Leftrightarrow a-1=-e+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{2}\Leftrightarrow P=-e+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{2}$.

Câu 74. Biết $I=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{2}{3}+b$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị $a+2b$.

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có:

$I=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(3x+11+\dfrac{21}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{3x^2}{2}+11x+21\ln|x-2|\right)\Bigg|_{-1}^{0}=21.\ln\dfrac{2}{3}+\dfrac{19}{2}$.

Vậy $a+2b=40$.

Câu 75. Tính tích phân: $I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=2\ln 2$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=\dfrac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x+\ln x\right)\Big|_{1}^{2}=1+\ln 2$.

Câu 76. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-9}$.

A. $I=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{6}\ln 2$. **D.** $I=\ln\sqrt[6]{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-9}=I=\frac{1}{6}\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$.

Câu 77. Biết $I=\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}$. Ta có: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Khi đó:

$I=\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}=\int_3^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\big|_3^4=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra: $a=4,b=-1,c=-1$. Vậy $S=2$.

Câu 78. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}dx=a\ln 5+b\ln 2\ (a,b\in Z)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $2a-b=0$. **C.** $a-b=0$. **D.** $a+b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}dx=\int_1^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\left(\ln|x|-\ln|x+3|\right)\Big|_1^5=\ln 5-\ln 2\ \Rightarrow a=1$ và $b=-1$.

Ta có: $a+b=0$.

Câu 79. Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx=a\ln 5+b\ln 3;\ a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=ab$.

A. $P=8$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=-5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx=\int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+3)}dx=\int_0^2\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx=\left(-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2=2\ln 5-3\ln 3$

Suy ra:. Do đó: $P=ab=-6$.

Câu 80. Cho giá trị của tích phân $a=2,b=-3$ $I_1=\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}dx=a$, $I_2=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=b$. Giá trị của biểu thức $P=a-b$ là:

A. $P=\frac{7}{2}+\ln 2-\ln 3$. **B.** $P=\frac{3}{2}+\ln 2-\ln 3$.

C. $P=\frac{5}{2}+\ln 2-\ln 3$. **D.** $P=\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$I_1=\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}dx=\int_1^2\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}+\ln 2-\ln 3\Rightarrow a=\frac{5}{2}+\ln 2-\ln 3$

$I_2=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=\left(\ln|x|\right)\Big|_e^{e^2}=1\Rightarrow b=1$. $P=a-b=\frac{3}{2}+\ln 2-\ln 3$.

Câu 81. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+x-2}dx$ gần nhất với gái trị nào sau đây?

A. $-\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\ln 2-1$. **C.** $\frac{3}{2}-\ln 4$. **D.** $-\frac{\ln 3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+x-2}dx$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x+2)}dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2-2x-2}{x+2}dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^{0}=6\ln 2-\frac{9}{2}$$

Câu 82. Tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{ax+1}{x^2+3x+2}dx=\frac{3}{5}\ln\frac{4}{3}+\frac{3}{5}\ln\frac{2}{3}$. Giá trị của a là:

A. $a=\frac{1}{5}$. **B.** $a=\frac{2}{5}$. **C.** $a=\frac{3}{5}$. **D.** $a=\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{ax+1}{x^2+3x+2}dx=a\int\limits_{1}^{2}\frac{x}{x^2+3x+2}dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2+3x+2}dx$.

Xét $I_1=a\int\limits_{1}^{2}\frac{x}{x^2+3x+2}dx=a\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=a\left(2\ln|x+2|-\ln|x+1|\right)\Big|_{1}^{2}$

$=a(2\ln 4-3\ln 3+\ln 2)=2a\ln\frac{4}{3}+a\ln\frac{2}{3}$.

Xét $I_2=\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2+3x+2}dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_{1}^{2}=-\ln\frac{4}{3}-\ln\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow I=I_1+I_2=(2a-1)\ln\frac{4}{3}+(a-1)\ln\frac{2}{3}$ Theo đề bài: $I=\frac{3}{5}\ln\frac{4}{3}+\frac{3}{5}\ln\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{4}{5}$.

Câu 83. Tích phân $I=\int\limits_{1}^{a}\frac{x^2+1}{x^3+3x}dx=\frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$. Giá trị của a là:

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int\limits_{1}^{a}\frac{x^2+1}{x^3+3x}dx\Rightarrow\frac{1}{3}\int\limits_{4}^{a^3+3a}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{3}\left(\ln|t|\right)\Big|_{4}^{a^3+3a}=\frac{1}{3}\ln\frac{a^3+3a}{4}$, với $t=x^3+3x$.

Theo đề bài: $\frac{1}{3}\ln\frac{a^3+3a}{4}=\frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}\Leftrightarrow a^3+3a-14=0\Leftrightarrow(a-2)(a^2+2a+7)=0\Leftrightarrow a=2$.

Câu 84. Biết $\int\frac{x+1}{(x-1)(2-x)}\mathrm{d}x=a.\ln|x-1|+b.\ln|x-2|+C$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$

.

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=-5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. $\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\Leftrightarrow -x-1=A(x-2)+B(x-1)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\-2A-B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-3\end{cases}$.

Nên: $\int\frac{x+1}{(x-1)(2-x)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=2\ln|x-1|-3\ln|x-2|+C$.

Vậy $a=2, b=-3$. Vậy $a+b=-1$.

Câu 85. Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx = 3\ln\frac{a}{b}-\frac{5}{6}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính ab ta được kết quả.

A. $ab=-5$. **B.** $ab=27$. **C.** $ab=6$. **D.** $ab=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx = \int_0^1 \frac{3x-1}{(x+3)^2}dx$ Đặt $t=x+3 \Rightarrow dt=dx; x=t-3$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=3; x=1 \Rightarrow t=4$. Khi đó:

$$K=\int_0^1 \frac{3x-1}{(x+3)^2}dx = \int_3^4 \frac{3(t-3)-1}{t^2}dt = \int_3^4 \left(\frac{3}{t}-\frac{10}{t^2}\right)dt = \left(3\ln|t|+\frac{10}{t}\right)\Big|_3^4$$

$$=3\ln 4-3\ln 3-\frac{5}{6}=3\ln\frac{4}{3}-\frac{5}{6} \Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow a.b=12.$$

Câu 86. Biết $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}dx = a\ln 7+b\ln 3+c$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $T=a+2b^2+3c^3$.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=3$. **D.** $T=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}dx = \int_2^3 \left(1-\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = \left(x-\ln\left|x^2-x+1\right|\right)\Big|_2^3 = -\ln 7+\ln 3+1, \text{ suy ra } \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}.$$

Vậy $T=a+2b^2+3c^3=4$.

Câu 87. Giả sử $I=\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a.\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó giá trị $a+2b$ là:

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$I=\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = \int_{-1}^0 \left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2}+11x+21\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^0 = 21\ln\frac{2}{3}+\frac{19}{2}$$

Câu 88. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}dx = a\ln 5+b\ln 2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $2a-b=0$. **C.** $a-b=0$. **D.** $a+b=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx = (\ln|x|-\ln|x+3|)\Big|_1^5 = \ln 5-\ln 2.$$ Vậy $a=1, b=-1$.

Câu 89. Nếu $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1}dx = a\ln 5+b\ln 3+3\ln 2$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ thì giá trị của $P=2a-b$ là

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\frac{15}{2}$. **D.** $P=\frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$$\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1}dx = \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx + \frac{11}{4}\int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1}dx$$

$= \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}\left(2x^2-3x+1\right) + \frac{11}{4}\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(2x-1)}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3x+1\right|\Big|_2^3 + \frac{11}{4}\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3x+1\right|\Big|_2^3 + \frac{11}{4}\ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{4}(\ln 10-\ln 3)+\frac{11}{4}\left(\ln\frac{2}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{4}\ln\frac{10}{3}+\frac{11}{4}\ln\frac{6}{5} = \frac{1}{4}(\ln 5+\ln 2-\ln 3)+\frac{11}{4}(\ln 2+\ln 3-\ln 5) = -\frac{5}{2}\ln 5+\frac{5}{2}\ln 3+3\ln 2.$

Do đó $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $P=-\frac{15}{2}$.

Câu 90. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = m\ln 2+n\ln 3+p\ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S=m^2+n+p^2$.

A. $S=6$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{2x+4-(x+1)}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$

$= \int_1^3\left[\frac{2x+4}{(x+2)(x+1)}-\frac{x+1}{(x+2)(x+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \int_1^3 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x - \int_1^3 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = 2\ln(x+1)\Big|_1^3 - \ln(x+2)\Big|_1^3 = 2\ln 4-2\ln 2-(\ln 5-\ln 3)$

$= 2\ln\left(\frac{4}{2}\right)-\ln 5+\ln 3 = 2\ln 2+\ln 3-\ln 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow S=2^2+1+(-1)^2=6.$

Câu 91. Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = a+\ln b$ với a, $b\in\mathbb{Z}$, $b>0$. Hỏi giá trị $2a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^2 = \ln 3$

$\Rightarrow a=0$, $b=3 \Rightarrow 2a+b=3$.

Câu 92. Biết $I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: $I=\int_3^4 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \ln\frac{x}{x+1}\Big|_3^4 = \ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4} = 4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra $a=4, b=c=-1 \Rightarrow S=2$.

Cách 2: Ta có:

$I=\int_3^4 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_3^4 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln 4-\ln 3-\ln 5+\ln 4 = 4\ln 2-\ln 3-\ln 5$

Suy ra $a=4, b=c=-1 \Rightarrow S=2$.

Câu 93. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7;3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x^2-x-1=0$. **B.** $x^2+4x-12=0$. **C.** $x^2-5x+6=0$. **D.** $x^2-9=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$\int_1^2 \frac{dx}{4x^2-4x+1} = \int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-1)^{-2}\,d(2x-1) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{1}{-6}+\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} a=-6 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \end{cases}$ và a, b là nghiệm của phương trình $x^2+4x-12=0$.

Câu 94. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_3^5 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = \frac{25}{2}+\ln 6-\frac{9}{2}-\ln 4 = 8+\ln\frac{3}{2}$.

Vậy $a=8$, $b=3$. Suy ra $S=a-2b=8-2.3=2$.

Câu 95. Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức $2a+3b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x+2|-\ln|x+4|\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7+\frac{1}{2}\ln 2.$$

Khi đó: $2a+3b-c = 2.\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$.

Câu 96. Tìm giá trị của a để $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \ln a$.

A. 12. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_3^4 = \ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\right) = \ln\frac{4}{3} = \ln a$$

$\Rightarrow a=\frac{4}{3}$

Câu 97. Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$

Do đó $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2,\ b = -1$. Vậy $a + 2b = 0$.

Câu 98. Biết $\int\limits_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A + 2B}{x^2+5x+6}$.

$\begin{cases} A + B = 5 \\ 3A + 2B = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$.

Nên $\int\limits_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{2}{x+2}\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 \frac{3}{x+3}\mathrm{d}x = 2\ln|x+2|\Big|_2^3 + 3\ln|x+3|\Big|_2^3$

$= 3\ln 6 - \ln 5 - 2\ln 4 = -4\ln 2 - \ln 5 + 3\ln 6$. Vậy $S = 3a + 2b + c = -11$.

Câu 99. Cho $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x+2| - \ln|x+3|\right)\Big|_1^2$

$= (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 2\ln 4 - \ln 3 - \ln 5 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Vậy $a + b + c = 4 + (-1) + (-1) = 2$.

Câu 100. Biết $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x = \ln\left|(x-1)^m (x-2)^n (x-3)^p\right| + C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ -5A - 4B - 3C = 0 \\ 6A + 3B + 2C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -5 \\ C = 5 \end{cases}$.

Suy ra $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$

$= \ln\left|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5\right| + C$. Vậy $4(m+n+p) = 4$.

Câu 101. Cho $\int\limits_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 5$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$. **B.** $a-2b=11$. **C.** $a-b=5$. **D.** $a+2b=11$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1|\Big|_2^3 - 2\ln|x+2|\Big|_2^3 = 7\ln 2 - 2\ln 5$.

Suy ra $\begin{cases} a=7 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-2b=11$.

Câu 102. Biết $\int\limits_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}+b\ln\frac{3}{2}$ $(a,b>0)$ tìm các giá trị của k để $\int\limits_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$. **B.** $k\neq 0$. **C.** $k>0$. **D.** $k\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_8^{ab}\mathrm{d}x = \int\limits_8^9 \mathrm{d}x = 1$

Mà $\int\limits_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int\limits_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1<k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k\neq 0$.

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

Câu 103. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I=\int\limits_0^2\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{13}{3}$.

Câu 104. Biết rằng $I_1=\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x+1}\right)dx = \frac{a}{6}+b\sqrt{2}$. Giá trị của $a-\frac{3}{4}b$ là:

A. – 1. **B.** – 2. **C.** – 3. **D.** – 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$I_1=\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a=-1, b=\frac{4}{3} \Rightarrow a-\frac{3}{4}b=-2$.

Câu 105. Tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $I=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $I=2\sqrt{2}$. **C.** $I=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $I=2-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx=\sqrt{x+2}\Big|_0^2=2-\sqrt{2}$.

Câu 106. Cho $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a\sqrt{b}-\frac{8}{3}\sqrt{a}+\frac{2}{3}$, $\left(a,b\in\mathbb{N}^*\right)$. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=7$. **B.** $a+2b=8$. **C.** $a+2b=-1$. **D.** $a+2b=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{(x+1)^3}\right)\Bigg|_0^1=2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}.$$

Do đó $a=2$, $b=3$, $a+2b=8$.

Câu 107. Biết tích phân $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T=a+b$

.

A. $T=-10$. **B.** $T=-4$. **C.** $T=15$. **D.** $T=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D . $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_0^1\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{16}{9}-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{9}-\sqrt{3}=\frac{17-9\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 108. Tích phân $I=\int\limits_0^a x\sqrt{x+1}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5}+\frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3}+\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3}+\frac{4}{15}$.

C. $I=\frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5}+\frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3}-\frac{4}{15}$. **D.** $I=\frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3}-\frac{4}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I=\int\limits_0^a x\sqrt{x+1}dx=\int\limits_0^a (x+1)\sqrt{x+1}dx-\int\limits_0^a\sqrt{x+1}dx=\int\limits_0^a (x+1)^{\frac{3}{2}}dx-\int\limits_0^a (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^a-\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{4}{15}$$

Câu 109. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}+2$. **B.** $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}-2$. **C.** $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}-1$. **D.** $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\sqrt{x+1}+1\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}dx=\int\limits_{-1}^1\left(\sqrt{x+1}+1\right)dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+x\right]\Bigg|_{-1}^1=\frac{4\sqrt{2}}{3}+2.$$

Câu 110. Biết rằng $I=\int_3^4 \frac{x^2-x+2}{x+\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x=\frac{a-4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là số nguyên dương. Tính $a+b+c$.

A. 39. **B.** 27. **C.** 33. **D.** 41.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int_3^4 \frac{x^2-x+2}{x+\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x=\int_3^4\left(x-\sqrt{x-2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right)\Big|_3^4=\frac{25-8\sqrt{2}}{6}=\frac{25-4\sqrt{8}}{6}$

Suy ra $a=25$, $b=8$, $c=6$. Vậy $a+b+c=39$.

Câu 111. Biết $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3.$$

Vậy $a=2;b=3;c=3$ nên $P=a+b+c=8$.

Câu 112. Biết $I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0$, $\forall x\in[1;2]$ nên:

$$I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}$. Suy ra: $P=a+b+c=32+12+2=46$.

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 113. Tính tích phân $\int_0^{\pi}\sin 3x\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\int_0^{\pi} \sin 3x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$.

Câu 114. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{d}x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Câu 115. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4}$. **B.** $\cot\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\cot\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$.

Câu 116. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

A. $T = 3$. **B.** $T = -1$ **C.** $T = -4$. **D.** $T = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $2a + 6b = 2 - 3 = -1$.

Câu 117. Số $= -\cot\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$ các số nguyên thỏa mãn $\int_0^m \cos 2\mathrm{x}\,\mathrm{d}x = 0$ là

A. 643. **B.** 1284. **C.** 1285. **D.** 642.

Hướng dẫn giải.

Chọn B. Ta có

$\int_0^m \cos 2\mathrm{x}\, dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2m = 0 \Leftrightarrow \sin 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = k\pi \Leftrightarrow m = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

.

Vì $m \in (0;2017) \Rightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} < 2017 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{4043}{\pi} \approx 1284,06$.

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có tất cả 1284 số nguyên của m.

Câu 118. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -1$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Câu 119. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $\left(\pi;3\pi\right)$ sao cho $\int_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_{\pi}^{b}=1\Leftrightarrow \sin 2b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ b=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 120. Tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\cos x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $m\in\left(0;2017\right):I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\cos x\right)dx=\left(-\cos x-\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-2$.

Câu 121. Tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin 2x-\cos 3x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{4}$. **C.** $I=-\frac{3}{4}$. **D.** $I=-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin 2x-\cos 3x\right)dx=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{3}{4}$.

Câu 122. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-1-\sin x\right)\mathrm{d}x$ được viết ở dạng a, $b\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=5$. **C.** $2a-3b=2$. **D.** $a-b=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-1-\sin x\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-1$.

Vậy $a=4$, $b=2$. Suy ra $a+b=6$. Vậy B sai.

Câu 123. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=a+b\pi$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=1+a^3+b^2$

A. $P=9$. **B.** $P=29$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-25$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)\mathrm{d}x . = \left(2\cos x + 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$$

$= -2+\pi-\frac{1}{2}.2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3+\pi$. Vậy $a=-3, b=1$. $P = 1+a^3+b^2 = -25$.

Câu 124. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4x-1+\cos x\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+c$, $\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $a-b+c$

A. -3 **B.** 1. **C.** -2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4x-1+\cos x\right)\mathrm{d}x = \left(2x^2-x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)+1$.

Suy ra $a=2$, $b=2$, $c=1$ nên $a-b+c=1$.

Câu 125. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3+4\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{b}-\frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b+c$

.

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3+4\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[3+2\left(1-\cos 2x\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(5-2\cos 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{6}-\frac{3\sqrt{3}}{6}.$$

Suy ra $a=5$, $b=6$, $c=3$. Vậy $a+b+c=14$.

Câu 126. Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin 2x+\cos x\right)dx = a$, $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos 2x+\sin x\right)dx = b$. Giá trị của $a+b$ là:

A. $P=\frac{3}{4}+\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{4}-\sqrt{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1:

Ta có: $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin 2x+\cos x\right)dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos 2x+\sin x\right)dx = \left(\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow P = a+b = \frac{3}{4}+\sqrt{3}$.

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay vì các giá trị rất quen thuộc học sinh có thể nhận ra.

Câu 127. Cho giá trị của tích phân $I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(\sin 3x+\cos 3x)dx=a$, $I_2=\int\limits_{e}^{2e}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=b$. Giá trịa.b gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 8. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 1.

Chọn D. Ta có: $I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(\sin 3x+\cos 3x)dx=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$.

$I_2=\int\limits_{e}^{2e}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|\right)\Bigg|_{e}^{2e}=\ln 2-\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}-\ln(2e+1)+\ln(e+1)$

$\Rightarrow b=-\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}+\ln 2-\ln(2e+1)+\ln(e+1)$

$\Rightarrow a.b\approx -0,2198$.

Câu 128. Tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin ax+\cos ax)dx$, với $a\neq 0$ có giá trị là:

A. $I=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(a\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

B. $I=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(a\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

C. $I=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(a\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

D. $I=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[-\sin\left(a\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin ax+\cos ax)dx=\left(-\frac{1}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\sin ax\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$.

$=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(a\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Câu 129. Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=16$. **B.** $T=59$. **C.** $T=69$. **D.** $T=50$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}+\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$.

Như vậy $a=8$, $b=1$, $c=2$. Vậy $T=a^2+b^2+c^2=69$.

Câu 130. Cho hàm số $f(x)=a\sin 2x-b\cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$ và $\int_a^b a\,dx=3$. Tính tổng $a+b$ bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $f'(x)=2a\cos 2x+2b\sin 2x$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\Leftrightarrow -2a=-2\Leftrightarrow a=1$

$\int_a^b a\mathrm{d}x=\int_1^b \mathrm{d}x=3\Leftrightarrow b-1=3\Leftrightarrow b=4$. Vậy $a+b=1+4=5$.

Câu 131. Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $\mathrm{e}^a+\log_2|b|$.

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\frac{1}{8}\sqrt{3}$.

Do đó ta có $a=0$, $b=-\frac{1}{8}$. Vậy $\mathrm{e}^a+\log_2|b|=\mathrm{e}^0+\log_2\frac{1}{8}=-2$.

Câu 132. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$, biết $F(0)=1$; $F(\pi)=0$. Tính $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại P. **D.** $P=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $P=F\left(\frac{-\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\left[F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]+\left[F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]+F(0)-F(\pi)$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x+1.$$

Ta có $\frac{1}{1+\sin 2x}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ nên

$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$;

$\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$. Vậy $P=1$.

Câu 133. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x)=M.\sin\pi x+N.\cos\pi x$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f(1)=3 \Leftrightarrow M.\sin\pi+N.\cos\pi=3 \Leftrightarrow N=-3$.

Mặt khác $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}(M.\sin\pi x-3.\cos\pi x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{M}{\pi}\cos\pi x-\dfrac{3}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{M}{\pi}=-\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow M=2$.

Vậy $f(x)=2\sin\pi x-3\cos\pi x$ nên $f'(x)=2\pi\cos\pi x+3\pi\sin\pi x \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 134. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)\cos^2 x dx$ có giá trị là:

A. $I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta biến đổi:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-\sin^2 x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\left(t-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, với $t=\sin x$.

Câu 135. Biết tích phân $I_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=a$. Giá trị của $I_2=\int_a^1\dfrac{x^2+1}{x^3+x}dx=b\ln 2-c\ln 5$. Thương số giữa b và c là:

A. – 2. **B.** – 4. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=(\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow I_2=\int_a^1\dfrac{x^2+1}{x^3+x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{x^2+1}{x^3+x}dx=\dfrac{1}{3}(\ln|t|)\Big|_{\frac{5}{8}}^2=\dfrac{4}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln 5 \Rightarrow b=\dfrac{4}{3}, c=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{b}{c}=-4$.

Câu 136. Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 3x+\cos^2 x)dx=(a\cos 3x+bx\sin+c\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$. Giá trị của $3a+2b+4c$ là:

A. – 1. **B.** 1. **C.** – 2. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin 3x+\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin 3x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}\Rightarrow 3a+2c+4c=1$$

Câu 137. Cho $I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó $I_0+I_1+2\left(I_2+I_3+...+I_8\right)+I_9+I_{10}$ bằng

A. $\sum_{r=1}^{9}\frac{\left(\tan x\right)^r}{r}+C$. **B.** $\sum_{r=1}^{9}\frac{\left(\tan x\right)^{r+1}}{r+1}+C$. **C.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{\left(\tan x\right)^r}{r}+C$. **D.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{\left(\tan x\right)^{r+1}}{r+1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I_n=\int\tan^{n-2}x.\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x.\left(\tan x\right)'\mathrm{d}x-I_{n-2}$$

$$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}+C \qquad \Rightarrow I_n+I_{n-2}=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}+C.$$

$$I_0+I_1+2\left(I_2+I_3+...+I_8\right)+I_9+I_{10}=\left(I_{10}+I_8\right)+\left(I_9+I_7\right)+...+\left(I_3+I_1\right)+\left(I_2+I_0\right)$$

$$=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^8 x}{8}+....+\frac{\tan^2 x}{2}+\tan x+C=\sum_{r=1}^{9}\frac{\tan^r x}{r}+C.$$

TÍCH PHÂN HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 138. Tích phân $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}-1$. **B.** $\frac{1}{\mathrm{e}}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

Câu 139. Tích phân $I=\int_0^{2018}2^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2018}-1$. **B.** $\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$. **C.** $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2018}.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int_0^{2018}2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^{2018}=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Câu 140. Biết $\int_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ và. $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^4\left[4\mathrm{e}^{2x}+2f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=2\mathrm{e}^8$. **B.** $I=4\mathrm{e}^8-2$. **C.** $I=4\mathrm{e}^8$. **D.** $I=2\mathrm{e}^8-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $I=\int_0^4\left[4\mathrm{e}^{2x}+2f(x)\right]\mathrm{d}x=4.\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^4+2\int_0^{-1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$$\Leftrightarrow I=2\left(\mathrm{e}^8-1\right)+2.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}=2.\mathrm{e}^8.$$

Câu 141. Cho $F\left(x\right)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$. Tính $F'\left(2\right)$.

A. $F'\left(2\right)=4\mathrm{e}^4$. **B.** $F'\left(2\right)=8\mathrm{e}^{16}$. **C.** $F'\left(2\right)=4\mathrm{e}^{16}$. **D.** $F'\left(2\right)=\mathrm{e}^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số e^{t^2}.

$\Rightarrow F(x)=G(x^2)-G(0)$ $\Rightarrow F'(x)=2x.G'(x^2)=2x.e^{x^4}$ $\Rightarrow F'(2)=4.e^{16}$

Câu 142. Cho hàm số $g(x)=\int\limits_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ với $x>0$. Đạo hàm của $g(x)$ là

A. $g'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$. **B.** $g'(x)=\frac{1-x}{\ln x}$. **C.** $g'(x)=\frac{1}{\ln x}$. **D.** $g'(x)=\ln x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\ln t}$.

Khi đó $F'(t)=\frac{1}{\ln t}$ hay $F'(x)=\frac{1}{\ln x}$. Ta có $g(x)=\int\limits_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt=F(x^2)-F(x)$.

Suy ra $g'(x)=\left(F(x^2)-F(x)\right)'=F'(x^2)-F'(x)=\frac{1}{\ln x^2}.2x-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$.

Chú ý: ta có công thức $\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right)'=v'(x).f\left[v(x)\right]-u'(x).f\left[u(x)\right]$

Câu 143. $\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx=6$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\int\limits_{1}^{2}e^{kx}dx<\frac{2018.e^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\limits_{1}^{2}e^{kx}dx=\left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)\Big|_1^2=\frac{e^{2k}-e^k}{k}$.

$\int\limits_{1}^{2}e^{kx}dx<\frac{2018.e^k-2018}{k}\Leftrightarrow\frac{e^{2k}-e^k}{k}<\frac{2018.e^k-2018}{k}$

$\Leftrightarrow e^k\left(e^k-1\right)<2018\left(e^k-1\right)$ (do k nguyên dương).

$\Leftrightarrow\left(e^k-1\right)\left(e^k-2018\right)<0\Leftrightarrow 1<e^k<2018\Leftrightarrow 0<k<\ln 2018\approx 7.6$.

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k\in S$ (với $S=\{1;2;3;4;5;6;7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Câu 144. Cho $I_n=\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ với $n\in\mathbb{N}$.

Đặt $u_n=1.(I_1+I_2)+2(I_2+I_3)+3(I_3+I_4)+...+n(I_n+I_{n+1})-n$.

Biết $\lim u_n=L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L\in(-1;0)$. **B.** $L\in(-2;-1)$. **C.** $L\in(0;1)$. **D.** $L\in(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Với $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-nx}.e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\int\limits_{0}^{1}e^{-nx}dx-\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx=\int\limits_{0}^{1}e^{-nx}dx-I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x - I_n \ \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$

Do đó $u_n = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) + \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + \left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right) + \ldots + \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) - n \ \Rightarrow u_n = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3} - \ldots - \mathrm{e}^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -\mathrm{e}^{-1}$ và $q = \frac{1}{\mathrm{e}}$, nên

$\lim u_n = \frac{-\mathrm{e}^{-1}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} \ \Rightarrow L = \frac{-1}{\mathrm{e} - 1} \ \Rightarrow L \in \left(-1; 0\right)$.

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x)\le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có $I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3\frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e\frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$
5	Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 2}e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
6	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos xdx$. Đặt $t=\sin x$
7	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int\frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

3. $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $u(x)\in[\alpha,\beta]\ \forall x\in[a,b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha,\beta]$.
Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $\int\limits_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

B. $\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

C. $\int\limits_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$.

D. $\int\limits_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}u$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $u(x)=t\Rightarrow u'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận Khi $x=a$ thì $t=u(x)$; khi $x=b$ thì $t=u(b)$.

Do đó $\int\limits_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$.

HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỈ

Câu 2. Tính tích phân $I=\int\limits_1^3 x(x-1)^{1000}dx$.

A. $I=\dfrac{2003.2^{1002}}{1003002}$. **B.** $I=\dfrac{1502.2^{1001}}{501501}$. **C.** $I=\dfrac{3005.2^{1002}}{1003002}$. **D.** $I=\dfrac{2003.2^{1001}}{501501}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $x-1=t$, khi $x=1\Rightarrow t=0$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Do đó $I=\int\limits_0^2(t+1)t^{1000}d(t+1)=\int\limits_0^2\left(t^{1001}+t^{1000}\right)dt=\left.\left(\dfrac{t^{1002}}{1002}+\dfrac{t^{1001}}{1001}\right)\right|_0^2$

$=\dfrac{2^{1002}}{1002}+\dfrac{2^{1001}}{1001}=2^{1001}\left(\dfrac{2}{1002}+\dfrac{1}{1001}\right)=\dfrac{1502.2^{1001}}{501501}$.

Câu 3. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{100} x(x-1)...(x-100)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** Một giá trị khác.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Tính $I=\int\limits_0^{100} x(x-1)...(x-100)\mathrm{d}x$. Đặt $t=100-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=100$; khi $x=100$ thì $t=0$.

Do $x(x-1)...(x-100)=(100-t)(99-t)...(1-t)(-t)=-t(t-1)...(t-99)(t-100)$ nên

$I=\int\limits_0^{100} x(x-1)...(x-100)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{100} t(t-1)...(t-100)\mathrm{d}t=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0$.

Câu 4. Tích phân $\int\limits_0^2\dfrac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{x^2+3}\mathrm{d}\left(x^2+3\right) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

Câu 5. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = a\ln\frac{5}{8}+b$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{5}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = \int_1^2 \frac{dx}{x^3.\left(x^2+1\right)} = \int_1^2 \frac{x}{x^4.\left(x^2+1\right)}dx$

Đặt $t = x^2+1$, suy ra $dt = 2xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt = xdx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=5$.

Suy ra $I = \int_2^5 \frac{1}{2}.\frac{1}{(t-1)^2.t}dt$.

Ta cần tách tiếp $\frac{1}{(t-1)^2.t}$ về dạng $\frac{mt+n}{(t-1)^2}+\frac{k}{t}$ để có thể lấy nguyên hàm được. Dễ dàng tìm được m,n,k bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Ta tìm được $m=-1, n=2, k=1$. Suy ra

$$I = \frac{1}{2}\int_2^5\left[\frac{1}{t}+\frac{2-t}{(t-1)^2}\right]dt = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_2^5 - \frac{1}{2}.\frac{1}{t-1}\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^5 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}-1\right)-\frac{1}{2}\ln 4 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$$

Suy ra $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{8} \Rightarrow a+2b=\frac{5}{4}$.

Câu 6. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ được kết quả $I = a\ln 2 - b$. Giá trị a+b là:

A. $\frac{3}{16}$ **B.** $\frac{13}{16}$ **C.** $\frac{14}{17}$ **D.** $\frac{4}{17}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t = \left(1+x^2\right) \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.

Câu 7. Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1}dx$ có giá trị là:

A. $I=\ln 3$. **B.** $I=-\ln 2$. **C.** $I=-\ln 3$. **D.** $I=\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta nhận thấy: $\left(x^2+1\right)' = 2x$.

Ta đặt: $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=2 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_2^1 \frac{1}{t}dt = \left(\ln|t|\right)\Big|_2^1 = -\ln 2$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln a$,a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = ... = \int_1^2 \frac{1}{3t}dt = \frac{1}{3}\left(\ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow a = 2$.

Câu 9. Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2+2}dx$,với $a \neq -2$ có giá trị là:

A. $I=\dfrac{\ln 2+\ln\left|a+2\right|}{2}$. **B.** $I=\dfrac{\ln 2-\ln\left|a+2\right|}{2}$.

C. $I=\dfrac{-\ln 2-\ln\left|a+2\right|}{2}$. **D.** $I=\dfrac{-\ln 2+\ln\left|a+2\right|}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta nhận thấy: $\left(ax^2+2\right)'=2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t=ax^2+2\Rightarrow dt=2axdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=-1\Rightarrow t=a+2\end{cases}$.

$I=\int\limits_{a+2}^{2}\frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}\left(\ln\left|t\right|\right)\Big|_{a+2}^{2}=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln\left|a+2\right|\right)$.

Câu 10. Giả sử $\int\limits_3^5\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}=a\ln 5+b\ln 3+c\ln 2.(a,b,c\in\mathbb{Z})$ $\int\limits_3^5\frac{dx}{x^2-x}=a\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$. Tính giá trị biểu thức $S=-2a+b+3c^2$.

A. $S=3$. **B.** $S=6$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int\limits_3^5\frac{dx}{x^2-x}=\int\limits_3^5\frac{dx}{x\left(x-1\right)}=\int\limits_3^5\frac{dx}{x-1}-\int\limits_3^5\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\Bigg|_3^5=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{2}{3}=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2+\ln 3-\ln 5$$

Suy ra $a=-1;b=1;c=1$. Vậy $S=2+1+3=6$.

Câu 11. Biết $\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $I=\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\\ x=t-1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=0\leftrightarrow t=1\\ x=1\leftrightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó

$$I=\int\limits_1^2\frac{2\left(t-1\right)^2+3\left(t-1\right)+3}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\frac{2t^2-t+2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(2-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2t-\ln t-\frac{2}{t}\right)\Bigg|_1^2=3-\ln 2.$$

Suy ra $P=3^2+2^2=13$.

Câu 12. Tính $I=\int\limits_a^b\frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

A. $I=\dfrac{2b}{a^2+b^2}$. **B.** $I=\dfrac{b}{a+b^2}$. **C.** $I=\dfrac{\left(a-1\right)\left(b-1\right)}{\left(a+b^2\right)\left(a+1\right)}$. **D.** $I=\dfrac{b}{a^2+b}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int\limits_a^b\frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\frac{\frac{a}{x^2}-1}{\left(\frac{a}{x}+x\right)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\frac{a}{x}+x\Rightarrow\mathrm{d}t=\left(-\frac{a}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=a\Rightarrow t=1+a$; $x=b\Rightarrow t=\frac{a}{b}+b$

Khi đó: $I=\int\limits_{1+a}^{\frac{a}{b}+b}\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{t}\Big|_{1+a}^{\frac{a}{b}+b}=\frac{1}{t}\Big|_{1+a}^{\frac{a+b^2}{b}}=\frac{b}{a+b^2}-\frac{1}{1+a}=\frac{\left(a-b\right)\left(b-1\right)}{\left(a+b^2\right)\left(a+1\right)}\Leftrightarrow k=1$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Hướng dẫn giải:

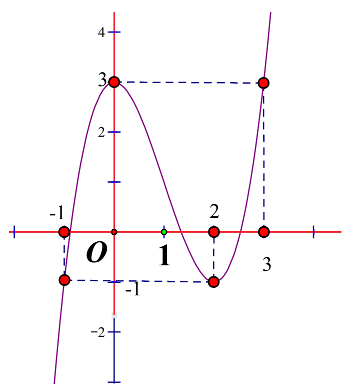
Chọn A. Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2} = 4$

Nên $\int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2} = 4 + 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân $I = \int_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}x$.



A. $I = -2$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Dựa vào đồ thị hàm số ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-1;-1)$, $(0;3)$, $(2;-1)$, $(3;3)$ nên hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Ta có: $I = \int_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}(2x-1) = \frac{1}{2}f(2x-1)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left[f(3) - f(1)\right] = 1$.

HÀM VÔ TỈ

Câu 15. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây ?

A. $3\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$. **B.** $\int_0^1 t^3\mathrm{d}t$. **C.** $3\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$. **D.** $3\int_0^1 t^3\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x = 1 - t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x = -3t^2\mathrm{d}t$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó ta có $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x = 3\int_0^1 t^3\mathrm{d}t$.

Câu 16. Trong các tích phân sau, tích phân nào có cùng giá trị với $I=\int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}dx$

A. $\frac{1}{2}\int_1^2 t\sqrt{t-1}dt$. **B.** $\int_1^4 t\sqrt{t-1}dt$ **C.** $\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^2+1\right)t^2dt$. **D.** $\int_1^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)x^2dx$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Rightarrow tdt=xdx$. $x=1\Rightarrow t=0$, $x=2\Rightarrow t=\sqrt{3}$

$I=\int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^2+1\right)t^2dt$

Câu 17. Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx=\int_1^2 f(t)dt$, với $t=\sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây ?

A. $f(t)=2t^2+2t$ **B.** $f(t)=t^2-t$ **C.** $f(t)=t^2+t$ **D.** $f(t)=2t^2-2t$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\sqrt{1+x}$, suy ra $t^2=1+x$, $2tdt=dx$

Ta có $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx=\int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t}.2tdt=\int_1^2 (t-1).2tdt=\int_1^2 (2t^2-2t)dt$

Câu 18. Kết quả của $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=4\Rightarrow t=3$. Khi đó, ta có $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{t\mathrm{d}t}{t}=\int_1^3 \mathrm{d}t=t\Big|_1^3=2$.

Câu 19. Tích phân $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{2t}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$. Khi đó $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{t}.t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 \mathrm{d}t=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

Cách khác: Sử dụng công thức $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$ thì $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Câu 20. Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=3\Rightarrow t=4$. Khi đó:

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Bigg|_1^2 = \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$$

Suy ra $\begin{cases} a=7 \\ b=-12 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1$.

Câu 21. Biết $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5}\mathrm{d}x = a+b\ln 2$ với a,b là số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=-3$. **C.** $S=5$. **D.** $S=7$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. $t=\sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2=2x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=3 \end{array}\right.$

$$I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{t}{t-5}\mathrm{d}t = \int_1^3 \left(1+\frac{5}{t-5}\right)\mathrm{d}t = \left(t+5\ln|t-5|\right)\Big|_1^3 = 2-5\ln 2.$$

Suy ra: $a=2; b=-5 \Rightarrow S=a+b=-3$.

Câu 22. Tính tích phân $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $a^2+ab+3b^2$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2=3x+1 \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2t\mathrm{d}t}{3}$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=2$; $x=5 \Rightarrow t=4$. Khi đó

$$I=\int_2^4 \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4 = 2\ln 3-\ln 5.$$ Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$.

Do đó $a^2+ab+3b^2=5$.

Câu 23. Cho tích phân $I=\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = a+b\ln\frac{2}{3}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=3$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a+b=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=4 \Rightarrow t=3$

Khi đó $I=\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{t\mathrm{d}t}{3+t} = \int_1^3 \left(1-\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t = \left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_1^3 = 2+3\ln\frac{2}{3}$

Do đó $a+b=5$.

Câu 24. Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(a-\sqrt{b}\right)$, với a,b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a=2b$. **B.** $a<b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=3b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^2 t^2\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{2}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)$. Vậy $a=2b$.

Câu 25. Cho $I=\int_{\sqrt{5}}^a \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$, $\left(a>\sqrt{5}\right)$. Khi đó giá trị của số thực a là

A. $2\sqrt{3}.$ **B.** $2\sqrt{5}.$ **C.** $3\sqrt{2}.$ **D.** $2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3,\quad x=a\Rightarrow t=\sqrt{a^2+4}$.

$$I=\int_{\sqrt{5}}^{a}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_{3}^{\sqrt{a^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right).$$

Ta có $I==\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\left(a>\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=\sqrt{a^2+4}+2\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}$.

Câu 26. Cho $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=a\sqrt{2}+b$. Giá trị $a.b$ là:

A. – **1**. **B.** – **2**. **C.** **1**. **D.** **2**.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cho $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=a\sqrt{2}+b$. Giá trị a.b là:

Ta có: Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{2}-1\Rightarrow a=1,b=-1\Rightarrow a.b=-1.$$

Câu 27. Với $a,b,c\in R$. Đặt $I=\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx=a-\ln\frac{b}{c}$. Giá trị của tính abc là :

A. $\sqrt{3}$ **B.** $-2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đây là dạng toán tính tích phân để tránh tình trạng bấm máy tính nên chúng ta cần phải nhớ phương pháp làm. Có hai cách để làm bài toán này là chuyển về lượng giác hoặc phá căn. Dưới đây là một cách

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4-x^2\Rightarrow tdt=-xdx$

$$I=\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{t(-tdt)}{4-t^2}=\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{t^2}{t^2-4}dt=\int_{\sqrt{3}}^{0}\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=\left(t+\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{0}=-\sqrt{3}-\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Suy ra $abc=-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=-\sqrt{3}$

Câu 28. Cho $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=a-\sqrt{b}+\ln\frac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{e}}$ với c nguyên dương và a, b, c, d, e là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d+e$ bằng.

A. 14. **B.** 17. **C.** 10. **D.** 24.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=t\Big|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}$

$=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}+\ln\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{3}}=2-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $a+b+c+d+e=10$.

Câu 29. Giá trị của $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a-7b$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Đặt $u=\sqrt[3]{1+x^2}\Rightarrow\frac{3}{2}u^2\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$; $x=\sqrt{7}\Rightarrow u=2$.

Vậy $I=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(u^3-1\right)u^2}{u}\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(u^4-u\right)\mathrm{d}u=\frac{141}{20}$. Suy ra: $a=141$, $b=20$. Vậy $a-7b=1$.

Cách 2: Dùng MTCT $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^2}}=7.01=\frac{141}{20}$. Suy ra: $a=141$, $b=20$. Vậy $a-7b=1$.

Câu 30. Giả sử $I=\int\limits_{1}^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a,b là số nguyên. Tính giá trị $a-b$.

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\sqrt[6]{x}=t\Rightarrow x=t^6\Rightarrow\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. Với $x=1\Rightarrow t=1$, $x=64\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\limits_{1}^{2}\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|\right)\Big|_1^2=6\ln\frac{2}{3}+11$.

$\Rightarrow a=6$, $b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Câu 31. Giả sử $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\left(a\sqrt{a}-\frac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$; $1\le a,b,c\le 9$. Tính giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a}.

A. 165. **B.** 715. **C.** 5456. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x^3}\mathrm{d}x$. Đặt $t^2=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x\Rightarrow -t\mathrm{d}t=\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

Ta được $I=-\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{5+3}\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=2$, $b=5$, $c=3$, suy ra $C_{2a+c}^{b-a}=C_7^3=35$.

Câu 32. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\int\limits_{0}^{x}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t>0$ (ẩn x) là:

A. $\left(-\infty;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(-\infty;+\infty\right)\backslash\{0\}$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}\left(t^2+1\right) > 0 \Leftrightarrow \left.\sqrt{t^2+1}\right|_0^x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1>0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

Câu 33. Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 91.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{3t^2\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: khi $x=0 \Rightarrow t=1$; khi $x=\sqrt{7} \Rightarrow t=2$

$\int\limits_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.\int\limits_1^2\left(t^4-t\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{141}{20} \Rightarrow m-7n = 141-7.20=1$.

Câu 34. Biết $\int\limits_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\frac{67}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int\limits_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2\left(3x^2 - x\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_1^2 3x^2\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x = \left.x^3\right|_1^2 + \int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x = 7 - \int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$

.

Tính $\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$. Đặt $\sqrt{9x^2-1}=t \Rightarrow 9x^2-1=t^2 \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{t\mathrm{d}t}{9}$.

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

Khi đó $\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x = \int\limits_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t\frac{t\mathrm{d}t}{9} = \left.\frac{t^3}{27}\right|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} = \frac{35}{27}\sqrt{35} - \frac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int\limits_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a=7$, $b=\frac{16}{27}$, $c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P=a+2b+c-7 = 7+\frac{32}{27}-\frac{35}{27}-7 = -\frac{1}{9}$.

Cách 2: $\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int\limits_1^2\left(9x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(9x^2-1\right) = \left.\frac{1}{27}\left(9x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{35\sqrt{35}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x = 7-\frac{35}{27}\sqrt{35}+\frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a=7$, $b=\frac{16}{27}$, $c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P=a+2b+c-7 = 7+\frac{32}{27}-\frac{35}{27}-7 = -\frac{1}{9}$.

Câu 35. Biết $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$. Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 36. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3\left(au^4+bu^2+c\right)\mathrm{d}u$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u^2=2x+1\Rightarrow \begin{cases} u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ x=\frac{u^2-1}{2} \end{cases}$

Khi đó $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}u.\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^3\left(u^4+2u^2-1\right).\mathrm{d}u$

Vậy $S=a+b+c=1+2-1=2$.

Câu 37. Tích phân $I=\int_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\ge 0$ có giá trị là:

A. $I=\frac{a(a-2)}{4}$. **B.** $I=\frac{a(a-2)}{2}$. **C.** $I=\frac{a(a+2)}{4}$. **D.** $I=\frac{a(a+2)}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta biến đổi: $I=\int_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx=\int_0^1 \frac{ax\left(ax^2+1\right)}{\sqrt{ax^2+1}}dx=\int_0^1\left(ax\sqrt{ax^2+1}\right)dx$.

Ta nhận thấy: $\left(ax^2+1\right)'=2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t=ax^2+1\Rightarrow dt=2axdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=a+1 \end{cases}$.

$I=\int_1^{a+1}\frac{1}{2}tdt=\left(\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^{a+1}=\frac{1}{4}a(a+2)$.

Câu 38. Tích phân $I=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$ có giá trị là:

A. $I=-\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $I=-\ln\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $I=\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $I=\ln\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = x + \sqrt{x^2+9} \Rightarrow du = \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx = \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}dx = \dfrac{udx}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 3 \\ x = 3 \Rightarrow u = 3+3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_3^{3+3\sqrt{2}} \dfrac{du}{u} = \left(\ln|u|\right)\Big|_3^{3+3\sqrt{2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 39. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx$ có giá trị là:

A. $I = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|$.

B. $I = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$.

C. $I = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|$.

D. $I = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I = \int\limits_0^1 \dfrac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

Đặt $u = x + \sqrt{x^2+4} \Rightarrow du = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx \Rightarrow \dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

$I = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\int\limits_2^{1+\sqrt{5}} \dfrac{1}{u}du = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\left(\ln u\right)\Big|_2^{1+\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$.

Câu 40. Tích phân $I = \int\limits_1^2 \dfrac{ax-2}{\sqrt{ax^2-4x}}dx = 2\sqrt{3}-1$. Giá trị nguyên của a là:

A. $a = 5$. **B.** $a = 6$. **C.** $a = 7$. **D.** $a = 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(ax^2-4x\right)' = 2ax-4 = 2\left(ax-2\right) \Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 \dfrac{2ax-4}{\sqrt{ax^2-4x}}dx$.

Đặt $t = ax^2-4x \Rightarrow dt = \left(2ax-4\right)dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 4a-8 \\ x = 1 \Rightarrow t = a-4 \end{cases}$.

$I = \dfrac{1}{2}\int\limits_{a-4}^{4a-8} \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt = \left(\sqrt{t}\right)\Big|_{a-4}^{4a-8} = \sqrt{4a-8}-\sqrt{a-4}$

Theo đề bài: $I = 2\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sqrt{4a-8}-\sqrt{a-4} = 2\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow a = 5$.

Câu 41. Cho $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\dfrac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị $\dfrac{a}{b}$ là:

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta đặt: $t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1+\sqrt{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = 2+\sqrt{5} \end{cases}$.

$\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \dfrac{dt}{t} = \left(\ln|t|\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \ln\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

Câu 42. Tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \dfrac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$ có gái trị là:

A. $I = \dfrac{87}{5}$. **B.** $I = \dfrac{67}{5}$. **C.** $I = \dfrac{77}{5}$. **D.** $I = \dfrac{57}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. *Cách 1:* Ta nhận thấy: $\left(8-x^3\right)'=-3x^2$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t=8-x^3\Rightarrow dt=-3x^2dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=8\\ x=\sqrt[3]{7}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}}\frac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx=-\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}}\frac{-3x^2.x^3}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx=-\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}}\frac{-3x^2\left(8-t\right)}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$

$\Rightarrow I=\int\limits_8^1\frac{t-8}{\sqrt[3]{t}}dt=\int\limits_8^1\left(t^{\frac{2}{3}}-8.t^{-\frac{1}{3}}\right)dt=\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}-12t^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_8^1=\frac{87}{5}$.

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay, tuy nhiên chờ máy giải cũng khá mất thời gian.

Câu 43. Biết $\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$I=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int\limits_0^4\frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$

$=\int\limits_0^4\frac{2\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int\limits_0^4\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int\limits_1^{.3}\frac{2u\mathrm{d}u}{u+2}-\int\limits_1^{.3}\frac{u\mathrm{d}u}{u+1}=\int\limits_1^{.3}\left(2-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u-\int\limits_1^{.3}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$=\left(u-4\ln\left|u+2\right|+\ln\left|u+1\right|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$

$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Câu 44. Biết $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\frac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-\frac{1}{2}$. **D.** $P=\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\left(1+x-\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x}{2x}=\left(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}{2x^2}=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-I$

Xét $I=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}{2x^2}$ Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$

$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\frac{t^2\mathrm{d}t}{2\left(t^2-1\right)}=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^2$

$=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

Vậy $\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$. Vậy $P=a+b+c=-\frac{1}{2}$.

Câu 45. Biết rằng $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$ Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Khi $x=0$ thì $t=1+\sqrt{3}$; khi $x=1$ thì $t=2+\sqrt{2}$.

$\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\int\limits_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=5$.

Câu 46. Biết $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$

A. $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$. Vậy $S=67$.

Câu 47. Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k>\frac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\Rightarrow dt=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}dx\Leftrightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

Ta có $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int\limits_0^2 dt = t\big|_0^2 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\Big|_0^2 = \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2+\sqrt{4+k}\right) - \ln\sqrt{k} = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \ln\frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}} = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}} = 2+\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{4+k} = \left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{k} \Leftrightarrow 4+4+k+4\sqrt{4+k} = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 k \Leftrightarrow \sqrt{4+k} = \left(2+\sqrt{5}\right)k - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k > \dfrac{2}{2+\sqrt{5}} \\ 4+k = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 k^2 + 4 - 4\left(2+\sqrt{5}\right)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \dfrac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left(2+\sqrt{5}\right)^2 k^2 - \left(9+4\sqrt{5}\right)k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \dfrac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right. \end{cases}$

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 48. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int\limits_0^1 \sin(1-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sin x\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_0^1 \cos(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \cos x\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_0^\pi \cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_0^\pi \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét tích phân $\int\limits_0^1 \sin(1-x)\,\mathrm{d}x$

Đặt $1-x=t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; Khi $x=1 \Rightarrow t=0$.

Do đó $\int\limits_0^1 \sin(1-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^0 \sin t(-\mathrm{d}t) = \int\limits_0^1 \sin t dt = \int\limits_0^1 \sin x\mathrm{d}x$.

Câu 49. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.

D. $I = \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $I = \int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{-1}{2t^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

Câu 50. Cho $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \ln a - \frac{b}{8}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $a+b=4$

B. $a-b=2$

C. $ab=6$

D. $a^b=4$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$ Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3} \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{1}{2} \\ u=1 \end{array}\right.$

$$I = \int_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u^2)(-du)}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u} - u\right) du = \left[\ln u - \frac{u^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Câu 51. Biết rằng $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{1+\cos 2x} dx = a$ và $I = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x+2} dx = b\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}$, a và b là các số hữu tỉ. Thương số giữa a và b có giá trị là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \ldots = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} t dt = \frac{1}{2}$, với $t = \tan x$.

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x+2} dx = \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(x+2)^4}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}.$$

Câu 52. Cho $\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = 1 + 2sin2x$ đưa đến $\mathrm{I} = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+2\sin 2\pi/a} \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t\Big|_{1}^{1+2\sin 2\pi/a} = \frac{1}{4}\ln 3$

Suy ra $1 + 2sin2/a = 3$ suy ra a = 4.

Câu 53. Biết $I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_{0}^{1} (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{0}^{1}$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \ldots = \int_{0}^{1} t dt = 1$, với $t = \tan x$.

$$I_2 = \int_{0}^{1} (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{0}^{1} \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3} \Rightarrow a + b + c = 2.$$

Câu 54. Tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$. **B.** $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

C. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$. **D.** $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta biến đổi: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\cos x+\cos 3x}dxI=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{2\cos^2 x-1}dx=...=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right)\Bigg|_1^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$ với $t=\cos x$.

Câu 55. Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\ln\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)-\ln\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
B. $I=\ln\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)-\ln\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
C. $I=\ln\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)+\ln\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
D. $I=\ln\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)+\ln\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}dx=...=\int_{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi^2}{4}+1}\frac{1}{t}dt=\ln\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)-\ln\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, với $t=x^2+\sin x$.

Câu 56. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\ln(\tan x+1)\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $T=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-c$
.

A. $T=2$. **B.** $T=4$. **C.** $T=6$. **D.** $T=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\ln(\tan x+1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x+1)\mathrm{d}(\cos 2x)$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x\ln(\tan x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}\left[\ln(\tan x+1)\right]$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.\frac{1}{\tan x+1}.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow T=8-4+0=4$.

Câu 57. Xét tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{1+\cos x}$, khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $I=\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{4t^3-4t}{t}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{-4t^3+4t}{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=4\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\mathrm{d}t$. **D.** $I=-4\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$t=\sqrt{1+\cos x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x=-2\mathrm{d}t \Rightarrow t^2=1+\cos x\Rightarrow \cos x=t^2-1$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos x}}=\int_{\sqrt{2}}^{1}2(t^2-1)(-2)\mathrm{d}t=-4\int_{\sqrt{2}}^{1}(t^2-1)\mathrm{d}t=4\int_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1)\mathrm{d}t.$$

Câu 58. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x.\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{64}\left(n\in\mathbb{N}\right)$. Tìm giá trị n.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=5$. **D.** $n=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x.\mathrm{cosxd}x=\dfrac{1}{64}\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}t^n\mathrm{d}t=\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{n+1}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{64}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n+1}{32}\ (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ là một hàm số giảm trên $\mathbb{R}$ và $y=\dfrac{n+1}{32}\left(y'=\dfrac{1}{32}>0\right)$ là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) có tối đa 1 nghiệm.

Với $n=3$ thay vào phương trình (1) ta được: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3+1}{32}$ (đúng).

Vậy $n=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $n=3$ vào bấm máy tính: $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x.\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{64}$. Ta chọn đáp án **A.**

Câu 59. Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{5}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{5}{2}}^{2}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\ln\dfrac{5}{2}-\ln 2=\ln 5-2\ln 2$. Vậy ta được $a=1;b=-2$.

Câu 60. Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\left(e^x\cos x+1\right)\cos x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$.

B. $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$.

C. $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$.

D. $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta biến đổi: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x.(\cos x-\sin x)}{\left(e^x\cos x+1\right)e^x\cos x}dx$. Đặt $t=e^x\cos x\Rightarrow dt=e^x\left(\cos x-\sin x\right)dx$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}$.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}}\frac{1}{t(t+1)}dt=\left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}}=\ln\left|\frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|-\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi}{3}}+2}\right|=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|.$$

Câu 61. Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ có giá trị là:

A. $I=\dfrac{19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **B.** $I=\dfrac{19+17\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. **C.** $I=\dfrac{-19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **D.** $I=\dfrac{19-17\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta nhận thấy: $(\cos x)'=-\sin x$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2-1}{\sqrt{t}}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{19-17\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$$

Câu 62. Tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx$ có gái trị là:

A. $I=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\dfrac{3}{8}$.

B. $I=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\dfrac{3}{8}$.

C. $I=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\dfrac{3}{8}$.

D. $I=-\dfrac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\dfrac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{4\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2}dxI=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{4\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]^2}dx$

Đặt $u=x+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=u-\frac{\pi}{6}\Rightarrow dx=du$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=-\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(u-\frac{\pi}{6}\right)}{4\sin^2 u}du=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u.\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos u}{4\sin^2 u}du=\frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}.\sin u-\cos u}{\sin^2 u}du$

$=\frac{1}{8}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u}du-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du\right)$

Xét $I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u}du$.

Đặt $t=\cos u, u\in[0;\pi]\Rightarrow dt=-\sin u du$. Đổi cận $\begin{cases}u=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\frac{\sqrt{3}dt}{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(l\,n\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)$.

Xét $I_2=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du$.

Đặt $t=\sin u, u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dt=\cos u du$. Đổi cận $\begin{cases}u=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\\ u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$I_2=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}du=\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1}=-3.\Rightarrow I=\frac{1}{8}\left(I_1-I_2\right)=-\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$. **Chọn D**

Câu 63. Tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9\cos^2 x-\sin^2 x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $I=\frac{1}{2}\ln 2$. **C.** $I=\frac{1}{6}\ln 2$. **D.** $I=\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x\left(9-\tan^2 x\right)}dx$.

Nhận thấy: $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$I = \int_0^1 \dfrac{1}{9-t^2}dt = \dfrac{1}{6}\int_0^1 \left(\dfrac{1}{3-t} + \dfrac{1}{3+t}\right)dt = \left(\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{3+t}{3-t}\right|\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{6}\ln 2$. **Chọn C**

Câu 64. Tích phân $I = \int_0^a \dfrac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}dx = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Giá trị của a là:

A. $a = -\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $a = -\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $a = \dfrac{\pi}{3}$. **D.** $a = \dfrac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^a \dfrac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}dx = \left(-\dfrac{1}{t}\right)\Bigg|_{-1}^{\sin a - \cos a} = \dfrac{1}{\cos a - \sin a} - 1$, $t = \sin x - \cos x$.

Theo đề bài, ta có: $\dfrac{1}{\cos a - \sin a} - 1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \xrightarrow{casio} a = \dfrac{\pi}{3}$.

Câu 65. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ có giá trị là:

A. $I = \dfrac{\pi}{12} + \ln\left(\sqrt{3}+1\right)$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{12} + \ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

C. $I = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}{2}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{12} + \ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

Ta có: $\begin{cases} I_2 = I + I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ I_3 = I_1 - I = \int_{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \dfrac{1}{t}dt \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{I_2 - I_3}{2} = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}{2}$, $t = \sin x + \cos x$.

Câu 66. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + b\ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx\ \Rightarrow I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$;

$$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

$\Rightarrow I_1=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2\ \Rightarrow a=\frac{1}{8};\ b=\frac{1}{4}\Rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

Cách giải khác: Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$

Câu 67. Biết $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

A. $P=8$. **B.** $P=10$. **C.** $P=6$. **D.** $P=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=\pi$. Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-I.$$

Suy ra $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Xét tích phân $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$. Khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $u=0$. Khi $x=\pi$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$.

Nên $J=-\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Vì hàm số $f(x)=\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$$

Từ đó ta có:

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

Như vậy $a=2$, $b=4$. Do đó $P=2a+b=2.2+4=8$.

Câu 68. Cho tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$ (với $\alpha>1$) thì giá trị của I bằng:

A. 2. **B.** $\frac{\alpha}{2}$. **C.** 2α. **D.** $\frac{2}{\alpha}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\Rightarrow t^2=1-2\alpha\cos x+\alpha^2\Rightarrow\frac{t}{\alpha}\mathrm{d}t=\sin x\mathrm{d}x$

Vậy $I=\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\frac{t\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{\alpha}.t\Big|_{\alpha-1}^{\alpha+1}=\frac{2}{\alpha}$

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m\frac{\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$?

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{2}=\int_0^m\frac{\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x=-\int_0^m\frac{1}{5+4\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^m\frac{1}{5+4\cos x}\mathrm{d}(5+4\cos x)=-\frac{1}{4}\ln|5+4\cos x|\Big|_0^m.$$

Mà $5+4\cos x\ge 5-4>0\Rightarrow\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ln(5+4\cos x)\Big|_0^m=-\frac{1}{4}\ln\frac{5+4\cos m}{9}$

$$\Rightarrow\ln\frac{5+4\cos m}{9}=-2\Leftrightarrow\frac{5+4\cos m}{9}=\mathrm{e}^{-2}\Leftrightarrow\cos m=\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow m=\pm\arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Theo đề bài $m\in(0;6\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\\k=2\end{array}\right.\\-\arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\\k=3\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 70. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=a\ln\frac{4}{c}+b$, tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow a = 1, \mathrm{b} = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4$.

Câu 71. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln\frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

A. $P = 3$. **B.** $P = \frac{5}{4}$. **C.** $P = \frac{3}{2}$. **D.** $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln|x + \cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} + 1 - \ln\frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{8}$, $b = 1$, $c = 2$. $P = ac^3 + b = \frac{1}{8}.8 + 1 = 2$.

Câu 72. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6}\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6}\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2}$$

$= \ln\frac{4}{3} = a\ln\frac{4}{c} + b$.

Do đó: $\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = 0 \end{cases}$. Vậy $S = a + b + c = 4$.

Câu 73. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x = c\ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó a, b, $c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$. **B.** $T = -11$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x+2\sin x)(2\cos x-\sin x)\ln(\cos x+2\sin x)\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\cos x+2\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=(-\sin x+2\cos x)\mathrm{d}x$.

Với $x=0$ thì $t=1$. Với $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=2$.

Suy ra $I=\int_1^2 2t\ln t\mathrm{d}t=\int_1^2 \ln t\mathrm{d}(t^2)=(t^2.\ln t)\Big|_1^2-\int_1^2 t\mathrm{d}t=4\ln 2-\dfrac{t^2}{2}\Big|_1^2=4\ln 2-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $\begin{cases} a=3\\ b=2\\ c=4\end{cases} \Rightarrow T=a+b+c=9$.

Câu 74. Biết $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{a}+\frac{\sqrt{3}\pi^2}{b}+c\pi+d\sqrt{3}$ với a,b,c,d là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

A. $a+b+c+d=28$ **B.** $a+b+c+d=16$ **C.** $a+b+c+d=14$ **D.** $a+b+c+d=22$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x}{1+x^6-x^6}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin(-t)(-dt)=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin t dt=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}+x^3\right)\sin x dx$$

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-2x^3\sin x\right)dx \Leftrightarrow I=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3\sin x dx$.

x^3 $(+)$ $+\sin x$
$3x^2$ $(-)$ $-\cos x$
$6x$ $(+)$ $-\sin x$
6 $(-)$ $+\cos x$
0 $+\sin x$

$$I=\left(x^3\cos x-3x^2\sin x-6x\cos x+6\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{27}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{3}-2\pi+6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

Câu 75. Biết $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

A. $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = I + J$

Xét $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x$ $\left(C_m\right)$; Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} -2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \left(-2x^2\sin x - 4x\cos x + 4\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + \frac{\pi^2}{-36} + \frac{\pi\sqrt{3}}{-3}$.

Khi đó $a = 2$; $b = -36$; $c = -3$.

Vậy $M = a - b + c = 35$.

Câu 76. Cho $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Tính $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x.f(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1009}{2}$. **B.** $I = 1009$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x.f(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\cos 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$ và $x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2018 = 1009$.

Câu 77. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 7$. Tính $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(\sin x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 7$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 12$, $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t = 2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
t	1	-1

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{-1} f(t)\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 6.$$

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{9} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và $\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\cos xdx = 2.$

Tích phân $I = \int\limits_{0}^{3} f(x)dx$ bằng

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \int\limits_{1}^{9} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int\limits_{1}^{3} f(t)dt = 4 \rightarrow \int\limits_{1}^{3} f(t)dt = 2.$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos dx \Rightarrow \int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\cos xdx = \int\limits_{0}^{1} f(t)dt = 2.$

$$I = \int\limits_{0}^{3} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)dx = 2 + 2 = 4.$$

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 80. Cho $I = \int\limits_{0}^{1} xe^{1-x^2}\mathrm{d}x$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I = \int\limits_{0}^{1} xe^{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} e^{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Vì $I = \frac{ae-b}{2} \Rightarrow a = 1; b = 1$. Vậy $a+b = 2$.

Câu 81. Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x.\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x.\mathrm{e}^{\sin^2 x - 1} + C$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$. **C.** $\mathrm{e}^{\sin^2 x} + C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int \sin 2x.\mathrm{e}^{\sin^2 x}dx = \int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{e}^{\sin^2 x} + C$

Câu 82. Biết rằng $\int\limits_{0}^{1} 3e^{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ $(a,b,c \in \mathbb{Z})$. Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T=6$. **B.** $T=9$. **C.** $T=10$. **D.** $T=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\sqrt{1+3x}\Rightarrow t^2=1+3x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=2$

$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx=2\int_1^2 te^t\mathrm{d}t=2\left(te^t\Big|_1^2-\int_1^2 e^t\mathrm{d}t\right)=2\left(te^t\Big|_1^2-e^t\Big|_1^2\right)=2\left(2e^2-e-e^2+e\right)=2e^2$.

$\Rightarrow \begin{cases}a=10\\ b=c=0\end{cases}\Rightarrow T=10$ nên câu C đúng.

Câu 83. Tích phân $I=\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12}\sqrt{e^x+4}dx$ có giá trị là:

A. $I=2-\ln 3+\ln 5$. **B.** $I=2-2\ln 3+2\ln 5$.
C. $I=2-2\ln 3+\ln 5$. **D.** $I=2-\ln 3-2\ln 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt: $t=\sqrt{e^x+4}\Leftrightarrow t^2=e^x+4\Rightarrow 2tdt=e^xdx\Rightarrow dx=\dfrac{2tdt}{t^2-4}$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\ln 5\Rightarrow x=3\\ x=\ln 12\Rightarrow x=4\end{cases}$. $I=\int\limits_3^4\dfrac{2t^2}{t^2-4}dt=2\left(t-2\ln\left|\dfrac{t+2}{t-2}\right|\right)\Bigg|_3^4=2-2\ln 3+2\ln 5$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$. **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$. **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$. **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{m^2+1}}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\left(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\right)\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}}=\left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$

Theo bài ra

$\int_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow 2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}=\left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow 2^{500}=\sqrt{m^2+1}-1$

$\Leftrightarrow m^2+1=\left(2^{500}+1\right)^2\Leftrightarrow m^2=2^{1000}+2^{501}=2^{500}\left(2^{500}+2\right)\Rightarrow m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$.

Câu 85. Cho $\int\limits_0^3\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}=a.\mathrm{e}^2+b.\mathrm{e}+c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét $I=\int\limits_0^3\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$; đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$; $x=3\Rightarrow u=2$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^2\mathrm{e}^u 2\mathrm{d}u=2\mathrm{e}^u\Big|_1^2=2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}\Rightarrow a=2$, $b=-2$, $c=0$, $S=a+b+c=0$.

Câu 86. Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x$. Nếu đổi biến số $t=\sin^2 x$ thì:

A. $I=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t+\int\limits_0^1 te^t\mathrm{d}t\right]$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t-\int\limits_0^1 te^t\mathrm{d}t\right]$.

C. $I=2\left[\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t+\int\limits_0^1 te^t\mathrm{d}t\right]$. **D.** $I=2\left[\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t-\int\limits_0^1 te^t\mathrm{d}t\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}.\left(1-\sin^2 x\right)\sin x.\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\sin x\cos x\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	0 $\frac{\pi}{2}$
t	0 1

Vậy $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^t\left(1-t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t-\int\limits_0^1 te^t\mathrm{d}t\right]$.

Câu 87. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** e. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Tính $I=\int\limits_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}=\int\limits_n^{n+1}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(1+e^x\right)}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=n\Rightarrow t=e^n$, $x=n+1\Rightarrow t=e^{n+1}$.

Khi đó $I=\int\limits_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(t+1\right)}=\int\limits_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln t-\ln\left(t+1\right)\right)\Big|_{e^n}^{e^{n+1}}=1+\ln\frac{1+\frac{1}{e^n}}{e+\frac{1}{e^n}}$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty} I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln\frac{1+\frac{1}{e^n}}{e+\frac{1}{e^n}}\right)=1-1=0$.

Câu 88. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2016}}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I=\frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I=\frac{2^{2018}}{2018}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: Với $x=2\Rightarrow t=-2; x=-2\Rightarrow t=2$

Khi đó: $I=\int\limits_2^{-2}\frac{-t^{2016}}{e^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2016}e^x\mathrm{d}x}{1+e^x}$, suy ra $2I=\int\limits_{-2}^{2}x^{2016}\mathrm{d}x=\frac{x^{2017}}{2017}\Big|_{-2}^{2}=\frac{2^{2018}}{2017}\Rightarrow I=\frac{2^{2017}}{2017}$.

Câu 89. Cho biết $\int\limits_0^1\frac{x^2e^x}{\left(x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}.e+c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3$.

Ta có $I=\int\limits_0^1\frac{x^2\mathrm{e}^x}{\left(x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\frac{\left(t-2\right)^2\mathrm{e}^{t-2}}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\left(1-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{d}t+\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{d}t$

+ Tính $I_1=\int\limits_2^3\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{t-2}\Big|_2^3=\mathrm{e}-1$.

+ Tính $I_2=\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$. Đặt $u=\frac{4}{t}\Rightarrow du=-\frac{4}{t^2}dt$, $dv=e^{t-2}dt\Rightarrow v=e^{t-2}$

Ta có $\int\limits_2^3\frac{4}{t}e^{t-2}dt=\frac{4}{t}.e^{t-2}\Big|_2^3+\int\limits_2^3\frac{4}{t^2}e^{t-2}dt\Rightarrow I_2=\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt=-\frac{4}{3}e+2$.

Suy ra $I=\frac{-1}{3}e+1\Rightarrow a=-1,\ b=3,\ c=1$. Vậy $a-b+c=3$.

Câu 90. Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\sqrt{e^x+3}\Rightarrow t^2=e^x+3\Rightarrow 2tdt=e^xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=\ln 6\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\t=2\end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=\int\limits_2^3\frac{2tdt}{1+t}=\int\limits_2^3\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=\left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=(6-2\ln 4)-(4-2\ln 3)$

$$=2-4\ln 2+2\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=2\end{cases}.\ \text{Vậy } T=0.$$

Câu 91. Giá trị $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

A. $0,046$. **B.** $0,036$. **C.** $0,037$. **D.** $0,038$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $u=\cos\left(\pi x^3\right)\Rightarrow du=-3\pi x^2\sin\left(\pi x^3\right)dx\Rightarrow x^2\sin\left(\pi x^3\right)dx=-\frac{1}{3\pi}du$.

Khi $x=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ thì $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi $x=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ thì $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $I=-\frac{1}{3\pi}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}e^u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3\pi}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 0,037$.

Câu 92. Cho $\int\limits_0^1\frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}dx=a.e+b\ln(e+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I=\int\limits_0^1\frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}dx=\int\limits_0^1\frac{(x+1)e^x xe^x}{xe^x+1}dx$.

Đặt $t=xe^x+1\Rightarrow dt=(1+x)e^xdx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=e+1$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^{e+1}\frac{t-1}{t}dt=\int\limits_1^{e+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{e+1}=e-\ln(e+1)$.

Suy ra: $a=1,\ b=-1,\ c=1$. Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

Câu 93. Biết $\int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)e^x}{x+2+e^{-x}}dx = ae - b - \ln\frac{ae+c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S = 2a+b+c$.

A. $S=10$. **B.** $S=0$. **C.** $S=5$. **D.** $S=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có : $I = \int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)e^x}{x+2+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{(x+2)(x+3)e^{2x}}{(x+2)e^x+1}dx$.

Đặt $t=(x+2)e^x \Rightarrow dt=(x+3)e^x dx$. Đổi cận : $x=0 \Rightarrow t=2$, $x=1 \Rightarrow t=3e$.

$I = \int_2^{3e}\frac{t\,dt}{t+1} = \int_2^{3e}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^{3e} = 3e-2-\ln\frac{3e+1}{3}$.

Vậy $a=3$, $b=2$, $c=1 \Rightarrow S=9$.

Câu 94. $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx = \frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx = \int_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx = \frac{1}{4}+\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx = \frac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx$. Đặt $\pi+e.2^x=t \Rightarrow e.2^x\ln 2dx = dt \Leftrightarrow 2^x dx = \frac{1}{e.\ln 2}dt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+e$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2e$.

$J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx = \frac{1}{e\ln 2}\int_{\pi+e}^{\pi+2e}\frac{1}{t}dt = \frac{1}{e\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)$.

Khi đó $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right) \Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 95. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,\ (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2. Tính tích phân $I=\int_{x_1}^{x_2}(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}dx$.

A. $I=x_1-x_2$. **B.** $I=\frac{x_1-x_2}{4}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{x_1-x_2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=ax^2+bx+c \Rightarrow dt=(2ax+b)dx$

Khi $\begin{cases} x=x_1 \Rightarrow t=ax_1^2+bx_1+c=0 \\ x=x_2 \Rightarrow t=ax_2^2+bx_2+c=0\end{cases}$. Do đó $I=\int_{x_1}^{x_2}(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}dx = \int_0^0 e^t dt = 0$.

Câu 96. Với cách đổi biến $u=\sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}dx$ trở thành

A. $\frac{2}{3}\int_1^2\left(u^2-1\right)du$. **B.** $\frac{2}{9}\int_1^2\left(u^2-1\right)du$. **C.** $2\int_1^2\left(u^2-1\right)du$. **D.** $\frac{2}{9}\int_1^2\frac{u^2-1}{u}du$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $u=\sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow u^2=1+3\ln x \Rightarrow \ln x = \frac{u^2-1}{3} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2u}{3}du$.

Khi đó $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}dx = \int_1^2 \frac{\frac{u^2-1}{3}}{u}\cdot\frac{2u}{3}du = \frac{2}{9}\int_1^2 (u^2-1)du$.

Câu 97. Biết $\int_1^e \frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}dx = a.e + b\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int_1^e \frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{1+x\ln x+1+\ln x}{1+x\ln x}dx = \int_1^e dx + \int_1^e \frac{d(1+x\ln x)}{1+x\ln x}$

$= x\Big|_1^e + \ln(1+x\ln x)\Big|_1^e = e-1+\ln(1+e) = e+\ln\frac{e+1}{e}$. Suy ra $a=b=1$. Vậy $\frac{a}{b}=1$.

Câu 98. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx$ bằng cách đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I=\frac{2}{9}t^3\Big|_1^2$. **B.** $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t\,dt$. **C.** $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t^2dt$. **D.** $I=\frac{14}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx$, đặt $t=\sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2=1+3\ln x \Rightarrow 2t\,dt=\frac{3}{x}dx \Rightarrow \frac{2t}{3}dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=e\Rightarrow t=2$. $I=\int_1^2 \frac{2t^2}{3}dt = \frac{2}{9}t^3\Big|_1^2 = \frac{14}{9}$.

Câu 99. Biết $\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x}dx = \ln\left(a+\frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c\le 4$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x}dx = \int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x}dx$. Đặt $t=3x+\ln x$, $dt=\left(3+\frac{1}{x}\right)dx$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3$, $x=2\Rightarrow t=6+\ln 2$.

$$\int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x}dx = \int_3^{6+\ln 2}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_3^{6+\ln 2} = \ln(6+\ln 2)-\ln 3 = \ln\left(2+\frac{\ln 2}{3}\right)$$

$\Rightarrow a=2$, $b=2$, $c=3$. Vậy tổng $a+b+c=7$.

Câu 100. Biết $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)}dx = a\ln\frac{3}{2}+b,\ (a,b\in Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=1$. **B.** $2a+b=1$. **C.** $a^2+b^2=4$. **D.** $a+2b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\ln x+2$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$, $x=e\Rightarrow t=3$

Khi đó, $I=\int_2^3 \frac{t-2}{t}dt = (t-2\ln t)\Big|_2^3 = 1+2\ln\frac{2}{3} = 1-2\ln\frac{3}{2}$. Vậy $a=-2; b=1$, nên $a+2b=0$.

Câu 101. Tích phân $I=\int_1^e \frac{\ln x\left(2\sqrt{\ln^2 x+1}+1\right)}{x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{4\sqrt{2}+3}{3}$. **B.** $I=\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$. **C.** $I=\frac{4\sqrt{2}+5}{3}$. **D.** $I=\frac{4\sqrt{2}-3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int_1^e \frac{\ln x\left(2\sqrt{\ln^2 x+1}+1\right)}{x}dx=\int_1^e \frac{2\ln x\sqrt{\ln^2 x+1}}{x}dx+\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Xét $I_1=\int_1^e \frac{2\ln x\sqrt{\ln^2 x+1}}{x}dx$. Đặt $t=\ln^2 x+1\Rightarrow dt=\frac{2\ln x}{x}dx$.

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=e\Rightarrow t=2\end{cases}$. $\Rightarrow I_1=\int_1^2\sqrt{t}dt=\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\right|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Xét $I_2\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=e\Rightarrow t=1\end{cases}$. $\Rightarrow I_2=\int_0^1 dt=1$.

$\Rightarrow I=I_1+I_2=\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$.

Câu 102. Tích phân $I=\int_1^e x\left(\ln^2 x+\ln x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I=-2e$. **B.** $I=-e$. **C.** $I=e$. **D.** $I=2e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta biến đổi: $I=\int_1^e x\left(\ln^2 x+\ln x\right)dx=\int_1^e x\ln x\left(\ln x+1\right)dx$.

Đặt $t=x\ln x\Rightarrow dt=\left(\ln x+1\right)dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=e\Rightarrow t=e\end{cases}$. $\Rightarrow I=\int_0^e dt=e$.

Câu 103. Biết $I=\int_0^1\frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. 9. **B.** – 6. **C.** – 9. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Biết $I=\int_1^e\frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$. Giá trị của a là:

Ta có: $I=\int_1^e\frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{1}{3}\int_1^e\frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(3\ln^2 x+x\right)}{x}dx$

Đặt $t=\ln^3 x+3x\Rightarrow dt=\frac{3}{x}\ln^2 x+1$ Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=e\Rightarrow t=1+3e\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\int_3^{1+3e}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\left.\left(\sqrt{t^3}\right)\right|_3^{1+3e}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+3e)^3}-3\sqrt{3}\right)=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+9e+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=9$

Câu 104. Tích phân $I=\int_1^e \frac{2\ln x\sqrt{\ln^2 x+1}}{x}dx$ có gái trị là:

A. $I=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. **B.** $I=\frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. **C.** $I=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$. **D.** $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy: $\left(\ln^2 x+1\right)'=\frac{2\ln x}{x}$. Ta dùng đổi biến số. Đặt $t=\ln^2 x+1\Rightarrow dt=\frac{2\ln x}{x}dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=e\Rightarrow t=2 \end{cases}$. $I=\int_1^2 \sqrt{t}dx=\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. **Chọn A**

Câu 105. Tính $I=\int_e^{e^2}\frac{(1-\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$ được kết quả là

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\ln x\Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Với $x=e\Rightarrow t=1$; $x=e^2\Rightarrow t=2$

$$I=\int_e^{e^2}\frac{(1-\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(1-t)^2\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}(1-t)^3\Big|_1^2=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

Câu 106. Cho tích phân $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=\frac{2}{3}\int_1^e t^2\mathrm{d}t$. **B.** $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t\mathrm{d}t$. **C.** $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t^2\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{2}{3}\int_1^e t\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow \frac{2}{3}t\mathrm{d}t=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $x=e\Rightarrow t=2; x=1\Rightarrow t=1$. Do đó $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t^2\mathrm{d}t$.

Câu 107. Biết $\int_1^e\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c<4$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B.** $S=28$. **C.** $S=25$. **D.** $S=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{3+\ln x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Đổi: Với $x=1\Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=e\Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I=\int_1^e\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=2\int_{\sqrt{3}}^2 t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\Big|_{\sqrt{3}}^2=\frac{16-6\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow a=16$, $b=6$, $c=3\Rightarrow S=a+b+c=25$.

Câu 108. Cho $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=-\frac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\ln x+2=t \Leftrightarrow \ln x=t-2 \Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=\mathrm{e}$ thì $t=3$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3 \frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$. Vậy $2ab=-1$.

Câu 109. Biết $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln a+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x(x+\ln x)}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x+\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$. Khi $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=2+\ln 2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^{2+\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2}=\ln(\ln 2+2)$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$. Vậy $P=8$.

Câu 110. Cho tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}dx=\frac{ae^4+be^2}{2}+c+d\ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

A. $a=b=c=d$ **B.** $a=b^2=\sqrt{c}=\frac{1}{d}$ **C.** A và B đúng **D.** A và B sai

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I=\int_e^{e^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{x^2\ln x+1+\ln x}{x\ln x}dx$

$=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

Xét $M=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Big|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}+1$

Xét $N=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$, đặt $t=\ln x$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$.

Đổi cận $x=e\Rightarrow t=1$ và $x=e^2\Rightarrow t=2$ ta được

$N=\int_1^2\frac{dt}{t}=(\ln|t|)\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

Vậy $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$. Do đó $a=-b=c=d=1$.

Câu 111. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\frac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 \mathrm{e}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln(1+2^{2018})-\ln 2$. **B.** $I=\ln^2(1+2^{2018})-\ln^2 2$.

C. $I=\ln^2(1+2^{2018})-\ln 4$. **D.** $I=\ln^2(1+2^{-2018})-\ln^2 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^{2018}\frac{\ln\left(1+2^x\right)}{\left(1+2^{-x}\right)\log_4 e}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{2018}\ln\left(1+2^x\right)\frac{2^x\ln 2}{1+2^x}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{2018}\ln\left(1+2^x\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(1+2^x\right)\right]$

Do đó $I=\ln^2\left(1+2^x\right)\Big|_0^{2018}=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln^2 2$.

Câu 112. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_1^e\frac{f\left(\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x=e$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. **B.** $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=e$. **C.** $\int\limits_0^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. **D.** $\int\limits_0^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=e$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Cận: $x=1\Rightarrow t=0; x=e\Rightarrow t=1$

$\int\limits_1^e\frac{f\left(\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=e\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=e$.

Câu 113. Biết $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} f\left(\ln x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=16$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

x	e	e^4
t	1	4

$\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} f\left(\ln x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Suy ra $I=\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$

3. $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt3}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt3}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Câu 114. Khi tính $I=\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$, bằng phép đặt $x=2\sin t$, thì được

A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t$. **C.** $\int\limits_0^2 4\cos^2 t\mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_0^2 2\cos^2 t\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt.$

Câu 115. Biết rằng $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$. Khi đó :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos t|\cos t| dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2\cos 2t) dt = (2t + \sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Câu 116. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = a\pi$,a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{6}.$$

Câu 117. Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{a}{b}\pi$ trong đó $a,\ b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

A. $T = 35$. **B.** $T = 24$. **C.** $T = 12$. **D.** $T = 36$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $x = 3\sin t \Leftrightarrow dx = 3\cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \to t = 0$; $x = 3 \to t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - (3\sin t)^2}.3\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9.\frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{4}\pi.$$ Vậy $T = 9.4 = 36$.

Câu 118. Đổi biến $x = 2\sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $x = 2\sin t$, khi đó $dx = 2\cos t dt$. Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{array}\right.$

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{2\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$$

Câu 119. Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}dx=\frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4<a+\sqrt{b}<5$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}dx=\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}dx$.

Đặt $x-3=2\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $dx=2\cos t dt$.

Đổi cận $x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=a+\sqrt{b}\Rightarrow t=\arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=m$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{m} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{m} dt=t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{m}=m-\frac{\pi}{6}.$$

Theo đề ta có $m-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a+\sqrt{b}=\sqrt{3}+3$.

Do đó $a=3$, $b=3$, $a+b=6$.

Câu 120. Tích phân $I=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{-3-x^2+2x}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{1-(x-2)^2}dx$.

Đặt $x-2=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 121. Tích phân $I=\int_0^1\frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}+8$. **B.** $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}-8$.

C. $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8$. **D.** $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}+8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\left(3+3x-x^2\right)'=3-2x$ và $3+4x=9-2(3-2x)$

$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7-2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx-\int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Xét $I_1=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$.

Đặt $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6} \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{14\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\frac{7\pi}{6}$.

Xét $I_2=\int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Đặt $t=3+2x-x^2\Rightarrow dt=(2-2x)dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=3 \\ x=1\Rightarrow t=4 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\int_3^4 \frac{2}{\sqrt{t}}dt=4\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_3^4=4\left(2-\sqrt{3}\right)$.

$I=I_1-I_2=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8$.

Câu 122. Tích phân $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{5\pi}{3}$. **B.** $I=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $I=-\frac{5\pi}{3}$. **D.** $I=-\frac{5\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ***Cách 1:*** Ta có: $\left(5+4x-x^2\right)'=4-2x$ và $4x-3=5-2(4-2x)$.

$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{2(4-2x)}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$.

Xét $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{9-(x-2)^2}}dx$.

Đặt $x-2=3\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=3\cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{7}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{5.3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}dt=\frac{5\pi}{3}$.

Xét $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{2(4-2x)}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$.

Đặt $t = 5 + 4x - x^2 \Rightarrow dt = 4 - 2x$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{27}{4} \\ x = \frac{7}{2} \Rightarrow t = \frac{27}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2 = 0$.

$\Rightarrow I = \frac{5\pi}{3}$.

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 123. Cho $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}\,dc = a\pi + b$ với $a, b \in R$. Giá trị $a + b$ gần nhất với

A. $\frac{1}{10}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Đáp án C. Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. I được viết lại là

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - 2\sin t\cos t}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\cos t - \sin t)^2}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t - \sin t)\cos t dt$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t\cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t d(2t) + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) d(2t)$$

$\Leftrightarrow I = \left.\frac{\cos 2t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left.\frac{\sin 2t + 2t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3} - 1}{8}$. Suy ra $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3} - 1}{8} \approx 0{,}175$.

Nhận xét: *Hai bài toán trên chính là cách hướng có thể ra đề để tránh tình trạng sử dụng máy tính Casio. Thí sinh hiểu bản chất và cách làm thực sự sẽ không gặp khó khăn nhiều khi giải quyết các bài toán này.*

Câu 124. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = \frac{\pi}{3}$. **C.** $I = \frac{\pi}{4}$. **D.** $I = \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. Cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

Câu 125. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi + 2}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2 + \pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

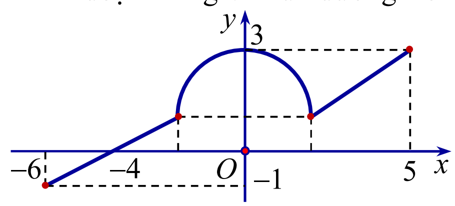
Chọn A. Đặt $t = \tan x$. Có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2 \Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$

$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} \mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan u,\left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u$; đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 u}{\left(1+\tan^2 u\right)^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2+\pi}{8}$$

Câu 126. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$.

C. $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2 & \text{khi } -6\le x\le -2\\ 1+\sqrt{4-x^2} & \text{khi } -2\le x\le 2\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & \text{khi } 2\le x\le 5\end{cases}$$

$$I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\int_{-6}^{5}f(x)\mathrm{d}x+2\int_{-6}^{5}\mathrm{d}x=\int_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x+22$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-6}^{-2}+J+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{x}{3}\right)\Big|_2^5+22=J+28.$$

Tính $J=\int_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$. $x=2$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$; $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

$$J=\int_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x=4+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=4+2\pi$$. Vậy $I=32+2\pi$.

Câu 127. Khi đổi biến $x=\sqrt{3}\tan t$, tích phân $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}t$ **C.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}t\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $x=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=0$; Khi $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{6}$.

Ta có $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)}{3\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}t$.

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Với P(x) là đa thức của x, ta thường gặp các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos x dx$	$\int_a^b P(x).\sin x dx$	$\int_a^b P(x).\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

DẠNG 1

Câu 1. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin ax dx,\ a \ne 0$ có giá trị là:

A. $I = \dfrac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **B.** $I = \dfrac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **C.** $I = \dfrac{\pi + 6 + 3\sqrt{3}}{6a}$. **D.** $I = \dfrac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin ax dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{a}\cos x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \left(\frac{-1}{a}x\cos x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(\frac{-1}{a}x\cos x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{a}\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}.$$

Câu 2. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x)\cos 2x dx = \dfrac{1}{a} + \dfrac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab.

A. $ab = 32$. **B.** $ab = 2$. **C.** $ab = 4$. **D.** $ab = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x)\cos 2x dx = \left((1+x)\dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{\pi}{b} \Rightarrow a = 4; b = 8 \Rightarrow ab = 32$

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin 2x dx$.

B. $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$.

C. $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$.

D. $I = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\sin 2x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin 2x dx$.

Câu 4. Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ là:

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2xdx=\left(\frac{1}{2}x\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=-\frac{\pi\sqrt{3}}{24}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{24}\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{12}$$

Câu 5. Biết rằng $\int_0^1 x\cos 2xdx=\frac{1}{4}(a\sin 2+b\cos 2+c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2a+b+c=-1$. **B.** $a+2b+c=0$. **C.** $a-b+c=0$. **D.** $a+b+c=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{\sin 2x}{2}\end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 x\cos 2xdx=\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\sin 2xdx=\frac{1}{4}(2\sin 2+\cos 2-1)$. Vậy $a-b+c=0$.

Câu 6. Tính nguyên hàm $I=\int(x-2)\sin 3xdx=-\frac{(x-2)\cos 3x}{a}+b\sin 3x+C$. Tính $M=a+27b$. Chọn đáp án đúng:

A. 6 **B.** 14 **C.** 34 **D.** 22

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\ dv=\sin 3xdx\end{cases}$, ta được: $\begin{cases}du=dx\\ v=-\frac{\cos 3x}{3}\end{cases}$. Do đó:

$$I=-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}+\frac{1}{9}\sin 3x+c\Rightarrow a=3;b=\frac{1}{9}\Rightarrow m=6$$

Câu 7. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos x+2m)dx=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào sau dưới đây đúng ?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$. **C.** $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos x+2m)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2mxdx=I+J$$

+) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$ Khi đó $I=x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

+) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2mxdx=mx^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}m$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos x+2m)dx=\frac{\pi^2}{4}m+\frac{\pi}{2}-1$

Theo giả thiết ta có $\frac{\pi^2}{4}m+\frac{\pi}{2}-1=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow m=8$.

Câu 8. Tính tích phân $\int_0^{\pi} x\left(x+\sin x\right)dx = a\pi^3 + b\pi$. Tính tích ab:

A. 3 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 6 **D.** $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I = \int_0^{\pi} x^2dx + \int_0^{\pi} x\sin xdx = \int_0^{\pi} x^2dx - \int_0^{\pi} xd\left(\cos x\right) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} - \left(x\cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx$

$= \frac{\pi^3}{3} + \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}\pi^3 + \pi$

Câu 9. Tích phân $\int_0^{\pi}(3x+2)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{4}\pi^2 - \pi$. **B.** $\frac{3}{4}\pi^2 + \pi$. **C.** $\frac{1}{4}\pi^2 + \pi$. **D.** $\frac{1}{4}\pi^2 - \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3x+2)(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}(3x+2)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$

$I_1 = \int_0^{\pi}(3x+2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi^2 + 2\pi$.

$I_2 = \int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,\mathrm{d}x$. Dùng tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = 3x+2 \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{3}{4}(\cos 2x)\Big|_0^{\pi} = 0$.

Vậy $I = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi^2 + 2\pi\right) = \frac{3}{4}\pi^2 + \pi$.

Câu 10. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi - 2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây ?

A. $\left(\frac{7}{4};2\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{6};\frac{8}{7}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos mx\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{m}\sin mx \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{x}{m}\sin mx\Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} - \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2m^2} + \frac{1}{m^2}.\cos mx\Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} = \left(\frac{\pi-2}{2}\right).\frac{1}{m^2}$.

Theo giả thiết ta có $\left(\frac{\pi-2}{2}\right).\frac{1}{m^2} = \frac{\pi-2}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$. Vì m là số hữu tỷ dương nên $m = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{khi} \quad x \ge 0 \\ x.\sin x & \text{khi} \quad x \le 0 \end{cases}$. Tích tích phân $I = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

A. $I = \frac{7}{6} + \pi$. **B.** $I = \frac{2}{3} + \pi$. **C.** $I = -\frac{1}{3} + 3\pi$. **D.** $I = \frac{2}{5} + 2\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn $[-\pi;1]$.

Ta có: $I = \int\limits_{-\pi}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{0} x.\sin x\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}(2x^2+x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

• $I_1 = \int\limits_{-\pi}^{0} x.\sin x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$ $I_1 = (-x\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} + \int\limits_{-\pi}^{0}\cos x\mathrm{d}x = (-x\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} + \sin x\Big|_{-\pi}^{0} = \pi$.

• $I_2 = \int\limits_{0}^{1}(2x^2+x)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \dfrac{7}{6}$. Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{7}{6} + \pi$.

Câu 12. Tính $\int\limits_{0}^{\pi} x(1+\cos x)\mathrm{d}x$. Kết quả là

A. $\dfrac{\pi^2}{2} - 2$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{3} + 3$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{3} - 3$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2} + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = (1+\cos x)\mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = x + \sin x \end{cases}$

Khi đó: $I = x(x+\sin x)\Big|_{0}^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}(x+\sin x)\mathrm{d}x = \pi^2 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \cos x\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \pi^2 - \left(\dfrac{\pi^2}{2} + 1 + 1\right) = \dfrac{\pi^2}{2} - 2$

Câu 13. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\cos^2 x}dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a+b$ là ?

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** -2

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I = (x\tan x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{\cos x} = (x\tan x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow I = (x\tan x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$$

Suy ra $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; b = -\ln 2$. Tổng $a + b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \ln 2 \approx -0{,}1157969114$

Nhận xét: *Bài toán trên đòi hỏi khả năng biến đổi của thí sinh và nhắc lại kiến thức về khái niệm phần nguyên, sẽ có thí sinh khi đi thi đã tìm ra kết quả phân tích nhưng lúng túng trong việc lựa chọn đáp án vì không nhớ rõ khái niệm phần nguyên.*

Câu 14. Cho $I = \int\limits_{0}^{\frac{x}{4}} x\tan^2 xdx = \dfrac{\pi}{a} - \ln\sqrt{b} - \dfrac{\pi^2}{32}$ khi đó tổng $a+b$ bằng

A. 4 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx=\frac{\pi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\frac{1}{\cos^2 x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\tan x\end{cases}$

$I_1=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{4}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$ Vậy $I=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi^2}{32}$

Câu 15. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8}-2\ln\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$.

B. $I=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8}+2\ln\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$.

C. $I=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}-2\ln\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$.

D. $I=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}+2\ln\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}dx=\frac{1}{2}I\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos^2\dfrac{x}{2}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=2\tan\dfrac{x}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\left(2x\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{x}{2}dx\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{8}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx\right).$$

$$=\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{8}+4\int_1^{\cos\frac{\pi}{8}}\frac{1}{t}dt=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8}+2\ln\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

Câu 16. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a-8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}\tan x\end{cases}$. Ta có

$$I=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=-\frac{1}{4}$$

Do đó, $16a-8b=4$.

Câu 17. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x-\sin x}{2-2\cos x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+4\ln\sqrt{2}+\ln 2\right)$. **B.** $I=\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\ln\sqrt{2}-\ln 2\right)$.

C. $I=\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+4\ln\sqrt{2}-\ln 2\right)$. **D.** $I=\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\ln\sqrt{2}+\ln 2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta biến đổi: $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x-\sin x}{2-2\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1-\cos x}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$.

Xét $I_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1-\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-2\cot\frac{x}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\left[\left(-2x.\cot\frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot\frac{x}{2}dx\right]=\frac{1}{2}\left[-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+4\ln\sqrt{2}\right].$$

Xét $I_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$. Đặt $t=1-\cos x\Rightarrow dt=\sin x dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}\ln 2$. $I=I_1-I_2=\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+4\ln\sqrt{2}-\ln 2\right)$.

Câu 18. Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x^3+2x\right)\cos x+x\cos^2 x}{\cos x}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{5\pi^4}{324}+\frac{2\pi^2}{9}+\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $I=\frac{5\pi^4}{324}-\frac{2\pi^2}{9}+\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $I=\frac{5\pi^4}{324}+\frac{2\pi^2}{9}-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $I=\frac{5\pi^4}{324}+\frac{2\pi^2}{9}+\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x^3+2x\right)\cos x+x\cos^2 x}{\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+2x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=\left(\frac{1}{4}x^4+x^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx.$$

Xét $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$. $\Rightarrow I_1=\left(x\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow I=\left(\frac{1}{4}x^4+x^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+I_1=\frac{5\pi^4}{324}+\frac{2\pi^2}{9}+\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 19. Cho $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ và $\int\limits_0^a x\tan x\mathrm{d}x = m$ Tính $I = \int\limits_0^a \left(\dfrac{x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x$ theo a và m.

A. $I = a\tan a - 2m$. **B.** $I = -a^2\tan a + m$. **C.** $I = a^2\tan a - 2m$. **D.** $I = a^2\tan a - m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ v = \tan x \end{cases}$ $I = \int\limits_0^a \left(\dfrac{x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x = x^2\tan x\Big|_0^a - \int\limits_0^a 2x\tan x\mathrm{d}x = a^2\tan a - 2m$.

Câu 20. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x$. Kết quả là

A. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x + \sin^2 x\cos x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Tính I_1: Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$.

Nên $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - 1$

Tính I_2: Đặt $u = \sin x$. Ta có $\mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$.

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 u^2 du = \dfrac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$. Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$.

Câu 21. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x}.\sin\sqrt{x}dx = a\pi^2 + b$. Tính $A = a - b$. Chọn đáp án đúng:

A. 7 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt;$ $dv = \sin tdt$ chọn $v = -\cos t$

Vậy $I = 2\left[-t^2\cos t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos tdt\right]$ Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$ $dv = \cos tdt$ chọn $v = \sin t$

$I_1 = \int_0^{\pi} t\sin tdt = t\sin t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin tdt = \cos t\Big|_0^{\pi} = -2$

Do đó: $I = 2\left[-t^2\cos t\Big|_0^{\pi} - 4\right] = 2\pi^2 - 8 \Rightarrow a = 2; b = -8 \Rightarrow A = 10$

Câu 22. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int\limits_0^1 x^2\left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1.** Tự luận:

Xét $I_n = \int\limits_0^1 x^2\left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = x\left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-\left(1 - x^2\right)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$.

$$I_n = \left.\frac{-x\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x\right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[2(n+1)I_n - I_{n+1}\right] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Cách 2. Trắc nghiệm:

Ta thấy $0 \le \left(1-x^2\right) \le 1$ với mọi $x \in [0;1]$, nên

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = I_n,$$

suy ra $\frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$, nên $\lim\frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$. Dựa vào các đáp án, ta chọn **A.**

DẠNG 2

Câu 23. Cho $\int_0^a xe^x \mathrm{d}x = 1\,(a \in \mathbb{R})$. Tìm a?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** e.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\int_0^a xe^x \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow (x-1)e^x\Big|_0^a = (a-1)e^a + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x = ae^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a+b$ là

A. 0 . **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Vậy $I = \int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$.

Suy ra $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$.

Câu 25. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích ab bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** -15. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$.

Vậy $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x\Big|_0^1 = e+1$. Suy ra $a=1; b=1 \Rightarrow ab=1$.

Câu 26. Biết $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae+b$, với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. $a-b=2$. **B.** $a^3+b^3=28$. **C.** $ab=3$. **D.** $a+2b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx = \int_0^1 (2x+3)\mathrm{d}(e^x) = (2x+3)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 5e-3-2e+2 = 3e-1.$

Vậy $a=3, b=-1$ nên $a+2b=1$.

Câu 27. Tìm a sao cho $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx = 4$, chọn đáp án đúng

A. 1 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2.e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow I = 2x.e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^a - 2\int_0^a e^{\frac{x}{2}} dx = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4.e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^a = 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4$

Theo đề ra ta có: $I = 4 \Leftrightarrow 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 2$

Câu 28. Cho tích phân $I = \int_0^1 (x+1)(e^x-3)dx$. Kết quả tích phân này dạng $I = e-a$. Đáp án nào sau đây đúng ?

A. $a=\frac{9}{2}$ **B.** $a=\frac{9}{4}$ **C.** $a=\frac{9}{5}$ **D.** $a=\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = (e^x-3)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int (e^x-3)dx = (e^x-3x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = (x+1)(e^x-3x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x-3x)dx = (x+1)(e^x-3x)\Big|_0^1 - \left(e^x - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = e - \frac{9}{2}$

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^1 (a-x)(b+e^{2x})dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2$. Tính $A = \frac{15}{12}ab(a+b)$

A. 27 **B.** 30 **C.** 16 **D.** 45

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} u = a-x \\ dv = (b+e^{2x})dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = bx + \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Chọn D. $I = (a-x)\left(bx+\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^1 = \left(ab - b - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{4}\right)e^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2$

$\begin{cases} ab - b - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 45$

Câu 30. Tìm m để $\int_0^1 (mx+1)e^x dx = e$?

A. 0 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$$\int_0^1 (mx+1)e^x dx = \int_0^1 (mx+1)dx(e^x) = (mx+1)e^x\Big|_0^1 - m\int_0^1 e^x d(mx+1) = (mx+1)e^x\Big|_0^1 - m\int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[(mx+1)e^x\right]_0^1 - \left[me^x\right]_0^1 = (m+1)e - 1 - me + m = e + m - 1$$

Câu 31. Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x}dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P = a - 3b$.

A. $P = -3$. **B.** $P = -2$. **C.** $P = -4$. **D.** $P = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$.

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x}dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{2}\Bigg|_0^m - \int_0^m e^{2x}dx = \frac{(2m-1)e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_0^m = me^m - e^{2m} + 1$$

$I < m \Leftrightarrow me^{2m} - e^{2m} + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(e^{2m}-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Suy ra $a = 0, b = 1 \Rightarrow a - 3b = -3$.

Câu 32. Biết rằng tích phân $\int_0^4 \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2x+1}}dx = ae^4 + b$. Tính $T = a^2 - b^2$

A. $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = \frac{3}{2}$. **D.** $T = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $I = \int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}e^x dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{2x+2}{\sqrt{2x+1}}e^x dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{2x+1}.e^x dx + \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}dx\right)$.

Xét $I_1 = \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1} \end{cases}$

Do đó $I_1 = e^x.\sqrt{2x+1}\Big|_0^4 - \int_0^4 e^x.\sqrt{2x+1}dx$.

Suy ra $I = \frac{3e^4 - 1}{2}$. Khi đó $a = \frac{3}{2}, b = \frac{-1}{2} \Rightarrow T = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$.

Câu 33. Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right).e^{x+\frac{1}{x}}.dx = \frac{a}{b}.e^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 12. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right).e^{x+\frac{1}{x}}.dx=\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}.dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx=J+K$

Tính $J=\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}.dx$. Đặt $\begin{cases}u=e^{x+\frac{1}{x}}\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx\\ v=x\end{cases}$

$\Rightarrow J=\left(x.e^{x+\frac{1}{x}}\right)\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(x-\frac{1}{x}\right).e^{x+\frac{1}{x}}.dx=12.e^{\frac{145}{12}}-\frac{1}{12}.e^{\frac{145}{12}}-K=\frac{143}{12}.e^{\frac{145}{12}}-K$

$\Rightarrow I=J+K=\frac{143}{12}.e^{\frac{145}{12}}$.

Theo giả thiết: $I=\frac{a}{b}.e^{\frac{c}{d}}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản nên $\frac{a}{b}=\frac{143}{12}$ và $\frac{c}{d}=\frac{145}{12}\Rightarrow a=143$, $b=12$, $c=145$, $d=12$. Vậy $bc-ad=24$.

DẠNG 3.

Câu 34. Cho $I=\int_1^e x\ln x dx=\frac{a.e^2+b}{c}$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b+c$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}$ nên $\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$I=\int_1^e x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2+1}{4}.\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=4\end{cases}$. Vậy $T=a+b+c=6$.

Câu 35. Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1\ln(2x+1)dx$ được biểu diễn dạng $a.\ln3+b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2}{2x+1}dx\\ v=x\end{cases}$.

Ta có $I=\int_0^1\ln(2x+1)dx=x\ln(2x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x}{2x+1}dx=\ln3-\int_0^1\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=\ln3-\left(x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}\ln3-1$. Khi đó $a=\frac{3}{2};b=-1$. Vậy $ab^3=-\frac{3}{2}$.

Câu 36. Cho $\int_0^1\ln(x+1)dx=a+\ln b$, $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $(a+3)^b$.

A. 25. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** 16. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x+1}dx \\ v=x+1 \end{cases}$.

$$I=\int_0^1 \ln(x+1)dx=(x+1)\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1(x+1).\frac{1}{x+1}dx=2\ln 2-x\Big|_0^1=2\ln 2-1=-1+\ln 4.$$

$\Rightarrow a=-1, b=4 \Rightarrow (a+3)^b=16$.

Câu 37. Biết tích phân $\int_1^2(4x-1)\ln x dx=a\ln 2+b$ với $a, b\in Z$. Tổng $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** $A(1;-2;1)$ **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=(4x-1)dx. \end{cases}$.

Ta có $\int_1^2(4x-1)\ln x dx=x(2x-1)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(2x-1)dx=6\ln 2-(x^2-x)\Big|_1^2=6\ln 2-2$.

Vậy $2a+b=10$.

Câu 38. Biết $\int_1^3\dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx=\dfrac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng?

A. 46. **B.** 35. **C.** 11. **D.** 48.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int_1^3\dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int_1^3(3+\ln x)d\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=-\dfrac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3+\int_1^3\dfrac{1}{x+1}d(3+\ln x)$

$$=-\frac{3+\ln 3}{4}+\frac{3}{2}+\int_1^3\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x}dx=\frac{3-\ln 3}{4}+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^3$$

$$=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 4+\ln 2=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 2$$

$$=\frac{3+3\ln 3-4\ln 2}{4}=\frac{3+\ln 27-\ln 16}{4}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=27\Rightarrow P=46. \\ c=16 \end{cases}$$

Câu 39. Giả sử $\int_1^2(2x-1)\ln x dx=a\ln 2+b,(a;b\in\mathbb{Q})$. Khi đó $a+b$?

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=x^2-x \end{cases}$.

Ta có $\int_1^2(2x-1)\ln x dx=(x^2-x)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)dx=2\ln 2-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $a = 2; b = -\frac{1}{2}$. Vậy $a + b = \frac{3}{2}$.

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) \ln x \, dx$.

A. $I = \frac{2\ln 2 + 6}{9}$. **B.** $I = \frac{6\ln 2 + 2}{9}$. **C.** $I = \frac{2\ln 2 - 6}{9}$. **D.** $I = \frac{6\ln 2 - 2}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: $I = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) \ln x \, dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \left(x^2 - 1\right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$

Do đó $I = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln x \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{9} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{6\ln 2 + 2}{9}$.

Cách 2: $\int\limits_1^2 \left(x^2 - 1\right) \ln x dx = \int\limits_1^2 \ln x d\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln x \Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right) d(\ln x)$

$= \frac{2}{3}\ln 2 - \int\limits_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx = \frac{2}{3} - \left(\frac{x^3}{9} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{2 + 6\ln 2}{9}$.

Câu 41. Tích phân $I = \int\limits_1^a x \ln x dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a^2 \ln a}{2} + \frac{1 - a^2}{4}$. **B.** $I = \frac{a^2 \ln a}{2} - \frac{1 - a^2}{4}$.

C. $I = \frac{a^2 \ln|a|}{2} + \frac{1 - a^2}{4}$. **D.** $I = \frac{a^2 \ln|a|}{2} - \frac{1 - a^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} . \ln x\right)\Big|_1^a - \int\limits_1^a \frac{x}{2} dx = \left(\frac{x^2}{2} . \ln x\right)\Big|_1^a - \left(\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^a = \frac{a^2 \ln|a|}{2} + \frac{1 - a^2}{4}$

Câu 42. Kết quả tích phân $\int_0^2 \left(2x + \ln(x+1)\right) dx = 3\ln 3 + b$. Giá trị $3 + b$ là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Hướng dẫn giải

Chọn C. $I = \int_0^2 \left(2x + \ln(x+1)\right) dx = A + B$

Tính $A = \int_0^2 2x dx = x^2\Big|_0^2 = 4$

Tính $B = \int_0^2 \left(\ln(x+1)\right) dx$. Xem: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases}$ ta chọn được $\begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x + 1 \end{cases}$

Dùng công thức tích phân từng phần

$B=\int_0^2\left(\ln\left(x+1\right)\right)dx=\left(x+1\right).\ln\left(x+1\right)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{x+1}{x+1}dx=3\ln 3-x\Big|_0^2=3\ln 3-2$

Vậy: $I=\int_0^2\left(2x+\ln\left(x+1\right)\right)dx=3\ln 3+2$

Câu 43. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2(4x+3).\ln xdx=7\ln a+b$. Tính $\sin\frac{(a+b)\pi}{4}$:

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\left(4x+3\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=2x^2+3x\end{cases}$. Khi đó

$I=\left(2x^2+3x\right)\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2\frac{2x^2+3x}{x}dx=\left(2.2^2+3.2\right)\ln 2-\left(2.1^2+3.1\right)\ln 1-\int\limits_1^2\left(2x+3\right)dx$

$=14\ln 2-0-\left(x^2+3x\right)\Big|_1^2=14\ln 2-0-\left[\left(2^2+3.2\right)-\left(1^2+3.1\right)\right]=14\ln 2-\left(10-4\right)=14\ln 2-6$

Câu 44. Cho tích phân $I=\int\limits_0^1\left[3x^2-2x+\ln(2x+1)\right]dx$. Xác định a biết $I=b\ln a-c$ với a,b,c là các số hữu tỉ

A. $a=3$ **B.** $a=-3$ **C.** $a=\frac{2}{3}$ **D.** $a=-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int\limits_0^1\left[3x^2-2x+\ln(2x+1)\right]dx=\int\limits_0^1\left[3x^2-2x\right]dx+\int\limits_0^1\left[\ln(2x+1)\right]dx=I_1+I_2$

Giải I_2 bằng phương pháp từng phần $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ dv=dx\end{cases}$ $I=\frac{3}{2}\ln 3-1\Rightarrow a=3$

Câu 45. Cho $I=\int\limits_1^3\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx=a(\ln 3+1)+\ln b$ với a,b∈R. Tính giá trị biểu thức $T=4a+2b$

A. 4 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ở bài toán này máy tính dường như không giúp được nhiều trong việc giải quyết bài toán, đây là bài toán sử dụng phương pháp tích phân thành phần ở mức độ vận dụng.

Đặt $\begin{cases}u=3+\ln x\\ v=\frac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{dx}{x}\\ v=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân thành phần $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$ thì ta được

$I=\frac{(3+\ln x)x}{x+1}\Big|_1^3-\int\limits_1^3\frac{dx}{x+1}=\frac{(3+\ln x)x}{x+1}\Big|_1^3-\ln(x+1)\Big|_1^3\ \left(\frac{3(3+\ln 3)}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\ln 4-\ln 2\right)$

$=\frac{3}{4}(\ln 3+1)-\ln 2=\frac{3}{4}(\ln 3+1)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Vậy $a=\frac{3}{4};b=\frac{1}{2}\Rightarrow T=4a+2b=3+1=4$

Nhận xét: *Điểm mấu chốt để xử lí nhanh bài toán nằm ở việc đặt* $v=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}$. *Một số thí sinh chọn đáp án B vì khi làm đến* $I=\frac{3}{4}(\ln 3+1)-\ln 2$ *không để ý dấu nên suy ra luôn* $a=\frac{3}{4};b=2$ *dẫn đến kết quả sai.*

Câu 46. Cho tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx=a\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}\right)-b\pi$. Tính $A=\log_{\sqrt{3}}a+\log_{\sqrt{6}}b$

A. -3 **B.** 2 **C.** -1 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $u=\ln(\sin x)\Rightarrow du=\frac{\cos x}{\sin x}dx$ $dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$ chọn $v=\tan x$

Vậy $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx=\left[\tan x.\ln x(\sin x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx$

Câu 47. Biết $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=a\sqrt{e}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a.b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\end{cases}\to\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \mathrm{d}v=2\sqrt{x}\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-2\int\limits_1^e\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-4\sqrt{x}\Big|_1^e=-2\sqrt{e}+4\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$.

Vậy $P=ab=-8$.

Câu 48. Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x=a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. 33. **B.** 25. **C.** 42. **D.** 39.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Xét $I=\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x=6$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=x^2-1\end{cases}$.

Ta có $I=(x^2-1)\ln(x+1)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\frac{x^2-1}{x+1}\mathrm{d}x=3\ln 3-\int\limits_0^2(x-1)\mathrm{d}x=3\ln 3-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^2=3\ln 3$.

Vậy $a=3$, $b=3\Rightarrow 6a+7b=39$.

Câu 49. Cho $\int\limits_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x=\frac{a^2\ln 2-bc\ln 3+c}{4}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=13$. **B.** $T=15$. **C.** $T=17$. **D.** $T=11$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+2}\\ v=\frac{x^2-4}{2}\end{cases}$.

$\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\right]dx = \dfrac{x^2-4}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x-2}{2}dx + \int_0^1 \dfrac{x}{x+2}dx$

$= \dfrac{-3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1 + \left(x - 2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1 \quad = \dfrac{-3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 + \dfrac{3}{4} + 1 - 2(\ln 3 - \ln 2)$

$= \dfrac{-14\ln 3 + 16\ln 2 + 7}{4}$. Suy ra: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 7 \end{cases}$.

Vậy $T = a+b+c = 13$.

Câu 50. Biết $\int_2^3 \ln(x^3-3x+2)dx = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a.b + c$

A. $S = 60$. **B.** $S = -23$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int_2^3 \ln(x^3-3x+2)dx = x.\ln(x^3-3x+2)\Big|_2^3 - \int_2^3 x d\ln(x^3-3x+2)$

$= 3\ln 20 - 4\ln 2 - \int_2^3 \dfrac{x(3x^2-3)}{(x-1)^2(x+2)}dx$

$= 3\ln 20 - 4\ln 2 - \int_2^3 \dfrac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)}dx = 3\ln 5 + 2\ln 2 - \int_2^3 \dfrac{3(x-1)(x+2)+6}{(x-1)(x+2)}dx$

$= 3\ln 5 + 2\ln 2 - (3x)\Big|_2^3 - 2\int_2^3 \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = 3\ln 5 + 2\ln 2 - 3 - 2\ln|x-1|\Big|_2^3 + 2\ln|x+2|\Big|_2^3$

$= 5\ln 5 - 4\ln 2 - 3$. Suy ra $a = 5; b = -4; c = -3$. Do đó $S = ab + c = -23$.

Câu 51. Cho biết tích phân $I = \int_0^1 (x+2)\ln(x+1)dx = a\ln 2 + \dfrac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a = b$. **B.** $a < b$. **C.** $a > b$. **D.** $a = b + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x+2)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$.

$I = \left[\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{x^2+4x}{x+1}dx \quad = \dfrac{5}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x + 3 - \dfrac{3}{x+1}\right)dx$

$= \dfrac{5}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2} + 3x - 3\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 = 4\ln 2 + \dfrac{-7}{4}$. Suy ra $a = 4$, $b = 4$. Vậy $a = b$.

Câu 52. Cho $I = \int_1^2 \dfrac{x + \ln x}{(x+1)^2}dx = \dfrac{a}{b}\ln 2 - \dfrac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{a+b}{c}$.

A. $S = \dfrac{2}{3}$. **B.** $S = \dfrac{5}{6}$. **C.** $S = \dfrac{1}{2}$. **D.** $S = \dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases} x+\ln x = u \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ -\dfrac{1}{x+1} = v \end{cases}$. Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1}(x+\ln x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1+x}{x}.\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2+\ln 2)+\frac{1}{2}+\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}(2+\ln 2)+\frac{1}{2}+\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}$$

Vậy $a=2; b=3; c=6 \Rightarrow S = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 53. Cho $a>b>-1$. Tích phân $I=\int_a^b \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I=(x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - a + b$. **B.** $I=(x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a$.

C. $I=\dfrac{1}{(x+1)}\Big|_a^b$. **D.** $I = x\ln(x+1)\Big|_a^b + \int_a^b \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = x+1 \end{cases}$

Do đó $I=\int_a^b \ln(x+1)\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - x\Big|_a^b$

$= (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a$

Câu 54. Biết $\int_e^{e^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x} - \dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{ae^2+be+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét tích phân: $\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$. Đặt $u=\dfrac{1}{\ln x} \Rightarrow$; $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$. $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ chọn $v=x$.

Khi đó $\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x = \dfrac{x}{\ln x}\Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_e^{e^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{-e^2+2e}{2}$.

Do đó $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$. Vậy $a^2+b^2+c^2=5$

Câu 55. Biết $\int_0^3 x\ln(x^2+16)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$ trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=-16$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+16\right) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{x^2+16} dx \\ v = \dfrac{x^2+16}{2} \end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^3 x \ln\left(x^2+16\right) dx = \dfrac{x^2+16}{2} \ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 x\, dx = \dfrac{x^2+16}{2}\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3 - \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^3$

$= \dfrac{25}{2}\ln 25 - 8\ln 16 - \dfrac{9}{2} = 25\ln 5 - 32\ln 2 - \dfrac{9}{2}$. Do đó $a = 25, b = -32, c = -9 \Rightarrow T = -16$.

Câu 56. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \left(2019\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}\right) x^{2018} dx$.

A. $I = 2^{2017}$. **B.** $I = 2^{2019}$. **C.** $I = 2^{2018}$. **D.** $I = 2^{2020}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$I = \int\limits_1^2 \left(2019\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}\right) x^{2018} dx = 2019\int\limits_1^2 x^{2018}\log_2 x dx + \dfrac{1}{\ln 2}\int\limits_1^2 x^{2018} dx = 2019 I_1 + \dfrac{1}{\ln 2} I_2$.

Trong đó $I_2 = \int\limits_1^2 x^{2018} dx = \dfrac{x^{2019}}{2019}\Big|_1^2 = \dfrac{2^{2019}-1}{2019}$.

và $I_1 = \int\limits_1^2 x^{2018}\log_2 x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \log_2 x \\ dv = x^{2018} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x.\ln 2} dx \\ v = \dfrac{x^{2019}}{2019} \end{cases}$.

Khi đó $I_1 = \left(\dfrac{x^{2019}}{2019}.\log_2 x\right)\Big|_1^2 - \dfrac{1}{2019.\ln 2} I_2 = \dfrac{2^{2019}}{2019} - \dfrac{1}{2019.\ln 2}.\dfrac{2^{2019}-1}{2019} = \dfrac{2^{2019}}{2019} - \dfrac{2^{2019}-1}{2019^2.\ln 2}$.

Vậy $I = 2^{2019}$.

Câu 57. Biết $I = \int\limits_1^3 \dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = a(1+\ln 3) - b\ln 2$, $(a, b \in \mathbb{Q})$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. $a^2+b^2 = \dfrac{7}{16}$. **B.** $a^2+b^2 = \dfrac{16}{9}$. **C.** $a^2+b^2 = \dfrac{25}{16}$. **D.** $a^2+b^2 = \dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt: $\begin{cases} u = 3+\ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$. Khi đó:

$I = -\dfrac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int\limits_1^3 \dfrac{1}{x(x+1)} dx = -\dfrac{3+\ln 3}{4} + \dfrac{3}{2} + \int\limits_1^3 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) dx = \dfrac{3-\ln 3}{4} + \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_1^3$

$= \dfrac{3-\ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \dfrac{3}{4}(1+\ln 3) - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2 = \dfrac{25}{16}$.

Câu 58. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2} dx = a\ln 2 + \dfrac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a+3b+c$.

A. $S = 4$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Khi đó, ta có:

$\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx = -\dfrac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{x}\Big|_1^2 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}$. Suy ra $a = -\dfrac{1}{2}$, $b=1$, $c = 2$.

Vậy giá trị của $S = 4$.

Câu 59. Biết rằng $\int\limits_1^2 \ln(x+1)dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a+b+c$

A. $S = 0$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = x \end{cases}$

Khi đó, ta có: $\int\limits_1^2 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \dfrac{x}{x+1}dx$

$= 2\ln 3 - \ln 2 - \int\limits_1^2 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln 3 - \ln 2 - \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$= 2\ln 3 - \ln 2 - (2 - \ln 3 - 1 + \ln 2) = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$. Suy ra $S = a+b+c = 3-2-1 = 0$.

Câu 60. Tính tích phân $I = \int\limits_4^5 (x+1)\ln(x-3)dx$?

A. $10\ln 2$. **B.** $10\ln 2 + \dfrac{19}{4}$. **C.** $\dfrac{19}{4} - 10\ln 2$. **D.** $10\ln 2 - \dfrac{19}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-3) \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x-3}dx \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$.

$I = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right)\ln(x-3)\Big|_4^5 - \int\limits_4^5 \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + x}{x-3}dx = \dfrac{35}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\int\limits_4^5 \dfrac{x^2 - 9 + 9}{x-3}dx - \int\limits_4^5 \dfrac{x-3+3}{x-3}dx$

$= \dfrac{35}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2} + 3 + 9\ln 2\right) - (1 + 3\ln 2) = 10\ln 2 - \dfrac{19}{4}$.

Câu 61. Biết rằng $\int\limits_2^3 x\ln x\,dx = m\ln 3 + n\ln 2 + p$, trong đó m, n, $p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 18. **C.** 9. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \left.\frac{x^3}{6}\right|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{19}{6} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ n = -2 \\ p = -\frac{19}{6} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{9}{2}$.

Câu 62. Biết $\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a+b+c$ là

A. $T = 10$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 11$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+9\right) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{2x}{\left(x^2+9\right)}\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2+9}{2} \end{cases}$

Suy ra $\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\right|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2+9}{2}.\frac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x = 25\ln 5 - 9\ln 3 - 8$.

Do đó $a = 25$, $b = -9$, $c = -8$ nên $T = 8$.

Câu 63. Tích phân $I = \int_0^1 \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)dx$ có giá trị là:

A. $I = \sqrt{2} - 1 + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $I = \sqrt{2} - 1 - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

C. $I = -\sqrt{2} + 1 + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $I = -\sqrt{2} + 1 - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\begin{cases} u = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = \left.\left(x.\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right)\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Xét $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left.\left(\sqrt{t}\right)\right|_1^2 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow I = I_1 + \left.\left(x.\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right)\right|_0^1 = \sqrt{2} - 1 + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Câu 64. Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx = ae^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a - 3b$ là:

A. $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $-\frac{13}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\right|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx + \int_0^1 dt = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}$, với $t = \ln x$.

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{4} \Rightarrow 2a - 3b = -\frac{13}{4}$.

Câu 65. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, ta được kết quả

A. $-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$ **B.** $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\ln 2.$ **C.** $-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\ln 2.$ **D.** $-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\ln 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trắc nghiệm bấm máy tính tích phân trừ cho từng đáp án ta được đáp án **C.**

Tự luận: $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(\cos x.(1+\tan x)\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}+\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = I + J$. Đặt $\begin{cases} u=\ln\cos x & \Rightarrow \mathrm{d}u=-\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x, & v=\tan x \end{cases}$.

$$I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x.\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\pi/4}\tan^2 x\mathrm{d}x=\tan x.\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(-x+\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}+1$$

$J=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=1+\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2$

$J=\int\limits_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases} u=\ln t & \Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t, & v=t \end{cases} \Rightarrow J=\int\limits_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1$

Vậy $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\ln 2.$

Câu 66. Giả sử $\int\limits_1^2 \frac{4\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=a\ln^2 2+b\ln 2$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó tổng $4a+b$ bằng.

A. 3. **B.** 5 **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

$$\int\limits_1^2\frac{4\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{4\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=4\int\limits_1^2\ln x\mathrm{d}\left(\ln x\right)+\int\limits_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=2\ln^2 x\Big|_1^2+\ln|x|\Big|_1^2=2\ln^2 2+\ln 2.$$

Chọn D

Câu 67. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx.$

A. $I=-\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1000\ln\frac{2}{1+2^{1000}}.$ **B.** $I=-\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\ln\frac{2^{1001}}{1+2^{1000}}.$

C. $I=\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}-1000\ln\frac{2}{1+2^{1000}}.$ **D.** $I=\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}-\ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I=\int\limits_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int\limits_1^{2^{1000}}\ln x d\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{x+1}\Bigg|_1^{2^{1000}}+\int\limits_1^{2^{1000}}\frac{1}{x+1}d\left(\ln x\right)$

$$=-\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+\int\limits_1^{2^{1000}}\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x}dx=-\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\int\limits_1^{2^{1000}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} + \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_1^{2^{1000}} = -\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^{2^{1000}} = -\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} + \ln\frac{2^{1001}}{1+2^{1000}}.$$

GTLN, GTNN – BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Câu 1. Tích phân $\int_0^2 \min\left\{x^2, 3x-2\right\} dx$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{17}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra $x^2 - 3x + 2$ âm trên khoảng $(0,1)$; dương trên $(1,2)$.

Vậy $\min\limits_{[0,1]}\left\{x^2, 3x-2\right\} = 3x-2$, $\min\limits_{[1,2]}\left\{x^2, 3x-2\right\} = x^2$

Vậy $\int_0^2 \min\left\{x^2, 3x-2\right\} dx = \int_0^1 (3x-2)\, dx + \int_1^2 x^2 dx = -\frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{11}{6}$.

Câu 2. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\sin x; \cos x\right\} dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $x = \frac{\pi}{4}$.

Bảng xét dấu

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x - \cos x$		$-$	0	$+$	

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\sin x; \cos x\right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 3. Tính $I = \int_0^2 \min\left\{x; \sqrt[3]{2-x}\right\} dx$.

A. $I = 2$. **B.** $I = \frac{3}{4}$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta xét dấu $f(x) = x - \sqrt[3]{2-x}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $x - \sqrt[3]{2-x} = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Do đó $\min\left\{x; \sqrt[3]{2-x}\right\} = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0;1] \\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi } x \in [1;2] \end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^2 \min\left\{x;\sqrt[3]{2-x}\right\}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\sqrt[3]{2-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$.

Câu 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \max\left\{x;\ x^3\right\}dx$.

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Trên đoạn $[0;\ 2]$, xét $x\ge x^3\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\le 0\xleftrightarrow{x\in[0;\ 2]}0\le x\le 1$.

Vậy $\begin{cases}x\in[0;\ 1]\Rightarrow x\ge x^3\\ x\in[1;\ 2]\Rightarrow x\le x^3\end{cases}\Rightarrow \max\limits_{[0;\ 2]}\left\{x;\ x^3\right\}=\begin{cases}x & khi\ 0\le x\le 1\\ x^3 & khi\ 1\le x\le 2\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^2\max\left\{x;x^3\right\}dx=\int\limits_0^1 xdx+\int\limits_1^2 x^3dx=\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$

Câu 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\max\left\{x^3;\ 4x^2-3x\right\}dx$.

A. $\frac{117}{2}$. **B.** $\frac{707}{2}$. **C.** $\frac{275}{12}$. **D.** $\frac{119}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Trên đoạn $[0;\ 3]$:

Xét $x^3\ge 4x^2-3x\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)\ge 0\xleftrightarrow{x\in[0;\ 3]}x\in[0;\ 1]$.

Vậy $\begin{cases}x\in[0;\ 1]\Rightarrow x^3\ge 4x^2-3x\\ x\in[1;\ 3]\Rightarrow x^3\le 4x^2-3x\end{cases}\Rightarrow \max\limits_{[0;\ 3]}\left\{x^3;\ 4x^2 03x\right\}=\begin{cases}x^3 & khi\ x\in[0;\ 1]\\ 4x^2-3x & khi\ x\in[1;\ 3]\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_0^3\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx=\int\limits_0^1 x^3dx+\int\limits_1^3\left(4x^2-3x\right)dx=\frac{275}{12}$

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của $G(x)=\int\limits_1^x\left(t^2+t\right)dt$ trên đoạn $[-1;1]$.

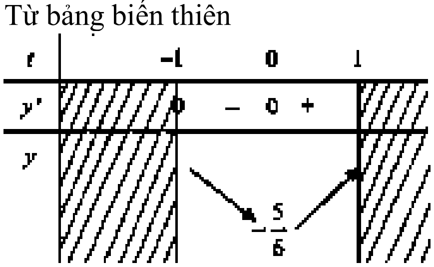
A. $\frac{1}{6}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $G(x)=\int\limits_1^x\left(t^2+t\right)dt=\left.\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}$

$\Rightarrow G'(x)=x^2+x\Rightarrow$ bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên



Câu 7. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F'(x)=f(x)=\mathrm{e}^{x^2}.x(x-2)(x+2)$.

$F'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x=0$; $x=\pm 2$ nên hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 8. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\dfrac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}dx =\frac{2017}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-2018}d\left(x^2+1\right) =\frac{2017}{2}.\frac{\left(x^2+1\right)^{-2017}}{-2017}+C$

$=-\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Rightarrow -\dfrac{1}{2.2^{2017}}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2^{2018}}$ Do đó $F(x)=-\dfrac{1}{2.\left(x^2+1\right)^{2017}}+\dfrac{1}{2^{2018}}$

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$. Vậy $m=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{2018}}=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(t)=\displaystyle\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)\mathrm{d}x$ trong khoảng $(0;+\infty)$.

A. $M=3\sqrt{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=2\sqrt{3}$. **D.** $M=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(t)=\displaystyle\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)\right|_0^t=\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t+1$.

$f(t)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\dfrac{1}{2}\cos 2t\right)+1=2\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{6}\right)+1\le 3$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất M của hàm số là 3.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2}+\ln 2$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Theo giả thiết $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân 2 vế với cận từ 1 đến 2 ta được $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\ge\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+\ln 2$

Mà $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_1^2=f(2)-f(1)=f(2)-1$ nên $f(2)-1\ge\dfrac{3}{2}+\ln 2\Rightarrow f(2)\ge\dfrac{5}{2}+\ln 2$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x)=x+\dfrac{1}{x}, x>0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+C$.

Mà $f(1)=1 \Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+\dfrac{1}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất của $f(2)$ bằng $\dfrac{5}{2}+\ln 2$ khi $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=\int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt$. Tính $S=x_1+x_2$.

A. $\ln 2e$. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $g'(t)=t\ln t$. Ta có $f(x)=\int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt = g\left(e^{2x}\right)-g\left(e^x\right)$

$$f'(x)=\left(e^{2x}\right)'.g'\left(e^{2x}\right)-\left(e^x\right)'.g'\left(e^x\right)=2e^{2x}.e^{2x}.\ln e^{2x}-e^x.e^x.\ln e^x=4xe^{4x}-xe^{2x}=xe^{2x}\left(4e^{2x}-1\right).$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\ln 2 \end{array}\right.$. $x_1+x_2=-\ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)\ge 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\ge m$ với mọi hàm số $y=f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. $m=15$. **B.** $m=20$. **C.** $m=25$. **D.** $m=30$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $f'(x)\ge 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$

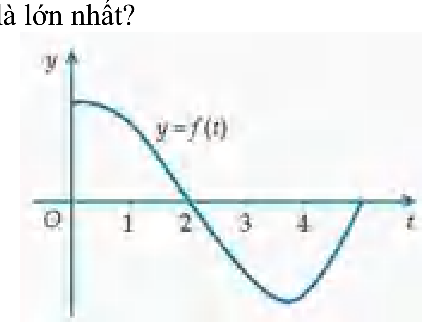
Do $3x^2+2x-5\ge 0$, $\forall x\in[1;+\infty)$ nên $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[1;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)=f(3)$.

Ta lại có: $\int\limits_1^3 f'(x)\,dx \ge \int\limits_1^3 \left(3x^2+2x-5\right)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3 \ge \left(x^3+x^2-5x\right)\Big|_1^3$

$\Leftrightarrow f(3)-f(1)\ge 24 \Leftrightarrow f(3)\ge 25$ Vậy $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\ge 25$. Hay $m=25$.

Câu 13. Xét hàm số $F(x)=\int\limits_2^x f(t)\,dt$ trong đó hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?



A. $F(1)$. **B.** $F(2)$. **C.** $F(3)$. **D.** $F(0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $F'(x)=\left(\int\limits_2^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$.

Xét trên đoạn $[0;3]$, ta thấy $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[0;2]$ hàm số $F(x)$ đồng biến nên $F(0)<F(2)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[2;3]$ hàm số $F(x)$ nghịch biến nên $F(3)<F(2)$.

Vậy $F(2)$ là giá trị lớn nhất.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1\left|x^2-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$

Hướng dẫn giải

Phá dấu trị tuyệt đối ta có

$$S=\int_0^1\left|x^2-ax\right|dx=-\int_0^a\left(x^2-ax\right)dx+\int_a^1\left(x^2-ax\right)dx=\left.\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{ax^2}{3}\right)\right|_0^a+\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{3}\right)\right|_a^1=\frac{2a^3-3a+2}{6}$$

$$S_{\min}=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

Câu 15. Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 48

Ta có

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36.a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+4)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+2)^2+12\right)^3}{36}\ge\frac{12^3}{36}=48\Rightarrow I\ge4\sqrt{3}$$

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của $I=\int_a^b\left|x^2+(2-m)x-2\right|dx$ trong đó $a<b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+(2-m)x-2=0$

A. $\frac{128}{9}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$

$$I=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((2-m)^2+8\right)^3}{36}\ge\frac{128}{9}\Rightarrow I\ge\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

$$S=\int_0^{\sqrt{a}}\left(a.x-x^3\right)dx+\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^3-a.x\right)dx=\left.\left(\frac{a.x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{a}}+\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{a.x^2}{2}\right)\right|_{\sqrt{a}}^1$$

$$S=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\ge\frac{1}{8}$$

Câu 18. Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$

A. 12. **B.** 0. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{49}{3}$

$$S=-\int_a^b(x-a)^2\left[(x-a)+(a-b)\right]dx=-\int_a^b(x-a)^2(x-a)dx-(a-b)\int_a^b(x-a)^2\,dx$$

$$S=\frac{1}{12}(a-b)^4=\frac{1}{12}\left((a+b)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+4)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+2)^2+12\right)^2\ge 12$$

Câu 19. Cho $(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=4$ và $a<b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

$$4=(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=(a-b)^2\left(1+(a+b)^2\right)\ge(a-b)^2$$

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((a-b)^2\right)^3}{36}\le\frac{4^3}{36}=\frac{4}{3}$$

Khi đó $\begin{cases}a+b=0\\(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

Câu 20. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$ với $m\in[1;3]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a+b=\frac{41}{6}$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=\frac{21}{4}$. **D.** $a+b=2$

Hướng dẫn giải

$$S=\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2\left((x-m)-m\right)dx$$

$$S=-\int_m^{2m}(x-m)^3dx+m\int_m^{2m}(x-m)^2dx=\left(\frac{-(x-m)^4}{4}+\frac{m(x-m)^3}{3}\right)\Bigg|_m^{2m}=\frac{m^4}{12}$$

Thay $m\in[1;3]$ vào ta có $a+b=\frac{41}{6}$

Câu 21. m là tham số thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2dx$. Tính $a+b=$

A. 31. **B.** 36. **C.** $\frac{122}{15}$. **D.** $\frac{121}{4}$

Hướng dẫn giải

$$P=\frac{m^5}{30}\in\left[\frac{1}{30};\frac{3^5}{30}\right]\to T=\frac{3^5+1}{30}=\frac{122}{15}$$

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của $P=\int_m^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx$ là $S=\frac{a}{b};a,b$ nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$

A. 7. **B.** 337. **C.** 25. **D.** 91

Hướng dẫn giải

Ta có: $P=\frac{4\left(m^2-m+1\right)^3}{3}\ge\frac{4}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{9}{16}\Rightarrow T=9+16=25$

Câu 23. A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $m=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{\int_0^1 x.f^2(x)dx-\int_0^1 x^{2018}.f(x)dx\right\}$

A. $\frac{-1}{2019}$. **B.** $\frac{-1}{16144}$. **C.** $\frac{-2017}{2018}$. **D.** $\frac{-1}{16140}$

Hướng dẫn giải

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=x;b=-x^{2018};c=0$

Nên biểu thức Min tại $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{x^{2017}}{2} \\ m_{\min}=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{-\Delta}{4a}dx=\int_0^1 \dfrac{-x^{4036}}{4.x}dx=\left.\dfrac{-x^{4035}}{4x4036}\right|_0^1=\dfrac{-1}{16144} \end{cases}$

Câu 24. A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $M=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{-\int_0^1 x.f^2(x)dx+\int_0^1 x^{2013}.f(x)dx\right\}$

A. $\frac{1}{2014}$. **B.** $\frac{503}{2014}$. **C.** $\frac{2012}{2013}$. **D.** $\frac{1}{8.2013}$

Hướng dẫn giải

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=-x;b=--x^{2013};c=0$

Nên biểu thức Max tại $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{x^{2013}}{2x}=\dfrac{x^{2012}}{2} \\ M_{max}=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{-\Delta}{4a}dx=\int_0^1 \dfrac{x^{4026}}{4.x}dx=\left.\dfrac{x^{4026}}{4.4026}\right|_0^1=\dfrac{1}{4.4026} \end{cases}$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

A. $\frac{2e-1}{e}$. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $2e-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$,

$f(x)+f'(x)\le 1 \Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)\le e^x \Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]'\le\left(e^x\right)'$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[e^x f(x)\right]'dx\le\int_0^1\left(e^x\right)'dx \Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1\le e^x\Big|_0^1 \Leftrightarrow e.f(1)\le e-1 \Leftrightarrow f(1)\le\frac{e-1}{e}$.

Do đó giá trị lớn nhất của $f(1)$ là $\frac{e-1}{e}$.

Câu 26. A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Tìm m nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le m.\int_0^1 f(x)dx \quad \forall f\in A$

A. 2018. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2018}$. **D.** $\sqrt{2018}$

Hướng dẫn giải

Đặt $t^{2018}=x\Rightarrow dx=2018.t^{2017}dt$ nên $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx=2018.\int_0^1 t^{2017}.f(t).dt\le 2018\int_0^1 f(t).dt$

Tìm m nhỏ nhất nên $m\le 2018$. Ta sẽ Cm $m=2018$ là số cần tìm. Xét $f(x)=x^n$ ta có

$$\int_0^1 x^{n/2018}dx \le m\int_0^1 x^n dx \to \frac{2018}{n+2018} \le \frac{m}{n+1} \to m \ge \frac{2018(n+1)}{n+2018}$$

Cho $n \to +\infty$ ta có $m \ge 2018$. Vậy $m = 2018$ là hằng số nhỏ nhất cần tìm

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 2018.f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $M = \int_0^1 \frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx + \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$

A. $\ln 2018$. **B.** $2\ln 2018$. **C.** $2e$. **D.** $2018e$

Hướng dẫn giải

$$M = \int_0^1 \left[\frac{1}{f(x)} - f'(x)\right]^2 dx + 2\int_0^1 \frac{f(x)}{f'(x)}dx \ge 2\int_0^1 \frac{f(x)}{f'(x)}dx = 2\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 = 2\ln 2018$$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = e.f(0) = e; \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1$. Tìm mệnh đề đung

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 = \ln f(1) - \ln f(0) = \ln\frac{f(1)}{f(0)} = \ln e = 1$

Nên $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 1\right]dx \le 0$

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 2.\frac{f'(x)}{f(x)} + 1\right]dx \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right]^2 dx \le 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 1 = 0$$

Vậy: $f(x) = A.e^x$. Mà $f(1) = e.f(0) = e$ Nên $f(x) = e^x \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$, $f(1) = e.f(0) = e$, $f(x) = e^x \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = e.f(0)$. Biểu thức $\int_0^1 \frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx + \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \le 2$. Mệnh đề nào đúng

A. $f(1) = \sqrt{\frac{2e}{e-1}}$ **B.** $f(1) = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$ **C.** $f(1) = \sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$ **D.** $f(1) = \frac{2(e-2)}{e^2-1}$

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức cho dưới dạng $\int_0^1 \left[\frac{1}{f(x)} - f'(x)\right]^2 dx \le 0$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{1}{f(x)} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = f'(x) \Leftrightarrow \int 1dx = \int f(x).d\left(f(x)\right) \Leftrightarrow x + c = \frac{f^2(x)}{2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{2(x+c)}$$

Thay $x = 0$ vào ta có $\begin{cases} f(0) = \sqrt{2c} \\ f(1) = \sqrt{2+2c} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = e = \frac{\sqrt{2+2c}}{\sqrt{2c}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^2-1}$

$\to f(x)=\sqrt{2x+\dfrac{1}{e^2-1}} \to f(1)=\sqrt{\dfrac{2e^2}{e^2-1}}$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$?

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{4}$ **C.** $-\dfrac{2}{3}$ **D.** -1

Hướng dẫn giải

$I=\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \Rightarrow |I|=\left|\int_{-1}^{1}(x^2-a)f(x)dx\right| \le \int_{-1}^{1}|x^2-a||f(x)|dx \le \int_{-1}^{1}|x^2-a|dx \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó ta suy ra $|I|\le \min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1}|x^2-a|dx$. Đến đây ta chia bài toán thành 3 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\le 0}\int_{-1}^{1}(x^2-a)dx=\min\limits_{a\le 0}\left(\dfrac{2}{3}-2a\right)=\dfrac{2}{3}$.

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\ge 1}\int_{-1}^{1}(a-x^2)dx=\min\limits_{a\ge 1}\left(2a-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min_{a\in[0;1]}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{a}}(x^2-a)dx+\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx+\int_{\sqrt{a}}^{1}(x^2-a)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min_{a\in[0;1]}\left[\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{-1}^{-\sqrt{a}}+\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}+\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{\sqrt{a}}^{1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{8a\sqrt{a}}{3}-2a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2} \text{ khi và chỉ khi } a=\frac{1}{4}.$$

Kết luận: Như vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\dfrac{1}{2}$ do đó $|I|\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\min I=-\dfrac{1}{2}}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int_0^1 xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int_0^1 x^3 f(x)dx$?

A. 2 **B.** $\dfrac{31}{16}$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{17}{8}$

Hướng dẫn giải

Ta đặt $I=\int_0^1 x^3 f(x)dx$ khi đó: $|I-3a|=\left|\int_0^1(x^3-ax)f(x)dx\right|\le\int_0^1|x^3-ax||f(x)|dx$

$$\Rightarrow |I-3a|\le 8\int_0^1|x^3-ax|dx \ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le 3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx \ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)$$

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ khi đó

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\min_{a\le 0}\left(3a+8\int_0^1(x^3-ax)dx\right)=\min_{a\le 0}(2-a)=2$$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ khi đó

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\min_{a\ge 1}\left(3a+8\int_0^1(ax-x^3)dx\right)=\min_{a\ge 1}(7a-2)=5$$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ khi đó ta có đánh giá sau:

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(3a+8\int_0^{\sqrt{a}}\left(ax-x^3\right)dx+8\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^3-ax\right)dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(4a^2-a+2\right)=\frac{31}{16}$$

Kết luận: Vậy $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\frac{31}{16}\Rightarrow I\le\frac{31}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{8};I=\frac{31}{12}>3a=\frac{3}{8}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max_{[1;3]}f(x)=2;\min_{[1;3]}f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)dx\int_1^3\frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_1^3 f(x)dx$?

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{2}\le f(x)\le 2\Rightarrow\left(2f(x)-1\right)\left(f(x)-2\right)\le 0\Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\le\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\le\frac{5}{2}-f(x)\Rightarrow S\le\int_1^3 f(x)dx\left(\int_1^3\frac{5}{2}-f(x)dx\right).$$

Ta tìm được $\max S=\frac{25}{4}$ khi $\int_1^3 f(x)dx=\frac{5}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x\ \ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{\left(x^3-1\right)^2+1}{x^2}>0,\ \forall x>0.$$

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ (1). Mặt khác ta có:

$$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0,\ \forall x>0\Rightarrow\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\ge\int_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow f(2)-f(1)\ge\frac{21}{5}\Rightarrow f(2)\ge\frac{17}{5}.$$

Kết hợp giả thiết ta có $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2021\times 2022}$ **B.** $\dfrac{1}{2018\times 2021}$ **C.** $\dfrac{1}{2018\times 2019}$ **D.** $\dfrac{1}{2019\times 2021}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018}\Rightarrow 3x^2f(x)+x^3f'(x)\ge x^{2020}$

$\Rightarrow\left[x^3f(x)\right]'\ge x^{2020}\Rightarrow\int_0^t\left[x^3f(x)\right]'dx\ge\int_0^t x^{2020}dx\ \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow f(t)\ge\dfrac{t^{2018}}{2021}$

Khi đó $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1\dfrac{x^{2018}}{2021}dx=\dfrac{1}{2019.2021}$.

Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\dfrac{1}{2019.2021}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0$, $\forall x\in[1;2]$ và $\int_1^2\dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}\mathrm{d}x=\dfrac{7}{375}$. Biết $f(1)=1$, $f(2)=\dfrac{22}{15}$, tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=\dfrac{71}{60}$. **B.** $P=\dfrac{6}{5}$. **C.** $P=\dfrac{73}{60}$. **D.** $P=\dfrac{37}{30}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}+\frac{x^2}{125}+\frac{x^2}{125}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}.\frac{x^2}{125}.\frac{x^2}{125}}=\frac{3f'(x)}{25}$$

Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: $\int_1^2\dfrac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}\mathrm{d}x+2\int_1^2\dfrac{x^2}{125}\mathrm{d}x\ge\int_1^2\dfrac{3f'(x)}{25}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\int_1^2\frac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}\mathrm{d}x+2.\frac{7}{375}\ge\frac{3}{25}\left[f(2)-f(1)\right]\Leftrightarrow\int_1^2\frac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}\mathrm{d}x\ge\frac{7}{375}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "$=$" của BĐT trên xảy ra

$$\frac{\left[f'(x)\right]^3}{x^4}=\frac{x^2}{125}\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^3=\frac{x^6}{125}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{15}+C.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=\dfrac{1}{15}+C\Rightarrow C=\dfrac{14}{15}\Rightarrow f(1)=\dfrac{x^3+14}{15}$. Ta có $I=\int_1^2\dfrac{x^3+14}{15}\mathrm{d}x=\dfrac{71}{60}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\dfrac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x)\le\sqrt{f(x)}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{\left(F(x)+1\right)^2}-1\ge 0\ \ \forall x\in[0;1]$$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\dfrac{F'(x)}{\left(F(x)+1\right)^2}-1\right)dx=1-t-\dfrac{1}{F(t)+1}$ là hàm số đồng biến trên $[0;1]$ do vậy ta có đánh giá:

$$h(x)\ge h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow 1-x-\frac{1}{F(x)+1}\ge 0\Rightarrow \frac{1}{F(x)+1}\le 1-x\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx\le\frac{1}{2}}$$

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge f^2(x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+3F(x)\ge f^2(x)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{3F(t)+1}-t-\frac{2}{3}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do

$$h(x)\le h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{3F(x)+1}-t-\frac{2}{3}\le 0$$

vậy ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{3F(x)+1}\le\frac{3}{2}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int_0^1\sqrt{g(x)}dx\le\frac{7}{4}}$$

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2}f(t)dt$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Đặt $F(x^2)=\int_0^{x^2}f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x^2)\ge 2xf(x^2)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \frac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\left(\frac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\right)dx=\ln(1+F(t))-\sqrt{t}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$$h(x)\le h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \ln(1+F(x))-\sqrt{x}\le 0\Rightarrow 1+F(x)\le e^{\sqrt{x}}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int_0^1 g(x)dx\le 2}$$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D. Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x\le 0\Leftrightarrow\int_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]' = 3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]' = \dfrac{1}{3} \Rightarrow f^3(x) = \dfrac{1}{3}x + C$.

Vì $f(0) = 1$ nên $f^3(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f^3(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$. Suy ra $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{3}x + 1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{6}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 1}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M = 20$; $m = 2$.
B. $M = 4\sqrt{11}$; $m = \sqrt{3}$.
C. $M = 20$; $m = \sqrt{2}$.
D. $M = 3\sqrt{11}$; $m = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 1} \Leftrightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 1}} = 2x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 1} = x^2 + C$, do $f(0) = 0$ nên $C = 1$.

Vậy $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2} = x\sqrt{x^2 + 2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0$ với mọi $x \in [1;3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$.

Vậy $M = f(3) = 3\sqrt{11}$; $m = f(1) = \sqrt{3}$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x) = 1 + 2\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Biết $g(x) \ge \left[f(x)\right]^3$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}\,dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\dfrac{5}{3}$
B. 4
C. $\dfrac{4}{3}$
D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ khi đó $g(x) = 1 + 2F(x) \ge \left[f(x)\right]^3$ $\forall x \in [0;1]$.

Do vậy $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{1 + 2F(x)}} - 1 \le 0$ $\forall x \in [0;1] \Leftrightarrow \dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1 + 2F(x)}} - 1 \le 0$ $\forall x \in [0;1]$.

Xét hàm số: $h(t) = \int\limits_0^t \left(\dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1 + 2F(x)}} - 1\right)dx = \dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1 + 2F(t)}\right)^2 - t - \dfrac{3}{4}$ $\forall t \in [0;1]$ là hàm nghịch biến trên $[0;1]$ cho nên $h(t) \le h(0)$ $\forall t \in [0;1] \Rightarrow \dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1 + 2F(t)}\right)^2 - t - \dfrac{3}{4} \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1 + 2F(t)}\right)^2 \le \dfrac{4}{3}t + 1$ $\forall t \in [0;1]$.

Do đó:

$$\left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^2 \le \frac{4}{3}x + 1 \;\; \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}\,dx \le \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}x + 1\right)dx \Rightarrow \boxed{\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}\,dx \le \frac{5}{3}}.$$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;\,1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}\left|f(x)\right| = 1$. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2}; \mathrm{e}-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $(\mathrm{e}-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Với mọi $a \in [0;1]$, ta có $0 = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = a\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 axf(x)\mathrm{d}x$

Kí hiệu $I(a) = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\mathrm{d}x$.

Khi đó, với mọi $a \in [0;1]$ ta có $\left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 axf(x)\mathrm{d}x\right|$

$= \left|\int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax) f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 \left|\mathrm{e}^x - ax\right|.\left|f(x)\right|\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left|\mathrm{e}^x - ax\right|.\max_{x\in[0;1]}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\mathrm{e}^x - ax\right|\mathrm{d}x = I(a)$.

Suy ra $\left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right| \le \min_{a\in[0;1]} I(a)$. Mặt khác

Với mọi $a \in [0;1]$ ta có $I(a) = \int_0^1 \left|\mathrm{e}^x - ax\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\mathrm{d}x = \left.\left(\mathrm{e}^x - \frac{a}{2}x^2\right)\right|_0^1 = \mathrm{e} - \frac{a}{2} - 1$

$\min_{a\in[0;1]} I(a) = \mathrm{e} - \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right| \le \mathrm{e} - \frac{3}{2} \approx 1,22$. Vậy $I \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$ và $\max_{[0;1]}\left|f(x)\right| = 6$.

Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$. **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Cách 1: Ta có $f(x) \le 6,\ \forall x \in [0;1]$.

Xét $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} 6x^3\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^3\mathrm{d}x + \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} x^3\left(6+f(x)\right)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^3\left(6-f(x)\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $I \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} x^2\left(6+f(x)\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^2\left(6-f(x)\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{2} + \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} 6x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{2} + \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x \le 0 \Rightarrow \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$.

Cách 2: Ta có với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$ thì $\int_0^1 ax^2 f(x)dx = 0$ do đó:

$\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x^3 - ax^2\right) f(x)dx\right| \le \int_0^1 \left|x^3 - ax^2\right|\left|f(x)\right|dx \le 6\int_0^1 \left|x^3 - ax^2\right|dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Do đó: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| \le \min_{a\in\mathbb{R}} 6\int_0^1 \left|x^3 - ax^2\right|dx = \min_{a\in\mathbb{R}} g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \le 0$ thì $x^3 - ax^2 = x^2(x-a) \ge 0\ \forall x \in [0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 x^3-ax^2dx=6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow \min_{a\le 0} g(a)=\frac{3}{2}$$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow \min_{a\ge 1} g(a)=\frac{1}{2}$$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì

$$f(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\frac{2a^4-4a+3}{2}.$$

Ta tìm được $\min_{a\in[0;1]} g(a)=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min_{a\in\mathbb{R}} g(a)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Do vậy:

$$\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le \min_{a\in\mathbb{R}} g(a)\Rightarrow\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}\Rightarrow \boxed{\max_{[0;1]}\int_0^1 x^3f(x)dx=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}.$$

TÍCH PHÂN CỦA HÀM ẨN

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases} f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1 \\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1 \end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{2} \quad (1) \\ f(3)-f(2)=\int_{2}^{3} f'(x)dx=\int_{2}^{3}\dfrac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{2}^{3}=\ln 2 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1)+(2), ta được $f(3)-f(2)+f(0)-f(-1)=0 \Rightarrow S=1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \dfrac{2}{2x-1}dx=\int \dfrac{2.\frac{1}{2}d(2x-1)}{2x-1}=\ln|2x-1|+c$.

$f(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$. $\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+1 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1)+f(3)=2+\ln 15$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: • Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int \dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$. Lại có $f(1)=2 \Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int \dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$. Lại có $f(0)=1 \Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases} \ln(2x-1)+2 \; khi \; x>\dfrac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1 \; khi \; x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{3} \quad (1) \\ f(3)-f(1)=\int\limits_{1}^{3} f'(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2)\end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $f(1)=5$. Phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=5\Leftrightarrow 1+1+C=5\Leftrightarrow C=3\Rightarrow f(x)=x^2+x+3$.

Xét phương trình: $f(x)=5\Leftrightarrow x^2+x+3=5\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2\end{array}\right.$.

$S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|1|+\log_2|-2|=1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1: Từ $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1 \\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1 \\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\Big|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln|3x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{4} \quad (1) \\ f(3)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln|3x-1|\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\ln 32\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\dfrac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\dfrac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4} \Rightarrow f(x)=\int\dfrac{4dx}{x^2-4}=\int\dfrac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_1 \; khi\; x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_2 \; khi\; x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_3 \; khi\; x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Có $\begin{cases}f(-3)=0\\ f(0)=1\\ f(2)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln 5+C_1=0\\ 0+C_2=1\\ \ln\dfrac{1}{5}+C_3=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_1=-\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=2+\ln 5\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\text{-}\ln 5 \quad khi\; x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+1 \quad khi\; x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+2+\ln 5 \quad khi\; x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Khi đó $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=\ln 3-\ln 5+\ln 3+1+\ln\dfrac{1}{3}+2+\ln 5=3+\ln 3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}$. **D.** $1+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2} \Rightarrow f(x)=\int\dfrac{dx}{x^2+x-2}=\int\dfrac{dx}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 \quad khi \quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2 \quad khi \quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3 \quad khi \quad x\in(1;+\infty)\end{cases}$

Do đó $f(-3)-f(3)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\ln 4+C_1-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}-C_3 \Rightarrow C_3=C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10$.

$f(0)=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3} \Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 \quad khi \quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2 \quad khi \quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10 \quad khi \quad x\in(1;+\infty)\end{cases}$

Khi đó $f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+C_1\right)+\left(\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=2+\ln\dfrac{3}{5}$. **B.** $P=1+\ln\dfrac{3}{5}$. **C.** $P=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\Rightarrow\int\dfrac{dx}{x^2-1}=\int\dfrac{dx}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}$.

Ta có $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\ln2+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_1=0\Rightarrow C_1=0$.

Và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\ln3+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_2=2\Rightarrow C_2=1$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+1 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}$. Vậy $P=f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{9}$. **B.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **C.** $T=3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x^2-1}dx=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x<-1,x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Do $f(-3)+f(3)=0$ nên $C_1=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ nên $C_2=1$.

Nên $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} & \text{khi } x<-1,x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+1 & \text{khi } -1<x<1\end{cases}$. $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Mặt khác $f(2)=\dfrac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$.

Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ

$$f^6(x).f'(x)=12x+13 \Rightarrow \int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+13)dx \Leftrightarrow \int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C \xrightarrow{f(0)=2} C=\frac{2}{7}.$$ Suy ra: $f^7(x)=42x^2+91x+2$.

Từ $f(x)=3 \Leftrightarrow f^7(x)=2187 \Rightarrow 42x^2+91x+2=2187 \Leftrightarrow 42x^2+91x-2185=0(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\frac{31}{2}$. **B.** $S=\frac{9}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\frac{\left|e^x-1\right|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x\ge 0 \\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $f(0)=5$ nên $2e^0+2e^0+C_1=5 \Leftrightarrow C_1=1 \Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$

Tương tự $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=5$.

$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\frac{7}{2}$. Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\frac{5}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$, $M=3$.

C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ giả thiết

$$f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x \Rightarrow \int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\sin x+C$$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow t^2=1+f^2(x)\Rightarrow t\mathrm{d}t=f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\int \mathrm{d}t=\sin x+C\Rightarrow t=\sin x+C\Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$. Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2\Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le\sin x\le 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>e$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0<m<e$. **D.** $1<m<e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2-2x)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \ln f(x)=2x-x^2+C\Leftrightarrow f(x)=A.e^{2x-x^2}$. Mà $f(0)=1$ suy ra $f(x)=e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x-x^2=1-(x^2-2x+1)=1-(x-1)^2\le 1$. Suy ra $0<e^{2x-x^2}\le e$ và ứng với một giá trị thực $t<1$ thì phương trình $2x-x^2=t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0<m<e^1=e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-0{,}5$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\dfrac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=(2x+1)\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C$. Mà $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ nên $C=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

Mặt khác $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\left(\dfrac{1}{2}-1\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2017}\right)$

$\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=-1+\dfrac{1}{2018}=\dfrac{-2017}{2018}\Rightarrow a=-2017;\ b=2018$.

Khi đó $b-a=4035$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\frac{-1}{2}$ nên $=2$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$. Khi đó

$$\frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2018.2019}+\frac{1}{2019.2020}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=\frac{-1009}{2020}.$$

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases}a=-1009\\ b=2020\end{cases}\Rightarrow b-a=3029$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases}f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0\\ f'(0)=0;\ f(0)=1\end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2}{f^3(x)}=-x$

$\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow \frac{f'(0)}{f^2(0)}=-\frac{0^2}{2}+C \Rightarrow C=0$. Do đó

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_0^1=\left(-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow -\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(0)}=-\frac{1}{6}\Rightarrow f(1)=\frac{6}{7}.$$

Câu 18: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f(2\sqrt{2})-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$.

Vậy $\ln(f(x))=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, mà $f(0)=1\Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Nên $f\left(2\sqrt{2}\right)=3;\ 2f\left(1\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{2}\right)-2f\left(1\right)=3-2\sqrt{2}\in\left(0;1\right)$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$; $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(3\right)=\dfrac{2}{3}$ và $\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right).f\left(x\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2613<f^2\left(8\right)<2614$. **B.** $2614<f^2\left(8\right)<2615$.

C. $2618<f^2\left(8\right)<2619$. **D.** $2616<f^2\left(8\right)<2617$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên suy ra $f'\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Mặt khác $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ nên

$\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\sqrt{\left(x+1\right)f\left(x\right)}$, $\forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Rightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}=\sqrt{\left(x+1\right)}$, $\forall x\in\left(0;+\infty\right)\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}dx=\int\sqrt{\left(x+1\right)}dx\Rightarrow\sqrt{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+C$;

Từ $f\left(3\right)=\dfrac{3}{2}$ suy ra $C=\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{8}{3}$. Như vậy $f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{8}{3}\right)^2$. Bởi thế:

$f\left(8\right)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(8+1\right)^3}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{8}{3}\right)^2=\left(9+\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{8}{3}\right)^2\Rightarrow f^2\left(8\right)=\left(9+\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{8}{3}\right)^4\approx 2613,26$.

Câu 20: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f\left(5\right)<5$. **B.** $2<f\left(5\right)<3$. **C.** $3<f\left(5\right)<4$. **D.** $1<f\left(5\right)<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: Với điều kiện bài toán ta có

$f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}\left(f'\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{3}\int\left(3x+1\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(3x+1\right)\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f\left(x\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Khi đó $f\left(1\right)=1\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow f\left(x\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f\left(5\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in\left(3;4\right)$.

Vậy $3<f\left(5\right)<4$.

Chú ý: Các bạn có thể tính $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{3x+1}$.

Cách 2: Với điều kiện bài toán ta có

$f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\displaystyle\int_1^5\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int_1^5\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_1^5\dfrac{\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)\Big|_1^5=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\ln\dfrac{f\left(5\right)}{f\left(1\right)}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f\left(5\right)=f\left(1\right).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in\left(3;4\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$. Giá trị của $f^2\left(1\right)$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x).f(x)\right]' = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x).f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó: $f'(x).f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2$.

Mà $f(0) = 1$ nên ta có $C_2 = 1$. Do đó $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$. Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$.

Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo đề ra ta có:

$$\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C \Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 4} + C.$$

Hay $2\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Rightarrow \int f(t)\mathrm{d}t = \frac{t+3}{t^2+4} + C'$.

Suy ra $\displaystyle\int f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4} + C_1\right) = \frac{2x+3}{8x^2+8} + C$.

DẠNG 2: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Câu 23: Cho $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Kết quả $\displaystyle\int_5^2 \left[2 - 4f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\displaystyle\int_5^2 \left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_5^2 \mathrm{d}x - 4\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = -2x\Big|_2^5 + 4\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -2.(5-2) + 4.10 = 34$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\displaystyle\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9) = -6$. **B.** $F(9) = 6$. **C.** $F(9) = 12$. **D.** $F(9) = -12$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I = \displaystyle\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^9 = F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 12$.

Câu 25: Cho $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $J = \displaystyle\int_0^2 \left[4f(x) - 3\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]dx=4\int_0^2 f(x)dx-3\int_0^2 dx=4.3-3x\Big|_0^2=6$.

Câu 26: Cho $\int_2^4 f(x)dx=10$ và $\int_2^4 g(x)dx=5$. Tính $I=\int_2^4\left[3f(x)-5g(x)\right]dx$

A. $I=5$. **B.** $I=15$. **C.** $I=-5$. **D.** $I=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Có: $I=\int_2^4\left[3f(x)-5g(x)\right]dx=3\int_2^4 f(x)dx-5\int_2^4 g(x)dx=5$.

Câu 27: Giả sử $\int_0^9 f(x)dx=37$ và $\int_9^0 g(x)dx=16$. Khi đó, $I=\int_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]dx$ bằng:

A. $I=26$. **B.** $I=58$. **C.** $I=143$. **D.** $I=122$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $I=\int_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]dx=\int_0^9 2f(x)dx+\int_0^9 3g(x)dx=2\int_0^9 f(x)dx-3\int_9^0 g(x)dx=26$.

Câu 28: Nếu $\int_1^2 f(x)dx=3$, $\int_2^5 f(x)dx=-1$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx=3-1=2$.

Câu 29: Cho $\int_1^2 f(x)dx=1$ và $\int_2^3 f(x)dx=-2$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=-1$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx=7$ và $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính

$P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=7$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$\int_0^{10} f(x)dx=7\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx=7\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx=7-3=4$. Vậy $P=4$.

Câu 31: Cho $\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_1^2 f(x)dx=4$, khi đó $\int_0^2 f(x)dx=$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8$.

Câu 33: Cho $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{11}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{17}{2}$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $I = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$.

Câu 34: Biết $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = -2$; $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$; $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 1$. **B.** $\int_1^4 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = -5$. **D.** $\int_1^4 \left[4f(x) - 2g(x)\right]\mathrm{d}x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = -2 - 3 = -5$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x)\mathrm{d}x = 10$ giá trị của $f(3)$ bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** 13. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_{-1}^3 f'(x)\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow f(x)\Big|_{-1}^{3} = 10 \Leftrightarrow f(3) - f(-1) = 10 \Leftrightarrow f(3) = f(-1) + 10 = 13$.

Câu 36: Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_0^2 \left(f(x) + 1\right)\mathrm{d}x$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Hướng dẫn giải.

Chọn B. Ta có $\int_0^2 \left(f(x) + 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{d}x = 3 + 2 = 5$.

Câu 37: Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét tích phân $I=\int_0^2\left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=5$.

Câu 38: Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=-11$. **B.** $I=13$. **C.** $I=27$. **D.** $I=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x+4\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x-x\Big|_{-2}^{5}=8+4.3-(5+2)=13$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+2x^2-x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** –2.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x).\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\frac{f^3(x)}{3}\Bigg|_0^1=\frac{f^3(1)-f^3(0)}{3}=-\frac{2}{3}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 6] thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx=10$ và $\int_2^4 f(x)dx=6$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$.

A. $P=4$.\` **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=10$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Ta có: $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx=\left(\int_0^6 f(x)dx+\int_6^2 f(x)dx\right)+\int_4^6 f(x)dx$

$=\int_0^6 f(x)dx+\left(\int_6^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx\right)+\int_4^6 f(x)dx=\int_0^6 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx=10-6=4$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và có $\int_0^1\left[3-2f(x)\right]dx=5$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. –1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** –2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Ta có: $\int_0^1\left[3-2f(x)\right]dx=5\Leftrightarrow\int_0^1 3dx-2\int_0^1 f(x)dx=5\Leftrightarrow 3x\Big|_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=5$

$\Leftrightarrow -2\int_0^1 f(x)dx=5-3=2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=-1$

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1], có $\int_0^1 f(x)dx=4$ và $\int_0^1 g(x)dx=-2$. Tính tích phân $I=\int\left[f(x)-3g(x)\right]dx$.

A. -10. **B.** 10. **C.** 2. **D.** –2.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$I=\int_0^1\left[f(x)-3g(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-3\int_0^1 g(x)dx=4-3(-2)=10$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'(x)dx$.

A. $I=\ln\sqrt{2}$. **B.** $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $I=\ln 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $I=\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1; ln3] và thỏa mãn $f(1)=e^2$, $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx=9-e^2$. Tính $I=f(\ln 3)$.

A. $I=9-2e^2$. **B.** $I=9$. **C.** $I=-9$. **D.** $I=2e^2-9$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Ta có:

$\int_1^{\ln 3} f'(x)dx=f(x)\Big|_1^{\ln 3}=f(\ln 3)-f(1)=9-e^2$ (gt) $\Rightarrow f(\ln 3)-e^2=9-e^2\Rightarrow f(\ln 3)=9$

Câu 45: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [0; 1] và thỏa mãn $\int_0^1 f'(x).g(x)dx=1$, $\int_0^1 f(x).g'(x)dx=-1$. Tính $I=\int_0^1\left[f(x).g(x)\right]' dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=0$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. $I=\int_0^1\left[f(x).g(x)\right]' dx=\int_0^1\left[f(x).g'(x)+f'(x).g(x)\right]dx$

$=\int_0^1 f(x).g'(x)dx+\int_0^1 f'(x).g(x)dx=1-1=0$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=123$. **B.** $f(4)=\frac{2}{3}$. **C.** $f(4)=\frac{3}{4}$. **D.** $f(4)=\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Ta có: $F(t)=\int f(t)dt\Rightarrow F'(t)=f(t)$ Đặt $G(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt=F(x^2)-F(0)$

$\Rightarrow G'(x)=\left[F(x^2)\right]'=2x.f(x^2)$ (Tính chất đạo hàm hợp: $f'\left[u(x)\right]=f'(u).u'(x)$)

Mặt khác, từ gt: $G(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt=x.\cos\pi x$

$\Rightarrow G'(x)=(x.\cos\pi x)'=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x\Rightarrow 2x.f(x^2)=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x$ (1)

Tính $f(4)\Rightarrow$ ứng với $x=2$. Thay $x=2$ vào (1) $\Rightarrow 4.f(4)=-2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi=1$

$\Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2.dt=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2\sqrt{3}$. **B.** $f(4)=-1$. **C.** $f(4)=\frac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\sqrt[3]{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\int_0^{f(x)} t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{f(x)}=\frac{\left[f(x)\right]^3}{3}=x\cos\pi x\Rightarrow\left[f(x)\right]^3=3x.\cos\pi x\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3x\cos\pi x}\Rightarrow f(4)=\sqrt[3]{12}$$

Câu 48: Cho hàm số $G(x)=\int_0^x t.\cos(x-t).dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **B.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **C.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. **Cách 1:** Ta có: $F(t)=\int t.\cos(x-t)dt\Rightarrow F'(x)=t.\cos(x-t)$

Đặt $G(x)=\int_0^x t.\cos(x-t)dt=F(x)-F(0)$

$$\Rightarrow G'(x)=\left[F(x)-F(0)\right]'=F'(x)-F'(0)=\left[x\cos(x-x)-0\right]'=x'=1\Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Cách 2:

Ta có $G(x)=\int_0^x t.\cos(x-t)dt$. Đặt $u=t\Rightarrow du=dt$, $dv=\cos(x-t)dx$ chọn $v=-\sin(x-t)$

$$\Rightarrow G(x)=-t.\sin(x-t)\Big|_0^x+\int_0^x\sin(x-t)dt=\int_0^x\sin(x-t)dt=\cos(x-t)\Big|_0^x=\cos 0-\cos x=1-\cos x$$

$$\Rightarrow G'(x)=\sin x\Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Câu 49: Cho hàm số $G(x)=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}.dt$ ($x>0$). Tính $G'(x)$.

A. $G'(x)=x^2.\cos x$. **B.** $G'(x)=2x.\cos x$. **C.** $G'(x)=\cos x$. **D.** $G'(x)=\cos x-1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Ta có $F(t)=\int\cos\sqrt{t}dt\Rightarrow F'(t)=\cos\sqrt{t}$ $\Rightarrow G(x)=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}dt=F(x^2)-F(0)$

$$\Rightarrow G'(x)=\left[F(x^2)-F(0)\right]'=\left[F(x^2)\right]'-\left[F(0)\right]'=\left[F(x^2)\right]'=2x.F'(x^2)=2x.\cos\sqrt{x^2}=2x.\cos x$$

Câu 50: Cho hàm số $G(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt$. Tính $G'(x)$.

A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **B.** $\sqrt{1+x^2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **D.** $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Đặt $F(t)=\int\sqrt{1+t^2}dt\Rightarrow F'(t)=\sqrt{1+t^2}$

$$G(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt=F(x)-F(1)\Rightarrow G'(x)=F'(x)-F'(1)=F'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Câu 51: Cho hàm số $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\sin t^2.dt$ ($x>0$). Tính $F'(x)$.

A. $\sin x$. **B.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. **C.** $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. **D.** $\sin\sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $F(t)=\int \sin t^2 dt$, $G(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = F(\sqrt{x})-F(1)$

$\Rightarrow G'(x)=F'(\sqrt{x})-F'(1)=F'(\sqrt{x})=(\sqrt{x})'.\sin(\sqrt{x})^2=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

Chọn B

Câu 52: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t.e^{f(t)}dt=e^{f(x)}$.

A. $f'(x)=x$. **B.** $f'(x)=x^2+1$. **C.** $f'(x)=\frac{1}{x}$. **D.** $f'(x)=\frac{1}{1-x}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Đặt $F(t)=\int t.e^{f(t)}dt \Rightarrow F'(t)=t.e^{f(t)}$ $\Rightarrow G(x)=\int_0^x t.e^{f(t)}dt=F(x)-F(0)$

$\Rightarrow G'(x)=F'(x)=e^{f(x)}$ (gt) $\Leftrightarrow x.e^{f(x)}=e^{f(x)}$ $\Rightarrow \left[x.e^{f(x)}\right]'=\left[e^{f(x)}\right]$

$\Rightarrow e^{f(x)}+x.f'(x).e^{f(x)}=f'(x).e^{f(x)}$ $\Rightarrow 1+x.f'(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1-x}$

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi)=\frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi)=\frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)\Rightarrow F'(t)=f(t)$

Khi đó $\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(t)\Big|_0^{x^2}=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(x^2)-F(0)=x.\sin(\pi x)$

$\Rightarrow F'(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)\Leftrightarrow f(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)\Rightarrow f(4)=\frac{\pi}{2}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^{2}+x^2\Big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)+(4-1)=4-1+3=6$.

Câu 55: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{11}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{17}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}x\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2}\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+4+3=\frac{17}{2}$.

Câu 56: Cho $\int_1^2 [3f(x)+2g(x)]\mathrm{d}x = 1$, $\int_1^2 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = -3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{7}$. **B.** $-\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $a = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, $b = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a+2b=1 \\ 2a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{7} \\ b = \frac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{5}{7}$.

Câu 57: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$; $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 10$. **D.** $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 10$ và $\int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 10$.

Câu 58: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$; $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 10$. **D.** $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 10$ và $\int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 10$.

Câu 59: Nếu $\int_0^{10} f(z)\mathrm{d}z = 17$ và $\int_0^8 f(t)\mathrm{d}t = 12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I = -3\int_8^{10} f(x)\mathrm{d}x = -3\left(\int_8^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x\right) = -3(-12+17) = -15$.

Câu 60: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_{-1}^{7} f(t)\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\int_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z$ là

A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^{7} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ và $\int_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z = \int_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ nên $\int_{-1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z = 7$.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I = \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Khi đó giá trị của tích phân $K = \int_{0}^{3}\left(e^{1+\ln(f(x))} + 4\right)\mathrm{d}x$ là:

A. $4 + 12\mathrm{e}$. **B.** $12 + 4\mathrm{e}$. **C.** $3\mathrm{e} + 14$. **D.** $14 + 3\mathrm{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $K = \int_{0}^{3}\left(\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))} + 4\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{3}\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} 4\mathrm{d}x = \mathrm{e}.\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} 4\mathrm{d}x = 4\mathrm{e} + 4x\Big|_{0}^{3} = 4\mathrm{e} + 12$.

Vậy $K = 4\mathrm{e} + 12$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1; \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$ Tính $\int_{0}^{1} f(x-1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Lấy đạo hàm theo hàm số y: $f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $y = 0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$

Vậy $f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + x + C$ mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ suy ra $f(x) = x^3 + x + 1$.

$$\int_{0}^{1} f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(x^3 + x + 1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}.$$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ là hàm bậc nhất thỏa mãn $\int_{0}^{1}(x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = -12$. **D.** $I = -8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = a$. Theo giả thiết ta có:

+) $\int_{0}^{1}(x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow a\int_{0}^{1}(x+1)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_{0}^{1}(x+1)\mathrm{d}x = \frac{10}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{20}{3}$.

+) $2f(1) - f(0) = 2 \Leftrightarrow 2.\left(\frac{20}{3} + b\right) - b = 2 \Leftrightarrow b = -\frac{34}{3}$.

Do đó, $f(x)=\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}$. Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}\right)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

A. $f(-1)+f(2)=-a-b$.

B. $f(-1)+f(2)=a-b$.

C. $f(-1)+f(2)=a+b$.

D. $f(-1)+f(2)=b-a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $f'(-x)=\frac{1}{(-x)^3+(-x)^5}=-\frac{1}{x^3+x^5}=-f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int_{-2}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x=-\int_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2)=-f(2)+f(1)\Rightarrow f(-1)+f(2)=f(-2)+f(1)=a+b$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f'(-x)=\frac{1}{(-x)^2+(-x)^4}=\frac{1}{x^2+x^4}=f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(2)=f(-1)-f(-2)+f(-2)-f(1)+f(1)-f(2)$

$$=\int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x+b-a-\int_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=b-a.$$

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2)=\frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $f'(x)=-e^x.f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x\Leftrightarrow\int_0^{\ln 2}\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=-e^x\Big|_0^{\ln 2}$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_0^{\ln 2}=-1\Leftrightarrow\frac{1}{f(\ln 2)}-\frac{1}{f(0)}=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(\ln 2)}=3\Leftrightarrow f(\ln 2)=\frac{1}{3}.$$

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là.

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$f'(x)=(x.f(x))^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow f(1)=6.$ $\quad f'(1)=(1.f(1))^2=36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y=36x-30$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn:

$g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$. **B.** $\dfrac{1009}{2}$. **C.** $\dfrac{2019}{2}$. **D.** 505.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018 \Rightarrow \int\limits_0^t \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x=2018\int\limits_0^t \mathrm{d}x \Rightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}\right)\Big|_0^t=2018x\Big|_0^t$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right)=2018t$ (do $g(0)=1$) $\Rightarrow \sqrt{g(t)}=1009t+1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t=\left(\dfrac{1009}{2}t^2+t\right)\Big|_0^1=\dfrac{1011}{2}$.

Câu 69: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Biến đổi:

$f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2 \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^1 \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\limits_{-1}^1 -2dx \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^1 \dfrac{df(x)}{f(x)}=-4 \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_{-1}^1=-4$

$\ln\dfrac{f(1)}{f(-1)}=-4 \Leftrightarrow \dfrac{f(1)}{f(-1)}=e^{-4} \Leftrightarrow f(-1)=f(1).e^4=e^4$.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9 \Rightarrow 9(f''(x)-1)=-[f'(x)-x]^2 \Rightarrow -\dfrac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}=\dfrac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int\dfrac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{9}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{f'(x)-x}=\dfrac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\dfrac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\dfrac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int\limits_0^1\left(\dfrac{9}{x+1}+x\right)\mathrm{d}x=\left(9\ln|x+1|+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=9\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\dfrac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\dfrac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\dfrac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\dfrac{323}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$f'(x).f(x)=x^4+x^2\Rightarrow\int_0^2 f'(x).f(x)dx=\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)df(x)=\frac{136}{15}\Leftrightarrow\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^2=\frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2)-4}{2}=\frac{136}{15}\Leftrightarrow f^2(2)=\frac{332}{15}.$$

Câu 72: Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn

$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;4], f(1)=\dfrac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

A. $\dfrac{391}{18}$ **B.** $\dfrac{361}{18}$ **C.** $\dfrac{381}{18}$ **D.** $\dfrac{371}{18}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Biến đổi:

$$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow x\left(1+2f(x)\right)=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow\frac{\left[f'(x)\right]^2}{1+2f(x)}=x\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow\int_1^4\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4\sqrt{x}dx\Leftrightarrow\left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3}\Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}.$$

Chú ý: *Nếu không nhìn được ra luôn* $I=\displaystyle\int_1^4\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$ *thì ta có thể sử dụng kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).*

+ Vi phân: $\displaystyle\int_1^4\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4\frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\frac{1}{2}\int_1^4\left(1+2f(x)\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+2f(x)\right)=\left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4$.

+ Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{1+2f(x)}\Rightarrow t^2=1+2f(x)\Leftrightarrow tdt=f'(x)dx$

với $x=1\Rightarrow t=\sqrt{1+2f(1)}=2; x=4\Rightarrow t=\sqrt{1+2f(4)}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^{\sqrt{1+2f(4)}}\frac{tdt}{t}=\int_2^{\sqrt{1+2f(4)}}dt=\left.t\right|_2^{\sqrt{1+2f(4)}}=\sqrt{1+2f(4)}-2$.

Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn

$3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}$. Khi đó:

A. $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{4}$.

C. $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{\left(e^2+3\right)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$. **D.** $e^3f(1)-f(0)=\left(e^2+3\right)\sqrt{e^2+3}-8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}=\dfrac{\sqrt{e^{2x}+3}}{e^x}$

$$\Rightarrow 3e^{3x}f(x)+e^{3x}f'(x)=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]'=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\displaystyle\int_0^1\left[e^{3x}f(x)\right]'dx=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\,dx$

$\Leftrightarrow \left[e^{3x} f(x)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{e^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

Câu 74: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3$.

Câu 75: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$. **B.** $\frac{a}{b} > 1$. **C.** $a+b = 1010$. **D.** $b-a = 3029$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (2x+3)dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2+3x+C$.

Vì $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}$.

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

Câu 76: Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b \neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x) = [F(x)-1]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1$, $b=4$. **B.** $a=1$, $b=-1$. **C.** $a=1$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. **D.** $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x) = \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó: $2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x) \Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4} = \left(\frac{ax+b}{x+4} - 1\right)\frac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$\Leftrightarrow 4a - b = -(ax+b-x-4) \Leftrightarrow (x+4)(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ (do $x+4 \neq 0$)

Với $a=1$ mà $4a-b \neq 0$ nên $b \neq 4$. Vậy $a=1$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+ Vì $4a-b \neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a=1$, $b=4$ và phương án D: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b=0$, $a=1$. Khi đó, ta có

$F(x)=\dfrac{x}{x+4}$, $f(x)=\dfrac{4}{(x+4)^2}$, $f'(x)=-\dfrac{8}{(x+4)^3}$.

Thay vào $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$ thấy đúng.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Do $x\in[1;2]$ nên

$$f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=2x+3 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C.$$

Do $f(1)=4$ nên $C=0 \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 78: Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $F(x)=\int xf'(x)\,dx=\int x\,d f(x)=xf(x)-\int f(x)\,dx$

Ta lại có: $\int f(x)\,dx=\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx=\int x\,d(\tan x)=x\tan x-\int \tan x\,dx=x\tan x-\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$=x\tan x+\int\dfrac{1}{\cos x}d(\cos x)=x\tan x+\ln|\cos x|+C \Rightarrow F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|+C$

Lại có: $F(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a)=af(a)-a\tan a-\ln|\cos a|$

Khi đó $f(a)=\dfrac{a}{\cos^2 a}=a(1+\tan^2 a)=10a$ và $\dfrac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10 \Leftrightarrow \cos^2 a=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |\cos a|=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\dfrac{1}{2}\ln 10$.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^x.f^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$. **B.** $2x-9y-2\ln 2+3=0$.

C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$. **D.** $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=-e^x.f^2(x) \Leftrightarrow -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=e^x \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\ln 2}\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]dx=\int_0^{\ln 2}e^x dx \Rightarrow \left.\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right|_0^{\ln 2}=\left.(e^x)\right|_0^{\ln 2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(\ln 2)}-\dfrac{1}{f(0)}=1 \Rightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$. Từ đó ta có $f'(\ln 2)=-e^{\ln 2}f^2(\ln 2)=-2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=-\dfrac{2}{9}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{2}{9}(x-\ln 2)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$,

$\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo giả thiết, ta có $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x-2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2-2\sqrt{f'(x)}.f(x)+1\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)-1=0\Rightarrow f^2(x).f'(x)=1\Rightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C$. Mà $f(0)=2\Rightarrow C=\frac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x)=3x+8$. Vậy $\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\int_0^1(3x+8)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3x^2}{2}+8x\right)\right|_0^1=\frac{19}{2}$.

Câu 81: Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$ **C.** $20+\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Biến đổi:

$f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Rightarrow\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+C$

Với $f(0)=0\Rightarrow C=1\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1\Rightarrow f^2(x)=x^4+2x^2=g(x)$

Ta có: $g'(x)=4x^3+4x>0,\forall x\in[1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra $g(1)\le g(x)=f^2(x)\le g(3)\Rightarrow 3\le f^2(x)\le 99\xrightarrow{f(x)\ge 0}\sqrt{3}\le f(x)\le 3\sqrt{11}\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}f(x)=\sqrt{3}\\ \underset{\sqrt{3}}{Max}\,f(x)=3\sqrt{11}\end{cases}$

Chú ý: *Nếu không tìm được ra luôn* $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\sqrt{f^2(x)+1}+C$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân:

$\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int\frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}d(f(x))=\frac{1}{2}\int\left(f^2(x)+1\right)^{\frac{-1}{2}}d\left(f^2(x)+1\right)=\sqrt{f^2(x)+1}+C$

+ Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{f^2(x)+1}\Rightarrow t^2=f^2(x)+1\Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$

Suy ra: $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{f^2(x)+1}+C$

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f'(x))^2=e^x f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Biến đổi $(f'(x))^2=e^x f(x)\Leftrightarrow \dfrac{(f'(x))^2}{f(x)}=e^x\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{e^x}\Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\sqrt{e^x}dx$

$\Leftrightarrow \int(f(x))^{-\frac{1}{2}}df(x)=\int e^{\frac{x}{2}}dx\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}=2e^{\frac{x}{2}}+C$

Vì $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow\sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow f(x)=e^x$. Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 edx=e^x\Big|_0^1=e-1$

Câu 83: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1\Leftrightarrow(xf(x)+1)^2=f(x)+xf'(x)(*)$

Đặt $h(x)=f(x)+xf'(x)\Rightarrow h'(x)=f(x)+xf'(x)$, khi đó $(*)$ có dạng

$h^2(x)=h'(x)\Rightarrow\dfrac{h'(x)}{h^2(x)}=1\Rightarrow\int\dfrac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int 1dx\Rightarrow\int\dfrac{dh(x)}{h^2(x)}=x+C\Leftrightarrow-\dfrac{1}{h(x)}=x+C$

$\Rightarrow h(x)=-\dfrac{1}{x+C}\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+C}$

Vì $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+C}\Rightarrow C=0$. Khi đó $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Suy ra: $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\Big|_1^2=-\dfrac{1}{2}-\ln 2$

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+4$. **B.** $4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$. **C.** $2\mathrm{e}^3-2\mathrm{e}+2$. **D.** $4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-(x+2)f(x)}{x^3}=1\Leftrightarrow\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'=\mathrm{e}^{-x}$

Suy ra $\int\limits_1^2\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{2^2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1^2}=-\left[\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\right]$

$\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1}=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}\Leftrightarrow f(2)=4\left[\mathrm{e}f(1)+\mathrm{e}-1\right]=4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Câu 85: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$$\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}\left(f(x)\right) = \cos\frac{\pi x}{2}.f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$. Mặt khác $\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Do đó $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

hay $\int_0^1 \left[f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0$ suy ra $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét $\int_0^1 \left[f(x) + (ax+b)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 \left[f(x).(ax+b)\right]\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)^2 \mathrm{d}x$

$$= 4 + 2a\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + 2b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{3a}(ax+b)^3\Big|_0^1 = 4 + 2(a+b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$$

Cần xác định a, b để $\frac{a^2}{3} + (2+b)a + b^2 + 2b + 4 = 0$

Ta có: $\Delta = b^2 + 4b + 4 - \frac{4}{3}\left(b^2 + 2b + 4\right) = \frac{-(b-2)^2}{3} \le 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6$.

Khi đó: $\int_0^1 \left[f(x) + (-6x+2)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2$

Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 (6x-2)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1 = 10$.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1,2]$.

Biết $\int_1^2 f'(x)dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = -10$. **B.** $f(2) = 20$. **C.** $f(2) = 10$. **D.** $f(2) = -20$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 10$ (gt)

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left[f(x)\right]\Big|_1^2 = \ln\left[f(2)\right] - \ln\left[f(1)\right] = \ln\frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \text{ (gt)}$$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} f(2)-f(1)=10 \\ \dfrac{f(2)}{f(1)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=20 \\ f(1)=10 \end{cases}$

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \dfrac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\dfrac{1}{4}, f(8)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+) Xét $\int\limits_4^8 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int\limits_4^8 \dfrac{df(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_4^8=-\left(\dfrac{1}{f(8)}-\dfrac{1}{f(4)}\right)=-(2-4)=2$.

+) Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2dx=0$.

Ta có: $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2dx=\int\limits_4^8\dfrac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx+2k\int\limits_4^8\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx+k^2\int\limits_4^8 dx=1+4k+4k^2=(2k+1)^2$.

Suy ra: $k=-\dfrac{1}{2}$ thì $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{1}{2}\right)^2dx=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \int\limits_4^6\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_4^6 dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_4^6\dfrac{df(x)}{f^2(x)}=1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\Big|_4^6=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(4)}-\dfrac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow 4-\dfrac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow f(6)=\dfrac{1}{3}$.

Chú ý: $\int\limits_a^b f(x)dx=0$ không được phép suy ra $f(x)=0$, nhưng $\int\limits_a^b f^{2k}(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $[f'(x)]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $T=f(1)-f(0)=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$

$[f'(x)]^2=f''(x)\Leftrightarrow -1=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\Leftrightarrow -1=\left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]'\Leftrightarrow -x+c=\dfrac{1}{f'(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{-x+c}$.

Mà $f'(0)=-1$ nên $c=-1$. Vậy $T=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{1}{-x-1}\mathrm{d}x=-\ln|-x-1|\Big|_0^1=-\ln 2$.

Câu 90: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ xy^2+y'^2=yy'', \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{2}<\ln f(1)<1$. **B.** $0<\ln f(1)<\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}<\ln f(1)<2$. **D.** $1<\ln f(1)<\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $xy^2+y'^2=yy'' \Leftrightarrow \dfrac{y''y-y'^2}{y^2}=x \Leftrightarrow \left(\dfrac{y'}{y}\right)'=x \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{x^2}{2}+C$ hay $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lại có $f(0)=f'(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2}{2}+1 \Leftrightarrow \int_0^1 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)\Big|_0^1=\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow \ln f(1)=\dfrac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1<\ln\left(f(1)\right)<\dfrac{3}{2}$.

Câu 91: Cho f,g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $a=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow a+3b=10$,

$\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow 2a-b=6$. Do đó: $\begin{cases}a+3b=10\\2a-b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$.

Vậy $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=a+b=6$.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_b^d f(x)\mathrm{d}x=2$ (với $a<d<b$) thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\begin{cases}\int_a^d f(x)\mathrm{d}x=5\\ \int_b^d f(x)\mathrm{d}x=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F(d)-F(a)=5\\F(d)-F(b)=2\end{cases} \Rightarrow F(b)-F(a)=3=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 93: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa mãn:

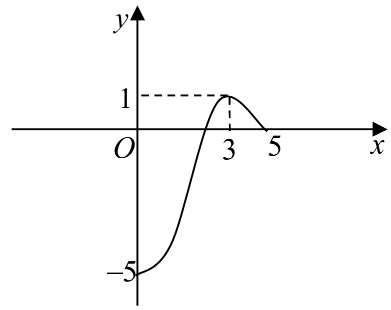
$\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=6$. **D.** $I=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\begin{cases}\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\\ \int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4\\ \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=2\end{cases} \Rightarrow I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=6$.

Câu 94: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$.

B. $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$.

D. $f(3)<f(5)<f(0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện: $f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$.

B. $(5;6)$.

C. $(12;13)$.

D. $(11;12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\cos x\right)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\cos x+c\Rightarrow f(x)=\cos x+cx$$

Khi đó: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+cx)\sin x\mathrm{d}x=-4$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\sin x\mathrm{d}x+c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=-4\Leftrightarrow 0+c(-2)=-4\Leftrightarrow c=2$$

$\Rightarrow f(x)=\cos x+2x\Rightarrow f(\pi)=2\pi-1\in(5;6)$.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\mathrm{d}x = \left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}$.

Do đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x = 0$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Câu 97: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Đề ban đầu bị sai vì khi thay $x=0$ và $x=2$ vào ta thấy mâu thuẫn nên tôi đã sửa lại đề

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Theo giả thiết ta có $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ $(*)$.

Ta tính $\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x) = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int\limits_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right) = \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2 = 0$ và $\int\limits_0^2 4\mathrm{d}x = 8$.

Suy ra $4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Câu 98: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x) = \int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x) = x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$. Vậy $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\geq x^4+\frac{2}{x^2}-2x$ $\forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$f'(x)\geq x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{(x^3-1)^2+1}{x^2}>0$, $\forall x>0 \Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ (1).

Mặt khác ta có: $f'(x)\geq x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0$, $\forall x>0 \Rightarrow \int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow f(2)-f(1)\geq\frac{21}{5} \Rightarrow f(2)\geq\frac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

□ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1+\int_0^1(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\geq 1-\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (1).

□ $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1-\int_1^2(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x\geq 1-\int_1^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Câu 101: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\mathrm{e}-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(\mathrm{e}-1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Với mọi $a\in[0;1]$, ta có $0=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x$

Kí hiệu $I(a)=\int_0^1 (e^x-ax)dx$. Khi đó, với mọi $a\in[0;1]$ ta có

$$\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|=\left|\int_0^1 e^x f(x)dx-\int_0^1 axf(x)dx\right|=\left|\int_0^1 (e^x-ax)f(x)dx\right|\le\int_0^1 |e^x-ax|.|f(x)|dx$$

$$\le\int_0^1 |e^x-ax|.\max_{x\in[0;1]}|f(x)|dx=\int_0^1 |e^x-ax|dx=I(a).$$

Suy ra $\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|\le\min_{a\in[0;1]} I(a)$

Mặt khác với mọi $a\in[0;1]$ ta có $I(a)=\int_0^1 |e^x-ax|dx=\int_0^1 (e^x-ax)dx=\left.\left(e^x-\frac{a}{2}x^2\right)\right|_0^1=e-\frac{a}{2}-1$

$\min_{a\in[0;1]} I(a)=e-\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|\le e-\frac{3}{2}\approx 1,22$. Vậy $I\in\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$3\int_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]dx\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx.$$ Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3dx$:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]dx\le 0\Leftrightarrow\int_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2dx\le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\frac{1}{3}\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1\Rightarrow C=1$. Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int_0^1[f(x)]^3dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx=\frac{7}{6}$.

Câu 103: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-x.f'(x);\quad f(x)=-x.g'(x)\end{cases}.$$ Tính $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]dx$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]\Leftrightarrow\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}=-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\int\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}dx=-\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\ln|f(x)+g(x)|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln|f(1)+g(1)|\Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x} \\ f(x)+g(x)=-\dfrac{4}{x} \end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]$

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-x\left[f(x)+g(x)\right]+\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x\left[f(x)+g(x)\right]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\dfrac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$. Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

Câu 104: Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=16$. Tính $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$

A. 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{dt}$. Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

Do đó $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.16=8$.

Câu 105: Nếu $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x=12$ thì $\int\limits_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 36. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=2\Rightarrow t=6$

Khi đó: $\int\limits_0^2 f(3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^6 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}.12=4$.

Câu 106: Cho $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow \int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=4$.

Mà tích phân không phụ thuộc vào biến nên: $I=\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t=4$.

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân

$$\int_{0}^{2}\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x.$$

A. 27. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 75.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = 1-3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\mathrm{d}x$. Với $x=0 \to t=1$ và $x=2 \to t=-5$.

Ta có $\int_{0}^{2}\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(1-3x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 9\mathrm{d}x = \int_{1}^{-5}\left[f(t)\right]\frac{\mathrm{d}t}{-3} + 9x\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{3}\int_{-5}^{1}\left[f(x)\right]\mathrm{d}x + 18$

$= \frac{1}{3}.9 + 18 = 21$.

Câu 108: Biết $f(x)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int_{1}^{4} f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 24.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $I = \int_{1}^{4} f(3x-3)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 3x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=9 \end{cases}$

$I = \frac{1}{3}\int_{0}^{9} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Câu 109: Cho $\int_{1}^{2} f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $I = \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=2$; $x=2 \Rightarrow t=5$.

Khi đó: $2 = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int_{0}^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x$

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x^2 = 2t \Rightarrow 2x\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t \Rightarrow x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\sqrt{2} \Rightarrow t=1$.

Ta có: $I = \int_{0}^{1} f(2t)\mathrm{d}t = 8$.

Câu 111: Cho $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = \frac{5}{2}$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = -1$, với $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó ta có $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_{-1}^{5} f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.4 = 2$.

Câu 112: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tích phân $I = \int_{1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I = \frac{1}{2}a + 1$. **B.** $I = 2a + 1$. **C.** $I = 2a$. **D.** $I = \frac{1}{2}a$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

$\Rightarrow I = \int_{3}^{5} \frac{1}{2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a$.

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. **B.** $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 20$. **C.** $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 10$. **D.** $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Ta có: $\int_{0}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2.\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 2.10 = 20$.

Câu 114: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\int_{0}^{3} f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = 8$. Tích phân $I = \int_{1}^{2} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I = 16$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 4$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int_{1}^{2} 2tf(t)\mathrm{d}t = 8 \Rightarrow \int_{1}^{2} tf(t)\mathrm{d}t = 4$. Vậy $I = \int_{1}^{2} xf(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 115: Biết $\int_{-1}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 18$. Tính $I = \int_{0}^{2} x\left(2 + f\left(3x^2 - 1\right)\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 8$ **D.** $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = 3x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 6x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -1$, $x = 2 \Rightarrow t = 11$

$I = \int_{0}^{2} x\left(2 + f\left(3x^2 - 1\right)\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} 2x\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} xf\left(3x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = 4 + \frac{1}{6}\int_{-1}^{11} f(t)\mathrm{d}t = 4 + \frac{1}{6}.18 = 7$.

Câu 116: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Có $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow u=3 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\dfrac{-1}{2}\int\limits_{3}^{0} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=3$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow u=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

Câu 117: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$; $\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\dfrac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{4}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\dfrac{1}{3}\left(-3\right)+\dfrac{1}{3}.1=\dfrac{4}{3}$.

Câu 118: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$. Tính

$I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x+1\right|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $u=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u\right)=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u\right)$.

Xét $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^{-1} f(-u)\,du=\int_{-1}^0 f(-u)\,du$.

Ta có $\int_0^3 f(x)\,dx=6\Rightarrow\int_0^3 f(u)\,du=6$. Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^0 f(-u)\,du+\int_0^3 f(u)\,du\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Câu 119: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx=2$ và $\int_0^2 f(6x)dx=14$. Tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Hướng dẫn giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x)dx=2$. Đặt $u=2x\Rightarrow du=2dx$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)du\Rightarrow\int_0^2 f(u)du=4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)dx=14$. Đặt $v=6x\Rightarrow dv=6dx$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int_0^2 f(6x)dx=\frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)dv\Rightarrow\int_0^{12} f(v)dv=84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx=\int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx+\int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

□ Tính $I_1=\int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx$. Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow dt=-5dx$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_1=\frac{-1}{5}\int_{12}^2 f(t)dt=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$.

□ Tính $I_1=\int_0^2 f(5|x|+2)dx$. Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow dt=5dx$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)dt=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$. Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx=32$.

Câu 120: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=8$. Tính tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(\cos x)dx$.

A. $K=-8$. **B.** $K=4$. **C.** $K=8$. **D.** $K=16$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx$ Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right).f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right].(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t.f\left(\cos x\right).dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(\cos x\right).dt$ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=K\Rightarrow K=I=8$

Câu 121: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên **R**, thỏa mãn $\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx=1$. Tính

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^{2}+1\right).f\left(\tan x\right)dx.$$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=-\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\left(1+\tan^{2}x\right)dx$. Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int_{0}^{1}f\left(t\right)dt=\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx$ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) = 1

Câu 122: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2x\right)=3f\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của tích phân $I=\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét tích phân $J=\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, đặt $x=2t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Với $x=2\Rightarrow t=1$, $x=0\Rightarrow t=0$.

Ta có $J=\int_{0}^{1}f\left(2t\right)2\mathrm{d}t=2\int_{0}^{1}f\left(2t\right)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{1}3f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\int_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.

Mặt khác, ta có $J=\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=J-\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.

Câu 123: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{F}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=-2$; $\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Tính tích phân $I=\int_{0}^{4}f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\sqrt{x}$, ta có: $t^{2}=x$ và $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=4\Rightarrow t=2$.

$I=\int_{0}^{4}f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}2tf'\left(t\right)\mathrm{d}t$. Đặt $u=2t$; $\mathrm{d}v=f'\left(t\right)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t$; $v=f\left(t\right)$.

Khi đó: $I=\left(2tf\left(t\right)\right)\Big|_{0}^{2}-2\int_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=4f\left(2\right)-2.1=4.\left(-2\right)-2=-10$.

Câu 124: Cho $\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_{1}^{4}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$; đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$, $x=4\Rightarrow t=2$

$I=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^2 f(t)2dt=2\int\limits_1^2 f(t)dt=2.2=4$.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^{16}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=6$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=3$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=9$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

• Xét $I=\int\limits_1^{16}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=6$, đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=16\Rightarrow t=4$ $I=2\int\limits_1^4 f(t)dt=6\Rightarrow\int\limits_1^4 f(t)dt=\dfrac{6}{2}=3$.

• $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=3$, đặt $\sin x=u\Rightarrow\cos x dx=du$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$ $J=\int\limits_0^1 f(u)du=3$

Vậy $I=\int\limits_0^4 f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^4 f(x)dx=3+3=6$.

Câu 126: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_1^9\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=4$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$. Tính

$I=\int\limits_0^3 f(x)dx$.

A. $I=10$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,dt=dx$; đổi cận $x=1\Rightarrow t=1$, $x=9\Rightarrow t=3$

Do đó ta có: $\int\limits_1^3\dfrac{f(t)}{t}2t\,dt=4\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f(t)dt=2$ (1)

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x.dx$; đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Do đó ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x.dx=2\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(t)dt=2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\int\limits_0^3 f(x)dx=\int\limits_0^3 f(t)dt=4$..

Câu 127: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left[\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\limits_1^4\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{t+1}{2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t\Rightarrow K=\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Xét $M=\int\limits_1^4\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\ln x\,\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\left.\dfrac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\ln^2 2\Rightarrow\int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

Câu 128: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-4;+\infty\right)$ và $\int\limits_0^5 f\left(\sqrt{x+4}\right)\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int\limits_3^2 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-16$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\sqrt{x+4}=t\Rightarrow x=t^2-4$. Khi $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=5\Rightarrow t=3\end{cases}\Rightarrow 8=\int\limits_2^3 f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow\int\limits_2^3 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=8$

Mà $\int\limits_2^3 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 2x.f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_2^3 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=-4$.

Câu 129: Cho $\int\limits_0^1 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=12$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $2x+1=t\Rightarrow 12=\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{t-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=24$.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right).2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin x\right)$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\int\limits_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$

$\Rightarrow\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+24=27$.

Câu 130: Cho hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^1\dfrac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Đặt $\tan x = t \Rightarrow d(\tan x) = dt \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \Leftrightarrow (1+\tan^2 x)dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{(1+\tan^2 x)} = \frac{dt}{1+t^2}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = \int_0^1 f(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = 3$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = 4$.

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}dt = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)f(x)}{x^2+1}dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = 2+4 = 6$.

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)dx = 2$. Khi đó tích phân

$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln(x^2+1)\right)dx$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln(x^2+1)\right)dx$.

Đặt $t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1}dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t = 2018$.

Suy ra $I = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(x)dx = \frac{1}{2}.2 = 1$.

Câu 133: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Từ $f(x) = \ln x^{15} \Rightarrow f'(x) = \frac{15x^{14}}{x^{15}} = \frac{15}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-15}{x^2}$ do đó $f''\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{-243}{20}$.

+ Tính tích phân $I = \int_0^3 x(3-x)^m dx$:

• Đặt $t = 3-x \Rightarrow x = 3-t$, $dx = -dt$,

x	0	3
t	3	0

• Do đó $I=\int\limits_3^0 (3-t)t^m(-\mathrm{d}t)=\int\limits_0^3 \left(3t^m-t^{m+1}\right)\mathrm{d}t=\left.\frac{3t^{m+1}}{m+1}-\frac{t^{m+2}}{m+2}\right|_0^3=\frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

+ Ta có $\int\limits_0^3 x(3-x)^m\,dx=-f''\left(\frac{10}{9}\right)\Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\frac{243}{20}\Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\frac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m=3$.

Chú ý:

-Việc giải phương trình $\frac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\frac{3^3}{4.5}$ không cần thiết nên chọn phương pháp thế đáp để làm trắc nghiệm trong bài này.

-Để giải phương trình $\frac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\frac{3^3}{4.5}$ ta xét hàm trên $f(m)=\frac{3^m}{(m+1)(m+2)}-\frac{3^3}{4.5}$ với $m>0$ thì chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất $m=3$.

Câu 134: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$.

Tính $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=\frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x),\forall x[a;b]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x\in[a;b]$. Đổi cận: khi $x=a\Rightarrow t=b$; khi $x=b\Rightarrow t=b$

Ta có $\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b xf(a+b-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t$

$=\int\limits_a^b (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_a^b tf(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow \boxed{\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

Áp dụng tính chất trên với $a=1$, $b=3$. $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x)=f(x)$.

Khi đó $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1+3}{4}\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp: Đặt $t=4-x$, với $x\in[1;3]$.

Ta có $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t=4\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5=4\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t-5\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}$.

Câu 135: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ và $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2 . **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.

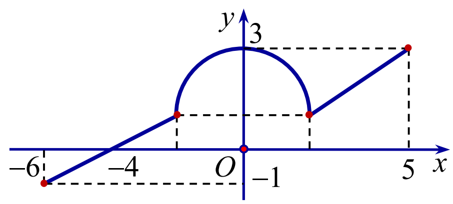
Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét $I=\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$ (1). Đặt $x=4-t$, ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=1\Rightarrow t=3$, $x=3\Rightarrow t=1$.

Suy ra $I=\int\limits_1^3 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t$, hay $I=\int\limits_1^3 (4-x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $2I=\int\limits_1^3 4f(x)dx\Rightarrow\int\limits_1^3 f(x)dx=\frac{I}{2}=-1$.

Câu 136: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Hướng dẫn giải

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2 & \text{khi } -6\le x\le -2\\ 1+\sqrt{4-x^2} & \text{khi } -2\le x\le 2\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & \text{khi } 2\le x\le 5\end{cases}$$

Chọn D.

$$I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{5}f(x)\mathrm{d}x+2\int\limits_{-6}^{5}\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x+22$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-6}^{-2}+J+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{x}{3}\right)\Big|_{2}^{5}+22=J+28.$$

Tính $J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: Khi $x=2$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$; khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

$$J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x=4+4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4+2\pi.$$ Vậy $I=32+2\pi$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int\limits_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{1}{A-B+C}\int\limits_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A,B,C.

✍Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

Câu 137: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **Cách 1: (Dùng công thức)**

Biến đổi $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x)-2.3x^2.f(x^3)=-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1$, $B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+(-2)}\int_0^1 -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

Đặt $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$, ta được:

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Câu 138: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$.

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ $4x.f(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ $(*)$

+) Đặt $u=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (1)

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (2)

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(x)+f(2-x)=2x$ ta có $A=1$; $B=1$, suy ra: $I=\int\limits_0^2 f(x)\,dx=\dfrac{1}{1+1}\int\limits_0^2 2x\,dx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^2=2$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+f(2-x)=2x \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,dx+\int\limits_0^2 f(2-x)\,dx=\int\limits_0^2 2x\,dx=4$ (*)

Đặt $u=2-x \Rightarrow du=-dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=2$ và $x=2 \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(2-x)\,dx=\int\limits_0^2 f(u)\,du=\int\limits_0^2 f(x)\,dx$.

Thay vào (*), ta được $2\int\limits_0^2 f(x)\,dx=4 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,dx=2$.

Câu 140: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Suy ra $\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 5\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\left.\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\right|_0^1=\dfrac{2}{3}$. Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{15}$.

Câu 141: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{25}$. **B.** $I=-\dfrac{4}{15}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{15}$. **D.** $I=\dfrac{4}{75}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Do $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x} \Rightarrow \int\limits_0^1 2f(x)\mathrm{d}x-\underbrace{\int\limits_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x}_{I_1}=\underbrace{\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x}_{I_2}$ (1).

+ Xét $I_1=3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$: Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_1=3\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3I$.

+ Xét $I_2=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{1-x} \Rightarrow x=1-t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_2=\int\limits_1^0 (1-t^2)t(-2t)\,\mathrm{d}t=\left.\left(\dfrac{2t^5}{5}-\dfrac{2t^3}{3}\right)\right|_1^0=\dfrac{4}{15}$.

Thây vào $(1): 2I-3I=\frac{4}{15}\Leftrightarrow I=-\frac{4}{15}$.

Câu 142: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x)+(2x)f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

Ta có: $A=1; B=1; C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=-1\\u(2)=2\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức có: $I=\int_{-1}^{2}f(x)=\frac{1}{1+1+3}\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{dx}=\left.\frac{x^4}{5}\right|_{-1}^{2}=3$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}+\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{dx}+3\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{dx}\quad(*)$

+) Đặt $u=x^2-2\Rightarrow \mathrm{du}=2x\mathrm{dx}$; với $x=-1\Rightarrow u=-1$ và $x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2}f(u)\mathrm{du}=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}\quad(1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{dt}=-\mathrm{dx}$; Với $x=-1\Rightarrow t=2$ và $x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}\quad(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $5\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}=15\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}=3$.

Câu 143: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính

giá trị của $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}$

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)\Rightarrow f(x)+\frac{1}{2}.(-2x).f(3-x^2)=\sqrt{x+2}$

$A=1; B=\frac{1}{2}; C=0$ và $u=3-x^2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=2\\u(2)=-1\end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức ta có: $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}+0}\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{dx}=\frac{28}{3}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến).

Từ $f(x)-xf(3-x^2)=\sqrt{x+2}\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{dx}-\int_{-1}^{2}xf(3-x^2)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{dx}=\frac{14}{3}\ (*)$

Đặt $u = 3 - x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$ với $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 2 \\ x = 2 \Rightarrow u = -1 \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2} xf\left(3 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f\left(u\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ thay vào (*) ta được

$\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{28}{3}$.

Câu 144: Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right) + xf\left(1 - x^2\right) + 3f\left(1 - x\right) = \frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I = \frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I = \frac{4}{3}$. **D.** $I = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **Cách 1: (Dùng công thức)**

Với: $f\left(x\right) - \frac{1}{2}.\left(-2x\right)f\left(1 - x^2\right) + 3f\left(1 - x\right) = 2x$.

Ta có: $A = 1$; $B = \frac{-1}{2}$; và $u = x^2 - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} u\left(0\right) = 1 \\ u\left(1\right) = 0 \end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức ta có:

$I = \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3}\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{2}{9}\ln\left|x+1\right|\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\ln 2$.

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)

Từ $f\left(x\right) + xf\left(1 - x^2\right) + 3f\left(1 - x\right) = \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} xf\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{0}^{1} f\left(1 - x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln\left|x+1\right|\Big|_0^1 = \ln 2$. (*)

+) Đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1} xf\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ (1).

+) Đặt $u = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}u = -x\mathrm{d}x$; Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1} xf\left(1 - x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t$ (2).

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \ln 2 \Rightarrow \frac{9}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \ln 2 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln 2$.

Câu 145: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ và thỏa mãn $f\left(x\right) - 8x^3 f\left(x^4\right) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Tích phân

$I = \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)dx = \frac{a - b\sqrt{2}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a + b + c$

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1: (Dùng công thức).**

Biến đổi $f\left(x\right) - 8x^3 f\left(x^4\right) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) - 2.\left(4x^3\right)f\left(x^4\right) = -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với $A = 1; B = -2$

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)}\int_0^1\left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$; Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t}.tdt = \int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt = \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 4x^3f(x^4)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = 0$ (*)

Đặt $u=x^4 \Rightarrow du = 4x^3dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 4x^3f(x^4)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$; Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t}.tdt = \int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt = \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 146: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thõa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Dùng công thức

Với $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$ ta có $A=1; B=1$, suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1+1}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = \frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Cách 2: Dùng phương pháp dồn biến nếu không nhớ công thức

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1} \Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$ $(*)$. Đặt $u=-x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)\mathrm{d}u = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$ ta được:

$2\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} \Leftrightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$. Đặt $t=e^x \Rightarrow dt = e^x\mathrm{d}x$

Với $x=-\ln 2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}, x=\ln 2 \Rightarrow t=2$

$$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x(e^x+1)} = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2$$

Khi đó: $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 = a\ln 2 + b\ln 3 \xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}} a=\frac{1}{2}, b=0 \quad \Rightarrow P=a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 147: Biết hàm số $y=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và

$f\left(x\right)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x+\cos x$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận: $\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right).(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

(Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $\left(\text{Vì } f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right.$ là hàm số chẵn $\left.\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

Vậy $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+\cos x\right)dx=\left(\cos x-\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1-1=-2 \Rightarrow I=-1$

Câu 148: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'\left(x\right)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, ta có $A=1;B=1$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{1}{1+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x.dx=\frac{1}{4}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos xdx=\frac{1}{2}$ (*)

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow du=-dx$. Với $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(u\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx$, thay vào (*) ta được

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{1}{4}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'\left(x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f\left(x\right) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'\left(x\right)dx=xf\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx$ (*)

Từ điều kiện $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ suy ra $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(0\right)=0 \\ f\left(0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (2).

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'\left(x\right)dx=-\frac{1}{4}$.

Câu 149: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$. tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=1+2x\Rightarrow 1-2x=2-t$ và $x=\dfrac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành

$$f(t)+f(2-t)=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+5}\Rightarrow f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}\ (*)$$

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x)+f(2-x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$ ta có $A=1;B=1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\dfrac{1}{1+1}\int_{-1}^{3}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\dfrac{\pi}{2}$

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ (*), ta có $f(x)+f(2-x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$ $\Rightarrow \int_{-1}^{3} f(x)dx+\int_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int_{-1}^{3}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx$ (2*)

Đặt $u=2-x\Rightarrow du=-dx$. Với $x=-1\Rightarrow u=3; x=3\Rightarrow u=-1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int_{-1}^{3} f(u)du=\int_{-1}^{3} f(x)dx$, thay vào (*), ta được:

$$2\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx \Rightarrow \int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3

Cách giải: Lần lượt đặt $t=u(x)$ và $t=v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x)=x$ thì chỉ cần đặt một lần $t=v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ với $A^2\neq B^2$) khi đó $f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$ (*)

+) Hệ quả 1 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$

+) Hệ quả 2 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 150: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt, $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f(t)=\dfrac{3}{t}\Rightarrow 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$.

Hay $4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Suy ra :

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2}-1\Rightarrow\ I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(\frac{-2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 151: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $2f\left(3x\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2}$,

$\int\limits_3^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=k$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ theo k .

A. $I=-\dfrac{45+k}{9}$. **B.** $I=\dfrac{45-k}{9}$. **C.** $I=\dfrac{45+k}{9}$. **D.** $I=\dfrac{45-2k}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow t=3 \end{array}\right.$. Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(\dfrac{2}{t}\right)\mathrm{d}x$.

Mà $2f\left(3x\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2}{3}f\left(3x\right)$

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3\left[-\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2}{3}f\left(3x\right)\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{4}\int\limits_1^3 x\,\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=-5-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$ (*)

Đặt $u=3x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=1\Rightarrow u=3 \\ x=3\Rightarrow t=9 \end{array}\right.$. Khi đó $I=-5-\dfrac{1}{9}\int\limits_3^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t=-5-\dfrac{k}{9}=-\dfrac{45+k}{9}$.

Câu 152: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{2019}$. **B.** $I=\dfrac{2}{1009}$. **C.** $I=\dfrac{4}{2019}$. **D.** $I=\dfrac{1}{1009}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$ ta có $A=1; B=2018$

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\dfrac{4}{2019}$ $\Rightarrow$ **Đáp án C**

Cách 2: Áp dụng Hệ quả 2: $A.f\left(x\right)+Bf\left(-x\right)=g\left(x\right) \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{A+B}$ với $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2x\sin x}{2019}$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{2019}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\dfrac{4}{2019}$

Câu 153: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)dx$

A. $I=\dfrac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\dfrac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1; B=2018$.

Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{1+2018}\int\limits_{-1}^{1} e^x dx=\frac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\frac{e^2-1}{2019\text{e}}$.

Cách 2: (Dùng công thức)

Áp dụng Hệ quả 1: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$.

Ta có:

$$f(-x)+2018f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\frac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{2019.2017}\int\limits_{-1}^{1}\left(2018e^x-e^{-x}\right)dx$$

$\approx 1{,}164.10^{-3}\approx\frac{e^2-1}{2019\text{e}}$ (Casio).

Câu 154: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Áp dụng kết quả

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (với $A^2\neq B^2$) khi đó $f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{a}\right)}{A^2-B^2}$".

Ta có

$$2f(2x)+f(1-x)=12x^2=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}=\frac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1.$$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

Câu 155: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng Hệ quả

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x)\Rightarrow g(x)=\frac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x)\Rightarrow g(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=2018$.

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a;a]\Rightarrow\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Câu 156: Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Giá trị của biểu thức $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2a^2$. **B.** a. **C.** a^2. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x=-t \Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a} a\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2a^2 \Leftrightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=a^2$.

Câu 157: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x)+f(-x)=2\sin x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Giả sử $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{2}\to t=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2}\to t=-\frac{\pi}{2}$

Khi đó $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\mathrm{d}x=0 \Rightarrow 2I=0 \Rightarrow I=0$

Câu 158: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=6$. **D.** $I=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x} \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$$

Câu 159: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên **R** và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

A. $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (1) Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t).(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f(-x)\right]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)}dx =$

$\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x}dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 2\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[1 - (-1)\right] = 4 \Rightarrow I = 2$

Câu 160: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **C.** $1 + \frac{\pi}{4}$. **D.** $2 - \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(-x) - 2f(x)\right]\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, đổi cận $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(-x) - 2f(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(t) - 2f(-t)\right]\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x) - 2f(-x)\right]\mathrm{d}x$$

Suy ra, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\mathrm{d}x \Rightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x) = f(-x) = \tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \mathrm{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{2}$

Câu 161: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow t=\ln 2$; Với $x=\ln 2 \Rightarrow t=-\ln 2$.

Ta được $I = -\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x == \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$; $x=\ln 2 \Rightarrow u=2$.

Ta được $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u$

$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left(\ln|u|-\ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2$. Vậy ta có $a=\frac{1}{2}$, $b=0 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 162: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{4}{75}$. **D.** $I=\frac{1}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Cách 1: (Dùng công thức)

Với $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$ ta có $A=2; B=3$.

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

Áp dụng kết quả

"Cho $A.f\left(ax+b\right)+B.f\left(-ax+c\right)=g\left(x\right)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó $f\left(x\right)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$"

Ta có: $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2g\left(x\right)-3g\left(1-x\right)}{2^2-3^2}=\dfrac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 \dfrac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}dx \overset{Casio}{=} 0,05\left(3\right)=\dfrac{4}{75}$.

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,2\left(6\right)=\dfrac{4}{15}\left(*\right)$Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ thay vào $\left(*\right)$, ta được:

$5\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\dfrac{4}{15}\Leftrightarrow \int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\dfrac{4}{75}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

Câu 163: Cho $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên $\left[-1;1\right]$ và $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=5$ và $\int\limits_0^1 g\left(x\right)dx=7$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)dx=10$.

B. $\int\limits_{-1}^1 g\left(x\right)dx=14$.

C. $\int\limits_{-1}^1 \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx=10$.

D. $\int\limits_{-1}^1 \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 164: Nếu hàm $f\left(x\right)$ CHẴN thì $\int\limits_{-a}^a f\left(x\right)dx=2\int\limits_0^a f\left(x\right)dx$ **2**. Nếu hàm $f\left(x\right)$ LẺ thì $\int\limits_{-a}^a f\left(x\right)dx=0$

Nếu chứng minh thì như sau:

Đặt $A=\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)dx=\underbrace{\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)dx}_{A_1}+\underbrace{\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx}_{A_2}$

$A_1=\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận:

$\Rightarrow A_1=\int\limits_1^0 f\left(-t\right).\left(-dt\right)=\int\limits_0^1 f\left(-t\right)dt=\int\limits_0^1 f\left(-x\right)dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ (Do $f\left(x\right)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f\left(-x\right)=f\left(x\right)$)

Vậy $A=\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=10$ (1)

Đặt $B=\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx=\underbrace{\int\limits_{-1}^{0} g(x)dx}_{B_1}+\underbrace{\int\limits_{0}^{1} g(x)dx}_{B_2}$

$B_1=\int\limits_{-1}^{0} g(x)dx$. Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận:

$\Rightarrow B_1=\int\limits_{1}^{0} g(-t).(-dt)=\int\limits_{0}^{1} g(-t)dt=\int\limits_{0}^{1} g(-x)dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=-\int\limits_{0}^{1} g(x)dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow g(-x)=-g(x)$)

Vậy $B=\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx=-\int\limits_{0}^{1} g(x)dx+\int\limits_{0}^{1} g(x)dx=0$ (2)

Từ (1) và (2)

Câu 165: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax)\mathrm{d}x$ và tính chất $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$.

Áp dụng, ta có:

$\bullet\ 4=\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x=8$.

$\bullet\ 2=\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=-\int_{2}^{0} f(x)=\int_{0}^{2} f(x) \Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x)=2$

Suy ra: $0=\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 0=8+\left(\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right)+I \Leftrightarrow 0=8+(0-2)+I \Leftrightarrow I=-6$.

Cách 2: Xét tích phân $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$ do đó $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t=2 \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2} f(2x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{1}^{2} f(2x)\mathrm{d}x=-4$.

Xét $\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow \int\limits_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=-8\Rightarrow \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-8$. Do $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Câu 166: Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x=8$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow \int\limits_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=16$.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, khi đó $16=I=\int\limits_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=-\int\limits_2^{-2}\frac{f(-t)}{1+\sqrt{2}^{-t}}\mathrm{d}t=\int\limits_2^{-2}\frac{\sqrt{2}^t f(t)}{1+\sqrt{2}^t}\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x+\int\limits_2^{-2}\frac{\sqrt{2}^x f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=16$.

Câu 167: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;\ 1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Kết quả

$I=\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $I=\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Xét $I_1=\int\limits_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=-1\Rightarrow t=1$

$I_1=\int\limits_1^0 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^t.f(x)}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$. Lại có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^t.f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x.f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^t.f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t+\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{(1+\mathrm{e}^t).f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

Câu 168: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Giá trị

của $\int\limits_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int\limits_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$.

Áp dụng ta có: $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=1+2=3$

Cách 2: Do $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Mặt khác $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ và $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Xét $I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

Suy ra $I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int_{2}^{0}\frac{f(-t)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{3^t f(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

“ Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)]=x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ ”

Cách giải: Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=a\to g(y)=a\Leftrightarrow y=\alpha\\ x=b\to g(y)=b\Leftrightarrow y=\beta\end{cases}$ Suy ra $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta yg(y)dy$

Câu 169: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\to y^3+y=0\Leftrightarrow y=0\\ x=2\to y^3+y=2\Leftrightarrow y=1\end{cases}$. Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1(3y^3+y)dy=\frac{5}{4}$

Câu 170: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow\mathrm{d}x=6(y^2-y+1)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow2y^3-3y^2+6y=0\Leftrightarrow y=0$ và $x=5\Rightarrow2y^3-3y^2+6y=5\Leftrightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 y.6\left(y^2-y+1\right)\mathrm{d}y=6\int\limits_0^1\left(y^3-y^2+y\right)\mathrm{d}y=\frac{5}{2}$.

Câu 171: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: Với $x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Leftrightarrow y=1$; $x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Leftrightarrow y=0$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^0 y\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y=\frac{7}{4}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

Bài toán: " Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{b-a}{2k}$ "

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases} dt=-dx\\ f(x)=\dfrac{k^2}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t-b$; $x=b\Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+\dfrac{k^2}{f(t)}}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}+\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b\mathrm{d}x=\frac{1}{k}(b-a)\Rightarrow I=\frac{b-a}{2k}$.

Câu 172: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $1+f(x)=f(x)f(1-x)+f(x)\Rightarrow\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$. Đặt $t=1-x\Leftrightarrow x=1-t$ $\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0\frac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(1-x)}=\int\limits_0^1\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^1\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^1\frac{1+f(x)}{1+f(t)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{d}x=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Câu 173: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}$

A. $I=2018$. **B.** $I=0$ **C.** $I=1009$ **D.** 4016

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $I=\int\limits_0^{2018}\frac{1}{1+f(x)}dx=\frac{2018-0}{2.1}=1009$.

Câu 174: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0$ khi $x\in[0;5]$. Biết $f(x).f(5-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^5\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x=5-t\Rightarrow dx=-dt$; $x=0\Rightarrow t=5$; $x=5\Rightarrow t=0$

$I=-\int_5^0\frac{dt}{1+f(5-t)}=\int_0^5\frac{f(t)dt}{1+f(t)}$ (do $f(5-t)=\frac{1}{f(t)}$) $\Rightarrow 2I=\int_0^5 dt=5\Rightarrow I=\frac{5}{2}$.

Câu 175: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)dx=5$.

Tính tích phân $\int\limits_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=4-x\Rightarrow dt=-dx$ và $x=1\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int\limits_1^3 xf(x)dx=\int\limits_1^3(4-t)f(4-t)dt=\int\limits_1^3(4-x)f(4-x)dx=\int\limits_1^3(4-x)f(x)dx$.

Suy ra: $10=\int\limits_1^3 xf(x)dx+\int\limits_1^3(4-x)f(x)dx=4\int\limits_1^3 f(x)dx=\frac{5}{2}$.

Câu 176: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R** và $f(x)>0$ khi $x\in[0;a]$ ($a>0$). Biết $f(x).f(a-x)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$I=\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ (1) Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int\limits_a^0-\frac{dt}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f(a-t)}dt=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f(a-x)}dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I=\int\limits_0^a\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+f(a-x)}\right]dx$

$$=\frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x).f(a-x)+f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^2\frac{2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^a dx=a\Rightarrow I=\frac{a}{2}$$

Câu 177: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0,\forall x\in[0;a]\end{cases}$ và

$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1.

Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}=\int_a^0\frac{-dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{dx}{1+f(a-x)}=\int_0^a\frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_0^a\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}+\int_0^a\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_0^a 1dx=a$. Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Cách 2.

Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6

Câu 178: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$?

A. $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Có $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2\Rightarrow\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}=f'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$.

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int\sqrt{x}dx+C \Leftrightarrow\int\frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int\sqrt{x}dx+C$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Mà $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}$. Vậy $f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}$.

Vậy $I=\int_1^4 f(x)dx=\frac{1186}{45}$.

Câu 179: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{45}{8}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0 \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

Suy ra $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}+C$. Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\dfrac{3}{8}\left[(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}}=\dfrac{45}{8}$.

Câu 180: Cho hàm số $f(x)=x^4+4x^3-3x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=f(0)=1$, $x=1\Rightarrow t=f(1)=2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^2 t^2\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}\Big|_1^2=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

Câu 181: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a,\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b \text{ và } x+xf'(x)=2f(x)-4,\ \forall x\in(0;1).$$

Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I=\dfrac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I=\dfrac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I=\dfrac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I=\dfrac{3a-b}{4ab}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\forall x\in(0;1)$ có $x+xf'(x)=2f(x)-4 \Leftrightarrow x+4=2f(x)-xf'(x)\Rightarrow x^2+4x=2xf(x)-x^2f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'.$$

Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x.\cos x+4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$, đổi cận $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{t^2+4t}{f^2(t)}\mathrm{d}t=\dfrac{t^2}{f(t)}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{3}{4b}-\dfrac{1}{4a}=\dfrac{3a-b}{4ab}$.

Câu 182: Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

Câu 183: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính

$$I=\int_1^2 x^3f'\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$$

A. 3. **B.** 4 . **C.** 1. **D.** 6 .

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=x^2+1\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. $x=1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^5(t-1)f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u=t-1\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t$, chọn $v=f(t)$.

$I=\dfrac{1}{2}(t-1)f(t)\Big|_2^5-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(4f(5)-f(2)\right)-2=3$.

Câu 184: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K=\displaystyle\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{t+1}{2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t\Rightarrow K=\displaystyle\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $M=\displaystyle\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+2\ln^2 2\Rightarrow\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

Câu 185: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = 1$, $I_2 == \int\limits_{1}^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x.\cos x\mathrm{d}x = 2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x = 2t.\cot x\mathrm{d}x$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(t).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = 2I_1 = 2$

□ Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$I_2 = \int\limits_{1}^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} \frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t = 2\int\limits_{1}^{4} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x) = 2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}$. Khi đó, ta có: $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Câu 186: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{6}$. **C.** $I = \frac{\pi}{20}$. **D.** $I = \frac{\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$\int\limits_{0}^{1} \left[4x.f(x^2) + 3f(1-x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} 4x.f(x^2)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} 3f(1-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (1).

Mà $\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right) \xrightarrow{t=x^2} 2\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t = 2I$

và $\int_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x = -3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(1-x\right) \xrightarrow{u=1-x} 3\int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u = 3I$

Đồng thời $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Do đó, $(1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4}$ hay $I = \frac{\pi}{20}$.

Câu 187: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\int_0^1 \left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{3}{5}$. **B.** $I = \frac{1}{4}$. **C.** $I = \frac{3}{4}$. **D.** $I = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

Suy ra $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$

Mặt khác $\int_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}f\left(x\right)\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$. Ta tính được $\int_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = \frac{9}{5}$.

Do đó $\int_0^1 \left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 3x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'\left(x\right) - 3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = 3x^2 \Leftrightarrow f\left(x\right) = x^3 + C$.

Vì $f\left(1\right)=1$ nên $f\left(x\right)=x^3$. Vậy $I = \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

Tính $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(2\right)-3=3$.

Câu 189. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f\left(1\right)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)$

$\Rightarrow I=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1.f\left(1\right)-0.f\left(0\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-1=1$

Câu 190. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $A=\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx$ Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=f\left(x\right)$

$\Rightarrow A=\left(x+1\right).f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=10\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=-8$

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(2x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{f\left(2x\right)}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\dfrac{x.f\left(2x\right)}{2}\Bigg|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{f\left(2\right)}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{16}{2}-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 192. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=2x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, đổi cận $x=1\Rightarrow t=-2$, $x=2\Rightarrow t=0$.

$1=\int\limits_1^2 f(2x-4)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t=2\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f(x)$.

Vậy $\int\limits_{-2}^0 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-2}^0-\int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2f(-2)-2=2.1-2=0$.

Câu 193. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** -1761.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=xf(x)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Từ $f(x^3+3x+1)=3x+2\Rightarrow\begin{cases}f(5)=5\ (x=1)\\ f(1)=2\ (x=0)\end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=(3x^2+3)dx\\ f(t)=3x+2\end{cases}$

Đổi cận: Với $t=1\Rightarrow 1=x^3+3x+1\Leftrightarrow x=0$ và $t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx=23-\int\limits_0^1(3x+2)(3x^2+3)dx\overset{Casio}{=}\frac{33}{4}$

Câu 194. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f(\mathrm{e})=1$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Cách 1: Ta có $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x).\ln x\mathrm{d}x=f(x).\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x).\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f(\mathrm{e})-1=1-1=0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\to\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x).\ln x\mathrm{d}x=f(x)\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\mathrm{e})-1=1-1=0$.

Câu 195. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo giả thiết, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ Suy ra: $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Ta có: $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$. Vậy $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0)=f(1)=1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$. Tính biểu thức $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=8$. **B.** $Q=6$. **C.** $Q=4$. **D.** $Q=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $A=\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=\underbrace{\int_0^1 e^x f(x)dx}_{A_1}+\underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=e^x dx$ chọn $v=e^x\Rightarrow A_1=e^x.f(x)\Big|_0^1-\underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Vậy $A=e^x f(x)\Big|_0^1-A_2+A_2=e^x f(x)\Big|_0^1=e.f(1)-f(0)=e-1\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a^{2018}+b^{2018}=1+1=2$

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.\mathrm{e}^{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 2018.x^{2017}\mathrm{d}x$ (1)

Xets $I=\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x-\int_0^1 2018.f(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\\mathrm{d}v=2018.\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\v=-\mathrm{e}^{-2018x}\end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).\left(-\mathrm{e}^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x\Rightarrow I=f(1).\mathrm{e}^{-2018x}-2018$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(1).\mathrm{e}^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1\Rightarrow f(1)=2019.\mathrm{e}^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1\mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=ae+b$

Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

$\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_1^2 - \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}f(1) - f(0) = \mathrm{e} - 1$.

Do đó $a = 1$, $b = -1$. Suy ra $Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0$. Vậy $Q = 0$.

Câu 199. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x = 30$. Tính $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\int_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x = \left(x.f(x)\right)\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5f(5) - 30 = 20$.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \frac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x = \frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f(x)\mathrm{d}x \\ v = G(x) \end{cases}$

$\int_1^2 F(x)g(x)\mathrm{d}x = \left(F(x)G(x)\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x$

$= 4.2 - 1.\frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x\left[f'(x) - 2\right]\mathrm{d}x = f(1)$. Giá trị của $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\int_0^1 x\left[f'(x) - 2\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2x\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 x\mathrm{d}\left[f(x)\right] - x^2\Big|_0^1 = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 1 = f(1) - I - 1$.

Theo đề bài $\int_0^1 x\left[f'(x) - 2\right]\mathrm{d}x = f(1) \Rightarrow I = -1$.

Câu 202. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = a$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ theo a và $b = f(2)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $u=x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x$ chọn $v=f(x)$.

$\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)-\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=b-\int\limits_1^2 f(x)$.

Ta có $\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow b-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=8-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$. Suy ra $I=8-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8-1=7$.

Câu 204. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0 2\sin x.f'(\sin x).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}\Rightarrow I=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases} u=2t \\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}t \\ v=f(t) \end{cases}\Rightarrow I=2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^0-2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 f(t)\mathrm{d}t=f\left(-\frac{1}{2}\right)-2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 f(t)\mathrm{d}t$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=4$.

□ Hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=3$.

Vậy $I=4-2.3=-2$.

Câu 205. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)\mathrm{d}x=f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $\begin{cases} u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$ $\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x=\left(-\cos x.f(x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x+\cos x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$.

Câu 206. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f(-x)+2018f(x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x+2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x \quad (1)$

+ Xét $P=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$ Đặt $\begin{cases} u=2x \\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x \\ v=-\cos x \end{cases}$ $P=2x.(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$

Từ (1) suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)\mathrm{e}^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$?

A. -4. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** 4. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)\mathrm{e}^x\Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

$I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}g(x)=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=4$.

Câu 208. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1$.

$2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=1-I_1\quad\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$.

Khi đó $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4-2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2I_1$ với $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\frac{x}{2}\Rightarrow\mathrm{d}x=2\mathrm{d}u$, khi đó $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$.

Vậy $I=128-2I_1=128-16=112$.

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=f(0)=1, f'(0)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét $I=\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}\left(f'(x)\right)$. Đặt $\begin{cases}u=1-x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(f'(x)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x\\ v=f'(x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow I=(1-x)f'(x)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\left[(1-1)f'(1)-f'(0)\right]+f(x)\Big|_0^1=-f'(0)+\left[f(1)-f(0)\right]$

$=-2018+(1-1)=-2018$.

Câu 211. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin x f(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + \sin x\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{16}{3}$. **B.** $I = -\frac{16}{5}$. **C.** $I = -\frac{14}{3}$. **D.** $I = -\frac{32}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right] = \ln \mathrm{e}^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

Xét $I = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I = \int\limits_0^2 \left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ \mathrm{d}v = \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \left[\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^2 \left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đến đây, đổi biến $x = 2-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \to t = 2$ và $x = 2 \to t = 0$.

Ta có $I = -\int\limits_2^0 \left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)(-\mathrm{d}t) = -\int\limits_0^2 \left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I = -\int\limits_0^2 \left(3x^2-6x\right).\ln f(2-x)\mathrm{d}x$ (2).

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I = -\int\limits_0^2 \left(3x^2-6x\right).\left[\ln f(x) + \ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(3x^2-6x\right).\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x = -\frac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$, khi đó:

$I=\int\limits_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right).e^{x^2-2x}.(2x-2)}{e^{x^2-2x}}dx=\int\limits_0^2\left(x^3-3x^2\right).(2x-2)dx=\frac{-16}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\int\limits_0^1(x+1)e^xf(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=2-e$. **B.** $I=e-2$. **C.** $I=\frac{e}{2}$. **D.** $I=\frac{e-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét $A=\int\limits_0^1(x+1)e^xf(x)dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=(x+1)e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=xe^x\end{cases}$

Suy ra $A=xe^xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 xe^xf'(x)dx=-\int\limits_0^1 xe^xf'(x)dx\Rightarrow\int\limits_0^1 xe^xf'(x)dx=\frac{1-e^2}{4}$

Xét $\int\limits_0^1 x^2e^{2x}dx=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{e^2-1}{4}$.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx+2\int\limits_0^1 xe^xf'(x)dx+\int\limits_0^1 x^2e^{2x}dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2dx=0$

Suy ra $f'(x)+xe^x=0\quad\forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+xe^x\right)^2\geq 0\quad\forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-xe^x\Rightarrow f(x)=(1-x)e^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)e^x$. Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1(1-x)e^xdx=(2-x)e^x\Big|_0^1=e-2$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2(x-1)^2f(x)dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2dx=7$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=(x-1)^2dx\Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3}=\int\limits_1^2(x-1)^2f(x)dx=\frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Bigg|_1^2-\int\limits_1^2\frac{(x-1)^3}{3}f'(x)dx$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\int\limits_1^2(x-1)^3f'(x)dx\Leftrightarrow\int\limits_1^2(x-1)^3f'(x)dx=1\Rightarrow-\int\limits_1^2 2.7(x-1)^3f'(x)dx=-14$

Tính được $\int\limits_1^2 49(x-1)^6dx=7\Rightarrow\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2dx-\int\limits_1^2 2.7(x-1)^3f'(x)dx+\int\limits_1^2 49(x-1)^6dx=0$

$\Rightarrow\int\limits_1^2\left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2dx=0\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}$. Vậy $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left[\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{5}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=9$ và $\int\limits_0^1 x^3f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=9$ (1)

- Tính $\int\limits_0^1 x^3f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^3.\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\int\limits_0^1 x^3f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^4}{4}.f(x)\right)\Bigg|_0^1-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4.f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4.f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^4.f'(x)\,\mathrm{d}x=-1\Rightarrow 18\int\limits_0^1 x^4.f'(x)\,\mathrm{d}x=-18$ (2)

- Lại có: $\int\limits_0^1 x^8\mathrm{d}x=\dfrac{x^9}{9}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{9}\Rightarrow 81\int\limits_0^1 x^8\mathrm{d}x=9$ (3)

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$\int\limits_0^1\left[[f'(x)]^2+18x^4.f'(x)+81x^8\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+9x^4\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\pi.\int\limits_0^1\left[f'(x)+9x^4\right]\mathrm{d}x=0$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+9x^4=0\Rightarrow f'(x)=-9x^4\Rightarrow f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=-\dfrac{9}{5}x^4+C$.

Lại do $f(1)=1\Rightarrow C=\dfrac{14}{5}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{9}{5}x^5+\dfrac{14}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{9}{5}x^5+\dfrac{14}{5}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\dfrac{3}{10}x^6+\dfrac{14}{5}x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{5}{2}$.

Câu 216. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}f(2x)\,\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = \sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0.f(0) - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$. Lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x) - \cos 2x\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x) - 2f(x).\cos 2x + \cos^2 2x\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{8} - 2\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ nên $f(x) = \cos 2x$. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Câu 217. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$= -\left(f(1) + f(0)\right) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Cách 1: Tìm k sao cho $\int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

Ta có: $\int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Do đó $\int_0^1 \left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$ (do $\left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holdern $\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k.g(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x)$, $k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\cos\frac{\pi x}{2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$. Do đó $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx=-\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow I=\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2dx-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx+\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$$=\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2dx=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\ge 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2dx=0\Leftrightarrow-\frac{2}{\pi}f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ mà $f(1)=0$ do đó $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **Cách 1:** Ta có $J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{x}dx-\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{1}{x^2}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

$J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx-\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Cách 2: $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\frac{f(x)}{x} + 2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = ax + b$. Vì $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$, suy ra $f(x) = 3x - 2$.

Vậy $J = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{3x-1}{x^2}\right)dx = \left(2\ln|x| - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \ln 4 + \frac{1}{2}$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\frac{e}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tính: $I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \int_0^1 xe^x f(x)dx + \int_0^1 e^x f(x)dx = J + K$.

Tính $K = \int_0^1 e^x f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = [e^x f(x) + e^x f'(x)]dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow K = (xe^x f(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 [xe^x f(x) + xe^x f'(x)]dx = -\int_0^1 xe^x f(x)dx - \int_0^1 xe^x f'(x)dx$ $(\text{do } f(1) = 0)$

$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 xe^x f'(x)dx \Rightarrow I = J + K = -\int_0^1 xe^x f'(x)dx$.

- Kết hợp giả thiết ta được: $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x)dx = \frac{e^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4} & (1) \\ 2\int_0^1 xe^x f'(x)dx = -\frac{e^2-1}{2} & (2) \end{cases}$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2 e^{2x}dx = \frac{e^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$\int_0^1 \left([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2e^{2x}\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_o^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C$.

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = \left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x\Big|_0^1 = e - 2$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = e - 2$.

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3 f(x)}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1.f(1)-0.f(0)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x.$$

Mà $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1$. Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ (1).

$\int_0^1 x^6\mathrm{d}x = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6\mathrm{d}x = \frac{1}{7}.49 = 7$ (2). $\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 49x^6\mathrm{d}x + \int_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 7+7-14 = 0$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\{[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right\}\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2 \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x \ge 0$. Mà $\int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$. Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right)\right|_0^1 = \frac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1$. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7 = 7\left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le 7\left(\int_0^1 (x^3)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x\right) = 7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \int_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \left.\frac{ax^7}{7}\right|_0^1 = -1 \Rightarrow a = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$

Do đó $f(x) = \frac{7}{4}(1-x^4)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right)\right|_0^1 = \frac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: "Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, ta có $\left(\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)$".

Chứng minh:

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]^2 = \lambda^2 f^2\left(x\right)+2\lambda f\left(x\right)g\left(x\right)+g^2\left(x\right)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

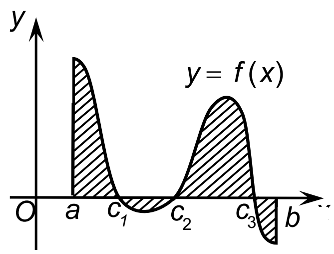
Lấy tích phân hai vế trên đoạn $\left[a;b\right]$: $\lambda^2\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x+2\lambda\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{g}\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\ge 0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}\left(*\right)$

Coi $\left(*\right)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta'\le 0 \Rightarrow$ đpcm.

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

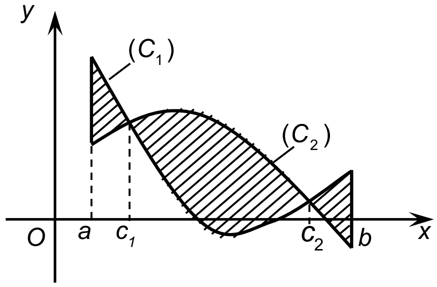
1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left|\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc. $[a;b]$. giả sử α thì $S = \left|\int_a^\alpha \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| + \left|\int_\alpha^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$.

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$ tìm các giá trị α,β.

Bước 2. Tính $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$ như trường hợp 1.

Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b\ (a<b)$

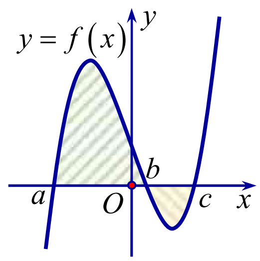
Câu 1. Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a,x=b\left(a<b\right)$.

A. $\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$. **B.** $\int\limits_a^b f^2(x)dx$. **C.** $\int\limits_a^b f(x)dx$. **D.** $\pi\int\limits_a^b f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

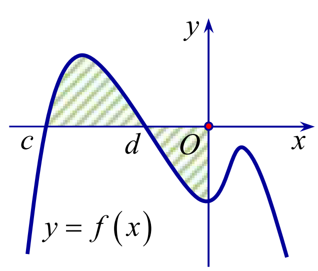
C. $-\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a;\mathrm{b}]$ và $f(x)\leq 0\ \forall x\in[b;c]$

Nên diện tích của hình phẳng là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S=\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

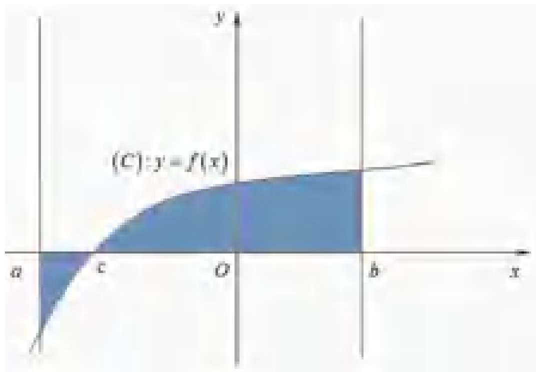
Chọn A

Ta có $S=\int_c^0\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_c^d\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_d^0\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\ge 0$ với $x\in[c;d]$ và $f(x)\le 0$ với $x\in[d;0]$.

Do đó $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

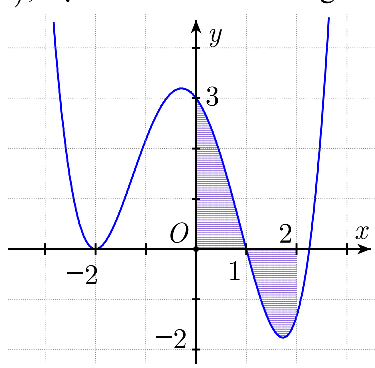
D. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c\left[0-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_c^b\left[f(x)-0\right]\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (phần tô đen) là



A. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

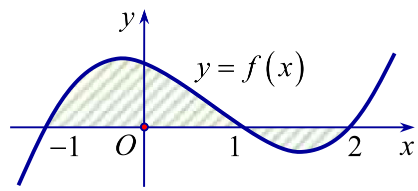
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x\in(0;1)$ thì $f(x)>0$, khi $x\in(1;2)$ thì $f(x)<0$.

Vậy $S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 6. Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta thấy miền hình phẳng giới hạn từ $x=-1$ đến $x=1$ ở trên trục hoành $\to$ mang dấu dương $\Rightarrow S_1=+\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Miền hình phẳng giới hạn từ $x=1$ đến $x=2$ ở dưới trục hoành $\to$ mang dấu âm

$\Rightarrow S_2=-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Vậy $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$ là

A. $\frac{53}{4}$ **B.** $\frac{51}{4}$ **C.** $\frac{49}{4}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x=3\in[1;4]$. Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_1^4\left|x^3-3x^2\right|dx=\left|\int_1^3(x^3-3x^2)dx\right|+\left|\int_3^4(x^3-3x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_3^4\right|=6+\frac{27}{4}=\frac{51}{4}$$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{142}{5}$ **B.** $\frac{143}{5}$ **C.** $\frac{144}{5}$ **D.** $\frac{141}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2\in[0;3]$. Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_0^2(x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int_2^3(x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_0^2\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3+2\ln 2$ **B.** $3-\ln 2$ **C.** $3-2\ln 2$ **D.** $3+\ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ nên $S=\int_{-1}^{2}\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int_{-1}^{2}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\left(x-\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=3-2\ln 2$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng

$x=\pi$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Xét trên $[0;\pi]$ suy ra $x=\dfrac{\pi}{2}$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=2$.

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Nên $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx=\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right|=\left|\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=1$

Câu 12. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=-2$.

A. $S=\dfrac{\mathrm{e}^4+1}{\mathrm{e}^2}$(đvdt). **B.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}}$(đvdt). **C.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$(đvdt). **D.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}^2}$(đvdt).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right|\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}=\mathrm{e}^2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}^2}$ (đvdt).

Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A. $S=\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_1^2\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_1^2=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\dfrac{a\sqrt{b}-\ln(1+\sqrt{b})}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

$$S=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x^3+x)\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+1}\right)=(x^3+x)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}(3x^2+1)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}-3S-\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Tiếp tục sử dụng công thức tích phân từng phần để tính $T=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ được $a=3,b=2,c=8$.

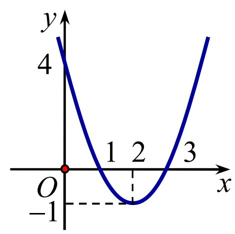
Câu 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ Ox, Oy ta được: $S=a\ln\dfrac{b}{c}-1$. Chọn đáp án đúng

A. a+b+c=8 **B.** a>b **C.** a-b+c=1 **D.** a+2b-9=c

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 16. Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Từ đồ thị ta có phương trình của parabol là $y=x^2-4x+3$.

Parabol (P) cắt Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1$, $x=3$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành ta có

$$S=\int_1^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_1^3\right|=\frac{4}{3}.$$

Câu 17. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+2x+1$, trục hoành, $x=1$ và $x=2$ là

A. $S=\dfrac{31}{4}$. **B.** $S=\dfrac{49}{4}$. **C.** $S=\dfrac{21}{4}$. **D.** $S=\dfrac{39}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\displaystyle\int_1^2\left|x^3+2x+1\right|\mathrm{d}x=\frac{31}{4}$.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành là

A. $\dfrac{22}{3}$ **B.** $\dfrac{32}{3}$ **C.** $\dfrac{25}{3}$ **D.** $\dfrac{23}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $-x^2+4=0$ trên đoạn $[0;3]$ có nghiệm $x=2$. Suy ra $S=\displaystyle\int_0^2\left|-x^2+4\right|dx+\int_2^3\left|-x^2+4\right|dx=\frac{23}{3}$

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3,\ x=4$ là

A. $\dfrac{202}{3}$ **B.** $\dfrac{203}{4}$ **C.** $\dfrac{201}{5}$ **D.** $\dfrac{201}{4}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x^3-4x=0$ trên đoạn $[-3;4]$ có nghiệm $x=-2;\ x=0;\ x=2$

Suy ra $S=\displaystyle\int_{-3}^{-2}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_0^2\left|x^3-4x\right|dx+\int_2^4\left|x^3-4x\right|dx=\frac{201}{4}$

Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$ **B.** $\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $\frac{e^2-1}{4}$ **D.** $\frac{e^2+1}{4}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x\ln x=0$ trên nữa khoảng $(0;e]$ có nghiệm $x=1$. Suy ra $S=\int\limits_1^e x\ln x dx=\frac{e^2+1}{4}$

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $15\ (\text{cm}^2)$. **B.** $\frac{15}{4}(\text{cm}^2)$. **C.** $\frac{17}{4}(\text{cm}^2)$. **D.** $17\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn D. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3\right|dx=-\int\limits_{-1}^{0}x^3dx+\int\limits_{0}^{2}x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=\frac{17}{4}(\text{dvdt})$.

Do mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm nên diện tích cần tìm là $S=17\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 22. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=\text{e}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{x}\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn là: $\int\limits_1^{\text{e}}\left|\frac{1}{x}\ln x\right|\text{d}x=\left|\int\limits_1^{\text{e}}\ln x\text{d}\left(\ln x\right)\right|=\left|\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^{\text{e}}\right|=\frac{1}{2}$.

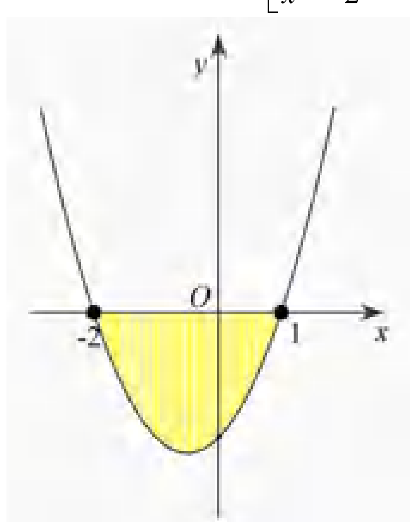
Câu 23. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành bằng

A. 9. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$



Diện tích hình phẳng $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\text{d}x=-\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)\text{d}x=\frac{9}{2}$.

Câu 24. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích là

A. 8. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^{3} \left|x^2 - 1\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\right|_{-1}^{1} + \left.\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right|_{1}^{3} = 8.$$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là.

A. $3 + 2\ln 2$. **B.** $3 + \ln 2$. **C.** $3 - 2\ln 2$. **D.** $3 - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $S = \int_{-1}^{2} \left|\frac{x+1}{x+2}\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = \left.\left(x - \ln|x+2|\right)\right|_{-1}^{2} = 3 - 2\ln 2$.

Câu 26. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng

A. $S = \frac{16}{3}$. **B.** $S = 3$. **C.** $S = \frac{15}{4}$. **D.** $S = \frac{17}{3}$.

Hướng dẫn giải

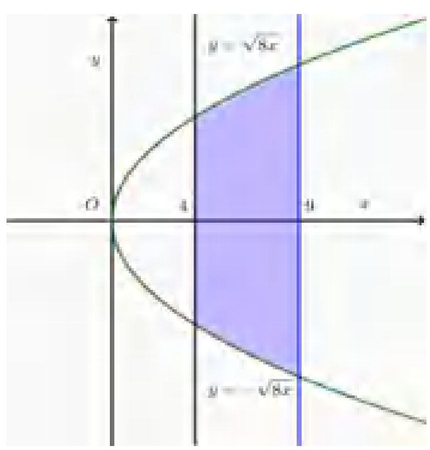
Chọn A. Xét phương trình $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có $S = \int_{0}^{4} \sqrt{x} \mathrm{d}x = \left.\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right|_{0}^{4} = \frac{16}{3}$.

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 4, x = 9$ và đường cong có phương trình $y^2 = 8x$.

A. $\frac{76\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{152}{3}$. **C.** $76\sqrt{2}$. **D.** $\frac{152\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



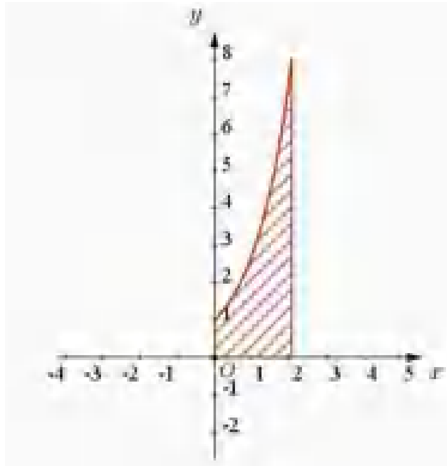
Vì $x \in [4;9] \Rightarrow y = \pm\sqrt{8x}$. Vậy $S = 2\int_{4}^{9} \sqrt{8x} \mathrm{d}x = \frac{152\sqrt{2}}{3}$

Câu 28. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 8)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = \ln\frac{9}{2}$. **B.** $k = \ln 4$. **C.** $k = \frac{2}{3}\ln 4$. **D.** $k = \ln 5$.

Hướng dẫn giải

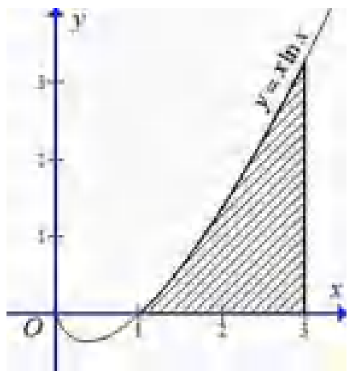
Chọn B



Ta có $S_1+S_2=\int\limits_0^{\ln 8} e^x dx=\left(e^x\right)\Big|_0^{\ln 8}=7$; $S_1=\int\limits_0^{k} e^x dx=\left(e^x\right)\Big|_0^{k}=e^k-1$.

Mà $S_1=S_2\Rightarrow S_1=\dfrac{7}{2}\Rightarrow e^k-1=\dfrac{7}{2}\Rightarrow k=\ln\dfrac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H).



A. $\dfrac{9}{2}\ln 3-2$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{9}{2}\ln 3-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}\ln 3+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Diện tích hình phẳng (H) là: $S=\int\limits_1^3 x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$, nên:

$$S=\int\limits_1^3 x\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^3-\frac{1}{2}\int\limits_1^3 x dx=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^3-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^3=\frac{9}{2}\ln 3-2.$$

Câu 30. Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\dfrac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=\dfrac{2008}{3}$. **D.** 2000.

Hướng dẫn giải

Chọn C

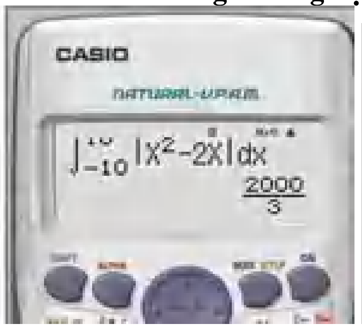
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-2x$ và $y=0$ là $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Trên đoạn $[-10;10]$ ta có

$x^2-2x\geq 0$, $\forall x\in[-10;0]$ và $[2;10]$. $x^2-2x\leq 0$, $\forall x\in[0;2]$.

Do đó $S=\int\limits_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2008}{3}$ (đvdt).

Nhận xét: Nếu học sinh sử dụng MTCT tính tích phân mà không chia khoảng thì có sự sai khác về kết quả giữa máy **casio** và **vinacal. Trong trường hợp này máy vinacal cho đáp số đúng.**



Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

A. $S=\dfrac{10}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=\dfrac{13}{3}$. **D.** $S=\dfrac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{3}$.

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1 (dùng máy tính): Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ vì $x^2\sqrt{x^2+1}\geq 0,\forall x\in[0;1]$.

$$\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$$

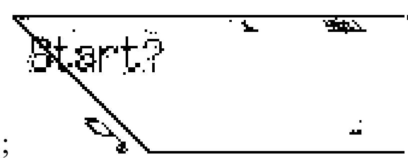
Bước 1: Bấm máy tính tích phân $S=\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=0,4201583875$ **(Lưu D)**

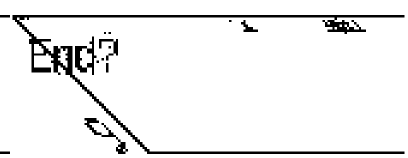
Bước 2: Cơ sở: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$D=\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}\Leftrightarrow c=\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{D}$ (coi $c=f(x)$, $a=x$, $b\in\mathbb{Z}$ và ta thử các giá trị $b=...-5;-4;..0,1;2;3;4.....$)

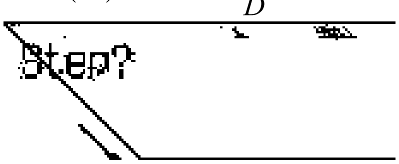
Thử với $b=1$:

Thử với $b=2$: Mode + 7

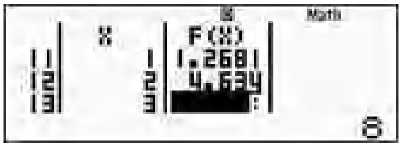




$F(X)=\dfrac{X\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{D}$;



Kết quả: $a = 3; c = 8, b = 2$



Cách 2 (giải tự luận): Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$ vì $x^2\sqrt{x^2+1} \ge 0, \forall x \in [0;1]$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$ Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Khi đó $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}\,(1+\tan^2 t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\dfrac{1}{\cos t}.\dfrac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 t.\cos t}{(\cos^2 t)^3}dt$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$ Đổi cận $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3}du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-(1-u^2)}{(1-u^2)^3}du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u^2)^3} - \left(\frac{1}{(1-u^2)^2}\right)\right)du$$

Ta có $H = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{1}{(1-u^2)^3}du = \dfrac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\dfrac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\right)^3 du = \dfrac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{1-u}\right)^3 du$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{3}{1-u^2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\right)du = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{6}{(1-u^2)^2}\right)du$$

$$= \left(\frac{-1}{16(1+u)^2} + \frac{1}{16(1-u)^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2}du = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2}du$$

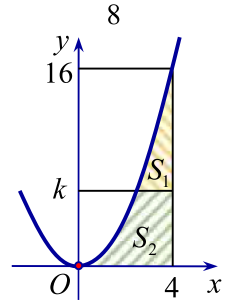
Tính $K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{6}{(1-u^2)^2}du = \dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\dfrac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\right)^2 du = \dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{1+u}\right)^2 du$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)}\right)du = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})$$

Vậy $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} = \dfrac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8}$

Khi đó $S = \dfrac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \dfrac{1}{6}K = \dfrac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \dfrac{1}{6}\left(3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})\right) = \dfrac{3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{8}$

Câu 33. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ $(0 < k < 16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.



A. $k = 8$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

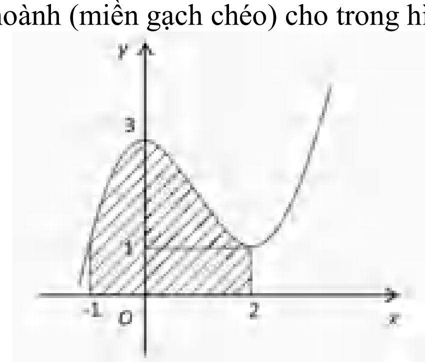
Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = k$ là $x = \sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int\limits_{\sqrt{k}}^{4} \left(x^2 - k\right)\mathrm{d}x$, diện tích $S_2 = \int\limits_0^4 x^2\mathrm{d}x - S_1$.

Ta có $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_{\sqrt{k}}^{4} \left(x^2 - k\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 x^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\left(\dfrac{x^3}{3} - kx\right)\right|_{\sqrt{k}}^{4} = \dfrac{32}{3} \Leftrightarrow \dfrac{64}{3} - 4k - \dfrac{\sqrt{k^3}}{3} + \sqrt{k^3} = \dfrac{32}{3}$

$$\Leftrightarrow 16 = 6k - \sqrt{k^3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{k}\right)^3 - 6\left(\sqrt{k}\right)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{k} = 2 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 \end{array}\right. \xRightarrow{k \in (0;16)} k = 4$$

Câu 34. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S = \dfrac{51}{8}$. **B.** $S = \dfrac{52}{8}$. **C.** $S = \dfrac{50}{8}$. **D.** $S = \dfrac{53}{8}$.

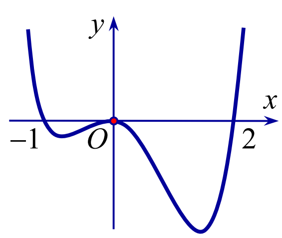
Hướng dẫn giải

Chọn A. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

- Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3 \Rightarrow S_1 = 3$.
- Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ y = 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3 \Rightarrow S_2 = \int\limits_{-1}^{2}\left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3 - 1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{27}{8}$. Diện tích hình phẳng: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{51}{8}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x < \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x < 0$.

C. $-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x > 0$. **D.** $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $S_1=\int\limits_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x<S_2=\int\limits_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x\ \ (1)$

Mà $f(x)\le 0$ với mọi $x\in[-1;0]$ và $x\in[0;2]$.

Do đó ta có $(1)\Leftrightarrow -\int\limits_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<-\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. Vậy A sai.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S=1$?

A. Không. **B.** Một. **C.** Ba. **D.** Hai.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $x=0\Rightarrow y=-m^2<0$ (do $m\ne 0$). $y=0\Rightarrow x=m^2>0$.

Vậy $S=\int\limits_{0}^{m^2}\left|\dfrac{x-m^2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{m^2}\left|1-\dfrac{1+m^2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{m^2}\left(\dfrac{1+m^2}{x+1}-1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\left(1+m^2\right)\ln\left|x+1\right|-x\right)\right|_{0}^{m^2}$

$=\left(1+m^2\right)\ln\left(m^2+1\right)-m^2$

Để $S=1$ thì $\left(1+m^2\right)\ln\left(m^2+1\right)-m^2=1\Leftrightarrow\left(1+m^2\right)\left(\ln\left(m^2+1\right)-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow\ln\left(m^2+1\right)=1\Leftrightarrow m^2+1=e\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{e-1}$

Câu 37. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in(3;5)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là $x^4-4x^2+m=0\ \ (1)$.

Đặt $t=x^2\ \ (t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2-4t+m=0\ \ (2)$.

Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta>0\\S=4>0\\P=m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4\ \ (3)$.

Gọi t_1 và t_2 $(t_1<t_2)$ là hai nghiệm của (2), khi đó bốn nghiệm (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn) của phương trình (1) là $x_1=-\sqrt{t_2}$, $x_2=-\sqrt{t_1}$, $x_3=\sqrt{t_1}$, $x_4=\sqrt{t_2}$. Do tính đối xứng của (C_m) nên có

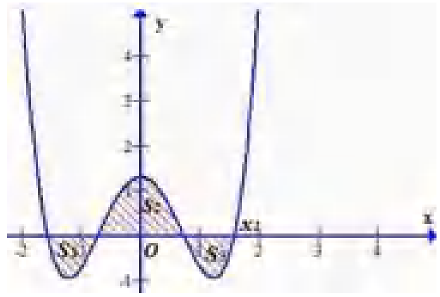
$$\int\limits_{0}^{x_3}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_3}^{x_4}\left(-x^4+4x^2-m\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{x_4}\left(2x^4-8x^2+2m\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\left.\left(\frac{2x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+2mx\right)\right|_{0}^{x_4}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0\Leftrightarrow 3x_4^4-20x_4^2+15m=0.$$

Vậy x_4 là nghiệm của hệ $\begin{cases}x_4^4-4x_4^2+m=0\\3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15x_4^4-60x_4^2+15m=0\\3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x_4^4-40x_4^2=0\\3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}12x_4^4-40x_4^2=0\\3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_4=0\\m=0\end{cases}\\\begin{cases}x_4^2=\dfrac{10}{3}\\m=\dfrac{20}{9}\end{cases}\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện (3) suy ra $m=\dfrac{20}{9}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Mà $\int_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1\left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m\right)$.

Do đó, $x_1\left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0$ (2). (vì $x_1 > 0$)

Từ (1) và (2), ta có phương trình $\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}$.

Vậy $m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}$.

Câu 39. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4;-1)$. **B.** $m \in (3;5)$. **C.** $m \in (0;3)$. **D.** $m \in (-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1 = x^2 + 2mx + 1 + 2x^2 + 1$ suy ra $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} \left|3x^2 + 2mx + m^2 + 1\right| dx = S = \int_0^{\sqrt{2}} (3x^2 + 2mx + m^2 + 1)\,dx = (x^3 + mx^2 + m^2x + x)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2m + \sqrt{2}m^2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(m^2 + \sqrt{2}m + 3) = \sqrt{2}\left[\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 - \frac{1}{2}\right]$$

$= \sqrt{2}\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Ta thấy $S \geq \frac{5\sqrt{2}}{2}$, suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng x = 2 đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì với m tùy ý ta luôn có $3x^2+2mx+m^2+1>0 \quad \forall x$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^2\left(3x^2+2mx+m^2+1\right)dx=\left[x^3+mx^2+\left(m^2+1\right)x\right]\Big|_0^2=2m^2+4m+10=2(m+1)^2+8$$

S đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi m = - 1. (dùng casio thử nhanh hơn)

Câu 41. Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\dfrac{25}{3}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $S=\int_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{25}{3}$.

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$. Bài ra $-2<m<2$ nên trên $(-2;m)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$$\int_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\int_{-2}^{m}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{m}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left|\left(4m-\frac{m^3}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{25}{3}\\ 4m-\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{16}{3}=-\dfrac{25}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}m^3-4m+3=0\\ \dfrac{1}{3}m^3-4m-\dfrac{41}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^3-12m+9=0\\ m^3-12m-41=0\end{array}\right.\quad(1)$$

Xét hàm số $f(m)=m^3-12m$, với $m\in(-2;2)$ có $f'(m)=3m^2-12=3\left(m^2-4\right)<0$, $\forall m\in(-2;2)$.

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2;2)\Rightarrow f(m)<f(-2)=16\Rightarrow m^3-12m-41<0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow m^3-12m+9=0\Leftrightarrow(m-3)\left(m^2+3m-3\right)=0\Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 42. Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a,b]$ có đồ thị là một đường cong C. Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x)=\ln x$ bị giới hạn bởi các đường thẳng $x=1$, $x=\sqrt{3}$ là $m-\sqrt{m}+\ln\dfrac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với m, $n\in\mathbb{Z}$ thì giá trị của m^2-mn+n^2 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Khi đó, độ dài đường cong S là $l=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}$. Suy ra: $t^2=1+x^2\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2$.

Suy ra: $l=\int_{\sqrt{2}}^{2}\dfrac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\dfrac{1}{(t-1)(t+1)}\right)\mathrm{d}x=t\Big|_{\sqrt{2}}^{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$.

Suy ra: $l=2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1}{3}-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)=2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}=2-\sqrt{2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mà $l=m-\sqrt{m}+\ln\dfrac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ nên suy ra $\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$. Vậy $m^2-mn+n^2=7$.

Câu 43. Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a;b]$ có đồ thị là một đường cong C. Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-\ln x}{4}$ và các đường thẳng $x=1$, $x=e$ quanh Ox là

A. $\dfrac{2e^2-1}{8}\pi$. **B.** $\dfrac{4e^4-9}{64}\pi$. **C.** $\dfrac{4e^4+16e^2+7}{16}\pi$. **D.** $\dfrac{4e^4-9}{16}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1. (Giải tự luận)

Ta có $f(x)=\dfrac{2x^2-\ln x}{4}=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}\Rightarrow f'(x)=x-\dfrac{1}{4x}\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{4x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{16x^2}-\dfrac{1}{2}$

Lại có $f'(x)=x-\dfrac{1}{4x}>0,\forall x\in(1;e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;e]$. Suy ra

$$f(x)\ge f(1)=\frac{1}{2}>0,\forall x\in[1;e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}\right)\sqrt{1+\left(x^2+\frac{1}{16x^2}-\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$S=2\pi\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{16x^2}+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\pi\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x=2\pi\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}x\ln x-\frac{1}{16}\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(I_1+I_2+I_3\right)$$

Với $I_1=\int_1^e\left(\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^2}{16}\right)\right|_1^e=\dfrac{2e^4+e^2-3}{16}$

$I_2=\int_1^e\left(-\dfrac{1}{4}x\ln x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4}x^2\left(2\ln x-1\right)\Big|_1^e=-\dfrac{1}{16}e^2-\dfrac{1}{16}$

$I_3=\int_1^e\left(-\dfrac{1}{16}\dfrac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{32}\ln^2x\Big|_1^e=-\dfrac{1}{32}$.

Cách 2. Học sinh có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân $S=2\pi\int_1^e\left|\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}\right|\sqrt{1+\left(x^2+\dfrac{1}{16x^2}-\dfrac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x$ để có kết quả

Dạng 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

A. $S_H=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x-\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S_H=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

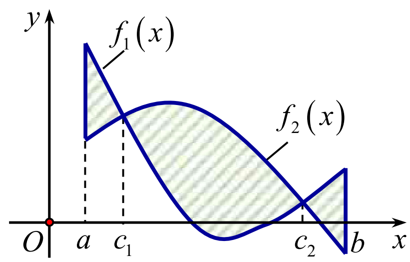
C. $S_H=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$.

D. $S_H=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 45. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_a^b|f_1(x)+f_2(x)|\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo định nghĩa ứng dụng tích phân tích diện tích hình phẳng.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)<0<f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$. Xét các mệnh đề sau

(I) $S=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$.

(II) $S=\int_{-1}^1|f(x)|\mathrm{d}x$.

(III) $S=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(IV) $S=\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$ là $S=\int_{-1}^1|f(x)|\mathrm{d}x$ nên (2) đúng. Do $f(0)<0<f(-1)$ nên $S=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ sai.

Tương tự $S=\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$ sai. và $S=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$ sai.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=0$, $x=1$ và $x=2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào trong các công thức dưới đây?

A. $S=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_1^2|f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 48. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$.

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Hướng dẫn giải

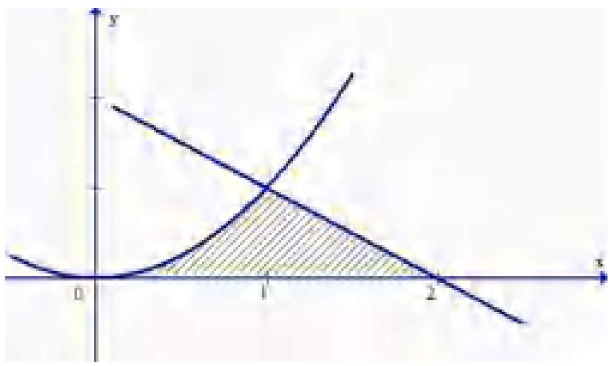
Chọn B. Ta có: $\begin{cases} 0=\sqrt{x}\Rightarrow x=0 \\ 0=x-2\Rightarrow x=2 \\ \sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=4 \end{cases}$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=0;\ x=2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và $x=2;\ x=4$
.

Thể tích vật thể bằng: $V=\pi\int\limits_0^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int\limits_2^4\left|(x-2)^2-\sqrt{x}^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2 x\mathrm{d}x+\pi\int\limits_2^4\left(x-(x-2)^2\right)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x-2)^3}{3}\right)\right|_2^4=\frac{16\pi}{3}.$$

Câu 49. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y=x^2$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành trên đoạn $[0;2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $S=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(-x+2)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_1^2=\frac{5}{6}$.

Câu 50. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2+x-2,\ y=x+2$ và hai đường thẳng $x=-2;\ x=3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{87}{5}$ **B.** $\frac{87}{4}$ **C.** $\frac{87}{3}$ **D.** $\frac{87}{5}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(x^2+x-2)-(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Suy ra $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-4\right|dx+\int\limits_2^3\left|x^2-4\right|dx=\frac{87}{3}$

Câu 51. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-x^2+4x-4}{x-1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x=0, x=a\ (a<0)$ có diện tích bằng 5 Khi đó a bằng

A. $1-e^5$ **B.** $1+e^5$ **C.** $1+2e^5$ **D.** $1-2e^5$

Hướng dẫn giải

Ta có $TCX: y=-x+3$

Nên $S(a)=\int_a^0\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_0^a\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln|x-1|\Big|_0^a=\ln(1-a)$. Suy ra $\ln(1-a)=5\Leftrightarrow a=1-e^5$

Câu 52. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=\sin x$, $y=\cos x$ và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ bằng ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$. Phương trình $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Cho $\frac{\pi}{4}+k\pi\in[0;\pi]\Rightarrow k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Biến đổi $S=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$

$=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|(-\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right|=2\sqrt{2}$.

Câu 53. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x$ và $y=\mathrm{e}^x$, trục tung và đường thẳng $x=1$ được tính theo công thức:

A. $S=\int_0^1|\mathrm{e}^x-1|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_0^1(x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-1}^1|\mathrm{e}^x-x|\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Vì trong khoảng $(0;1)$ phương trình $\mathrm{e}^x=x$ không có nghiệm và $\mathrm{e}^x>x$, $\forall x\in(0;1)$ nên

$$S=\int_0^1|\mathrm{e}^x-x|\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^x-x)\,\mathrm{d}x.$$

Câu 54. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=2$, $x=0$, $x=1$.

A. $S=4\ln 2+\mathrm{e}-5$. **B.** $S=4\ln 2+\mathrm{e}-6$. **C.** $S=\mathrm{e}^2-7$. **D.** $S=\mathrm{e}-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S=\int_0^1|\mathrm{e}^x-2|\,\mathrm{d}x$. Xét $\mathrm{e}^x-2=0\Leftrightarrow x=\ln 2$.

Bảng xét dấu e^x-2:

x	0		$\ln 2$		1
e^x-2		$-$	0	$+$	

Ta có $S=\int_0^1|\mathrm{e}^x-2|\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\ln 2}(\mathrm{e}^x-2)\,\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^1(\mathrm{e}^x-2)\,\mathrm{d}x=(2x-\mathrm{e}^x)\Big|_0^{\ln 2}+(\mathrm{e}^x-2x)\Big|_{\ln 2}^1$

$=4\ln 2+\mathrm{e}-5$. Vậy $S=4\ln 2+\mathrm{e}-5$.

Câu 55. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=\frac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ \ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

A. $a=1$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $S=\int_a^{2a}\left|\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|dx=\int_a^{2a}\left|\frac{1}{x-1}\right|dx=\int_a^{2a}\frac{1}{x-1}dx$ (vì $a>1$) $=\ln(x-1)\Big|_a^{2a}$ (vì $a>1$)

$=\ln(2a-1)-\ln(a-1)=\ln\frac{2a-1}{a-1}$. Ta có: $\ln\frac{2a-1}{a-1}=\ln 3\Leftrightarrow\frac{2a-1}{a-1}=3\Leftrightarrow a=2$.

Câu 56. Biết diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ (với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $\left(\frac{7}{10},1\right)$. **B.** $\left(\frac{51}{50},\frac{11}{10}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{10};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1,\frac{51}{50}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\sin x<\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin x>\cos x$ với $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

Diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0,x=a$ với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là

$$S=\int_0^a|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-\cos x|dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^a|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^a(\sin x-\cos x)dx$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^a$$

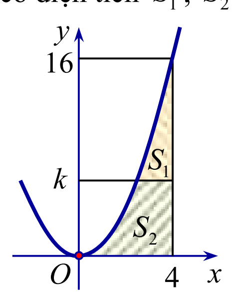
$$\Rightarrow S=\frac{-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$$

$$S=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^a=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 0\right)$$

$$S=\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow a-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}\approx 1,047\Rightarrow a\in\left(\frac{51}{50},\frac{11}{10}\right).$$

Câu 57. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1=S_2$.

A. $k=8$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=k$ là $x=\sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int\limits_{\sqrt{k}}^{4} \left(x^2 - k\right) \mathrm{d}x$, diện tích $S_2 = \int\limits_{0}^{4} x^2 \mathrm{d}x - S_1$.

Ta có $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_{\sqrt{k}}^{4} \left(x^2 - k\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} x^2 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\left(\frac{x^3}{3} - kx\right)\right|_{\sqrt{k}}^{4} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{64}{3} - 4k - \frac{\sqrt{k^3}}{3} + \sqrt{k^3} = \frac{32}{3}$

$\Leftrightarrow 16 = 6k - \sqrt{k^3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{k}\right)^3 - 6\left(\sqrt{k}\right)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{k} = 2 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 \end{array}\right. \overset{k \in (0;16)}{\Rightarrow} k = 4$

Câu 58. Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f\left(x\right)$, $y = 3g\left(x\right)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right) - 2$, $y = g\left(x\right) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $S_1 = 2S_2$. **B.** $S_1 = 3S_2$. **C.** $S_1 = 2S_2 - 2$. **D.** $S_1 = 2S_2 + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$S_1 = \int\limits_a^b \left|3f\left(x\right) - 3g\left(x\right)\right| \mathrm{d}x = 3\int\limits_a^b \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| \mathrm{d}x = 3\int\limits_a^b \left|\left[\left(f\left(x\right) - 2\right) - \left(g\left(x\right) - 2\right)\right]\right| \mathrm{d}x = 3S_2$.

Dạng 3:Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$

Câu 59. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{9}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ và $2 - x^2 \ge -x, \forall x \in [-1;2]$

Nên $S = \int\limits_{-1}^{2} (2 + x - x^2) dx = \left.\left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$

Câu 60. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int\limits_0^1 \left|x^2 - x\right| \mathrm{d}x = \left|\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\right| = \frac{1}{6}$.

Câu 61. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{1}{13}$ **C.** $\frac{1}{14}$ **D.** $\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Nên $S = \int\limits_0^1 \left|\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right| dx = \left|\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx\right| = \left|\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\right|_0^1\right| = \frac{1}{12}$

Câu 62. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ và $y=x^3-4x^2+2x+1$ là

A. $\frac{37}{13}$ **B.** $\frac{37}{12}$ **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Ta có $2x^3-3x^2+1=x^3-4x^2+2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Nên $S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx\right|$

$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{37}{12}$

Câu 63. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=x^2-4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S=\frac{4}{3}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\frac{8}{3}$. **D.** $S=\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $y'=2x$. $y'(2)=4$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$: $y=2(x-2)=2x-4$. Diện tích hình phẳng là

$S=\int_0^2\left|x^2-4-(2x-4)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2\right|=\frac{4}{3}$.

Câu 64. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left(1+e^x\right)x,\ y=(1+e)x$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{e-1}{2}$ **B.** $\frac{e-2}{2}$ **C.** $\frac{e-2}{2}$ **D.** $\frac{e+1}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $\left(1+e^x\right)x-(1+e)x=0$ có nghiệm $x=0,\ x=1$

Suy ra $S=\int_0^1\left|x\left(e-e^x\right)\right|dx=\int_0^1 x\left(e-e^x\right)dx=\frac{e-2}{2}$

Câu 65. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-1\right|,\ y=|x|+5$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{71}{3}$ **B.** $\frac{73}{3}$ **C.** $\frac{70}{3}$ **D.** $\frac{74}{3}$

Hướng dẫn giải

PT $\left|x^2-1\right|=|x|+5$ có nghiệm $x=-3,\ x=3$. Suy ra

$S=\int_{-3}^{3}\left|\left(\left|x^2-1\right|-(|x|+5)\right)\right|dx=2\int_0^3\left|\left|x^2-1\right|-(x+5)\right|dx$

Bảng xét dấu x^2-1 trên đoạn $[0;3]$

x	0 1 3
x^2-1	- 0 +

Vậy $S=2\left|\int_0^1\left(-x^2-x-4\right)dx+\int_1^3\left(x^2-x-6\right)dx\right|=\frac{73}{3}$

Câu 66. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\begin{cases}-x, & \text{khi } x\le 1\\ x-2, & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $y=\frac{10}{3}x-x^2$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{10}{3}x-x^2=-x\Rightarrow x=0$; $\frac{10}{3}x-x^2=x-2\Rightarrow x=3$

Nên $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx=\frac{13}{2}$

Câu 67. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{108}{5}$ **B.** $\frac{109}{5}$ **C.** $\frac{109}{6}$ **D.** $\frac{119}{6}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $\left|x^2-4x+3\right|=x+3$ có nghiệm $x=0,\ x=5$

Suy ra $S=\int_0^1\left(-x^2+5x\right)dx+\int_1^3\left(x^2-3x+6\right)dx+\int_3^5\left(-x^2+5x\right)dx=\frac{109}{6}$

Câu 68. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=x^2+3$, tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x=2$ và trục tung bằng

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 2 **D.** $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

PTTT của (P) tại $x=2$ là $y=4x+3$

Xét pt $\left(x^2+3\right)-\left(4x+3\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

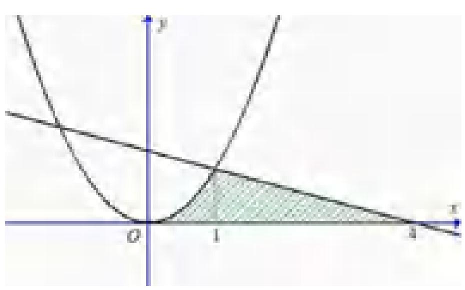
Suy ra $S=\int_0^2\left|\left(x^2-4x+4\right)\right|dx=\left|\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)dx\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\right|_0^2\right|=\frac{8}{3}$

Câu 69. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{61}{3}$. **C.** $\frac{343}{162}$. **D.** $\frac{39}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x^2$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ là

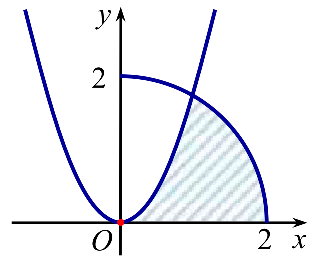
$x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ với trục hoành là $x=4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2$ với trục hoành là $x=0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^4\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{4}{3}x\right)\right|_1^4=\frac{11}{6}$.

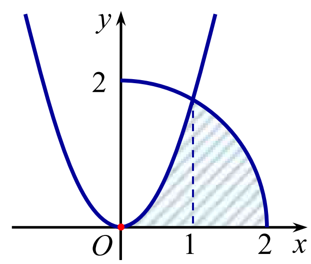
Câu 70. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$.
B. $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.
C. $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$.
D. $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) là

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\frac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$ (vì $0\le x\le 2$).

Cách 1: Diện tích của (H) là $S=\int_0^1\sqrt{3}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\left.\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\right|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I$ với $I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt: $x=2\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t.\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2t).dt=\left.(2x+\sin 2t)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S=\frac{\sqrt{3}}{3}+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy. Tức là $S=\pi-\int_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 71. Gọi S là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y=3x^2 \\ y=mx\end{cases}$.Tìm m để diện tích S=4?

A. m=6
B. m=-6
C. m=$\pm$6
D. Không tồn tại m

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét phương trình $3x^2 = mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{m}{3} \end{array}\right.$

Xét m>0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_0^{\frac{m}{3}} \left|3x^2 - mx\right| dx = \int_0^{\frac{m}{3}} \left(mx - 3x^2\right) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_{\frac{m}{3}}^{0} = \frac{m^3}{54}$$

$$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = 6$$

Xét m<0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_{\frac{m}{3}}^{0} \left|3x^2 - mx\right| dx = \int_0^{\frac{m}{3}} \left(mx - 3x^2\right) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_{\frac{m}{3}}^{0} = -\frac{m^3}{54}$$

$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \dfrac{-m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = -6$. Vậy $m = \pm 6$

Câu 72. Cho (P) $y = x^2 + 1$ và (d) $y = mx + 2$. Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn (P) và (d) đạt giá trị nhỏ nhất ?

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{4}$ **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:
$x^2 - mx - 1 = 0, \Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 \ge 0 \forall m$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2; theo định lý Viet kết hợp yêu cầu: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \\ x_1 < x_2 \end{cases}$

Ta có: $S = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 2 - x^2 - 1) dx = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 1 - x^2) dx$

$$= \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{mx_2^{\,2}}{2} - \frac{x_2^{\,3}}{3} + x_2 - \frac{mx_1^{\,2}}{2} + \frac{x_1^{\,3}}{3} - x_1$$

$= (x_2 - x_1)\left[\dfrac{m^2}{2} + 1 - \dfrac{1}{3}(m^2 + 1)\right] = \sqrt{m^2 + 4}\left(\dfrac{m^2}{6} + \dfrac{2}{3}\right)$. S có GTNN khi $m = 0$.

Câu 73. Với giá trị nào của m thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = -x^2 + 2x$ và $(d): mx\left(m < 0\right)$ bằng 27 đơn vị diện tích

A. $m = -1$ **B.** $m = -2$ **C.** $m \in \varnothing$ **D.** $m \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

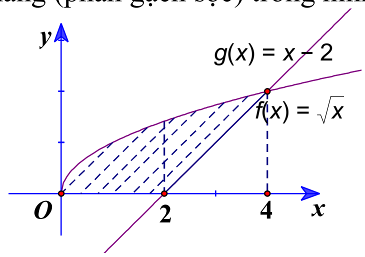
Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 2x = mx \Leftrightarrow x^2 - \left(2 - m\right)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 - m > 0 \end{array}\right.$

$$S=\int_0^{2-m}\left|-x^2+2x-mx\right|dx=\int_0^{2-m}\left(-x^2+2x-mx\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{mx^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-m}=-m^3+6m^2-12m+8=27$$

Do đó $m=-1$.

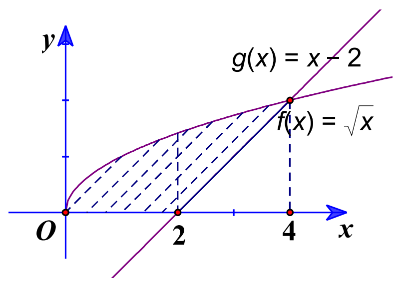
Câu 74. Tích diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S=\frac{8}{3}$. **B.** $S=\frac{10}{3}$. **C.** $S=\frac{11}{3}$. **D.** $S=\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x-2 \\ y=0 \end{cases}$.

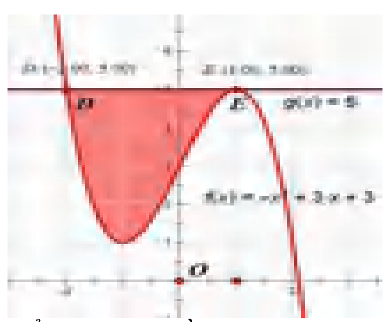
Suy ra $S=\int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$.

Câu 75. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+3$ và đường thẳng $y=5$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$-x^3+3x+3=5 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x=\frac{27}{4}$.

Câu 76. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$; $y=2x-2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

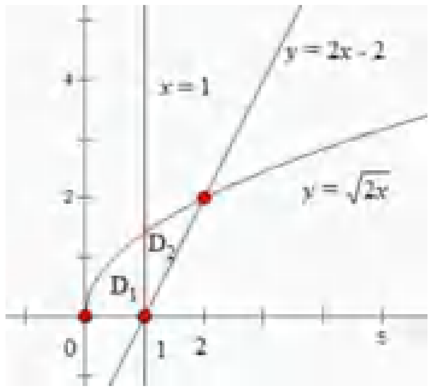
Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm :

□ $\sqrt{2x}=2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 2x=(2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 4x^2-10x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

□ $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$.

□ $\sqrt{2x}=0 \Rightarrow x=0$.

Đồ thị:



Diện tích hình (H): $S=S_{D_1}+S_{D_2}=\int_0^1 \sqrt{2x}\,dx+\int_1^2 \left(\sqrt{2x}-2x+2\right)dx=\frac{5}{3}$

Câu 77. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $S=13$. **B.** $S=\frac{81}{12}$. **C.** $S=\frac{9}{4}$. **D.** $S=\frac{37}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $x^3-x=x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ta có $S=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_0^1\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|=\frac{37}{12}$.

Câu 78. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2-1$ (đvdt). **B.** $S=2\ln 2-1$ (đvdt). **C.** $S=2\ln 2+1$ (đvdt). **D.** $S=\ln 2+1$ (đvdt).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

Ta có $S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=-\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx=-\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx=-\left(x-2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1$.

Câu 79. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{343}{12}$ **B.** $S=\frac{793}{4}$ **C.** $S=\frac{397}{4}$ **D.** $S=\frac{937}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

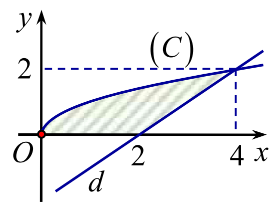
Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình;

$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow -x^3+12x+x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \\ x=0 \end{array}\right.$

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{0}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3-12x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(-x^3+12x+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}$.

Câu 80. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ và $y=x-2$:

$\sqrt{x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$.

Diện tích hình phẳng (H) là

$S=\int\limits_{0}^{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\left|\sqrt{x}-(x-2)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\left(\sqrt{x}-x+2\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^2+\left.\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_2^4=\frac{10}{3}$.

Câu 81. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4,2)$ và trục hoành là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi d là phương trình tiếp tuyến của hàm số $y=\sqrt{x}$ tại $M(4,2) \Rightarrow d: y=\frac{1}{4}x+1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, d và trục Ox là

$S=\int\limits_{-4}^{0}\left(\frac{1}{4}x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Câu 82. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=x+2$ là

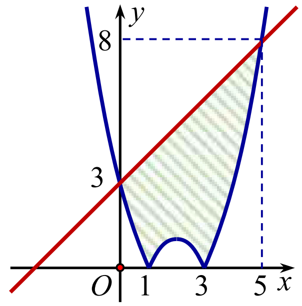
A. $S=9$. **B.** $S=\frac{9}{4}$. **C.** $S=\frac{9}{2}$. **D.** $S=\frac{8}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2=x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{-1}^{2}\right|=\frac{9}{2}$.

Câu 83. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{37}{2}$. **B.** $\dfrac{109}{6}$. **C.** $\dfrac{454}{25}$. **D.** $\dfrac{91}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Diện tích của (H) là $S=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right|\mathrm{d}x=\int_0^5\left(x+3-\left|x^2-4x+3\right|\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^5(x+3)\mathrm{d}x-\left[\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x-\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x+\int_3^5\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^5-\left[\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_3^5\right]$$

$$=\frac{55}{2}-\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}\right)=\frac{109}{6}.$$

Câu 84. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^2$ và $y=5x-2$.

A. $S=\dfrac{5}{4}$. **B.** $S=\dfrac{5}{8}$. **C.** $S=\dfrac{9}{8}$. **D.** $S=\dfrac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=2x^2$ và $y=5x-2$:

$$2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ hoặc } x=2$$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|2x^2-5x+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{9}{8}\right|=\frac{9}{8}.$$

Câu 85. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=x.$

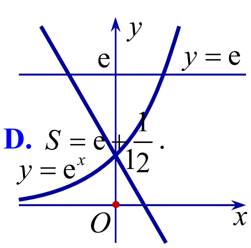
A. $S=\dfrac{1}{6}$. **B.** $S=\dfrac{5}{6}$. **C.** $S=\dfrac{1}{3}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=x\rightarrow x=0 \ \vee x=1$

Diện tích hình phẳng là $S=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\dfrac{1}{6}$

Câu 86. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}$, $y=\mathrm{e}^x$ và $y=(1-\mathrm{e})x+1$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S=\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$. **B.** $S=\mathrm{e}+\dfrac{3}{2}$. **C.** $S=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D.** $S=\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e^x$ với đường thẳng $y = e$ là $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e^x$ với đường thẳng $y = (1-e)x + 1$ là $e^x = (1-e)x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e$ với đường thẳng $y = (1-e)x + 1$ là $e = (1-e)x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^{0} |e - (1-e)x - 1| dx + \int_{0}^{1} |e - e^x| dx$

$$= \left|\int_{-1}^{0} \left(e - (1-e)x - 1\right) dx\right| + \left|\int_{0}^{1} \left(e - e^x\right) dx\right| = \left|\left((e-1)x - \frac{(1-e)x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\left(ex - e^x\right)\Big|_{0}^{1}\right| = \frac{e+1}{2}.$$

Cách 2: Xem x là hàm theo biến y.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $x = \ln y$, $x = \frac{1}{1-e}(y-1)$, $y = 1$, $y = e$.

Diện tích hình (H) là $S = \int_{1}^{e} \left[\ln y - \frac{1}{1-e}(y-1)\right] dy = \int_{1}^{e} \ln y dy - \frac{1}{1-e}\int_{1}^{e} (y-1) dy$

Tính $A = \int_{1}^{e} \ln y dy = (y \ln y - y)\Big|_{1}^{e} = 1$

Tính $B = \frac{1}{1-e}\int_{1}^{e} (y-1) dy = \frac{1}{1-e}\left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_{1}^{e} = \frac{1}{1-e}\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right) = \frac{1-e}{2}$

Vậy $S = 1 - \frac{1-e}{2} = \frac{e+1}{2}$.

Câu 87. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 2x$ và đường thẳng $y = x$.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $\frac{27}{6}$. **D.** $\frac{17}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int_{0}^{3} |x^2 - 2x - x| dx = \left|\int_{0}^{3} (x^2 - 3x) dx\right| = \frac{9}{2}$.

Câu 88. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Giá trị của a bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét phương trình: $ax^2 - 2 = 4 - 2ax^2 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ là

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} |3ax^2 - 6| dx = \left|\int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} (3ax^2 - 6) dx\right| = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Theo giả thiết $S=16 \Leftrightarrow \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=16 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 89. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$ và $y=x^5$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 2.

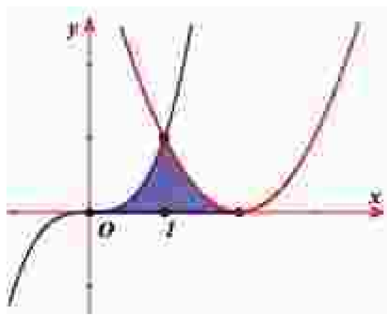
Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm $x^5=x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^5$ và $y=x^3$ bằng

$$S=\int_{-1}^{1}\left|x^5-x^3\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(x^5-x^3\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\left(x^5-x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

Câu 90. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-4x+4$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H).



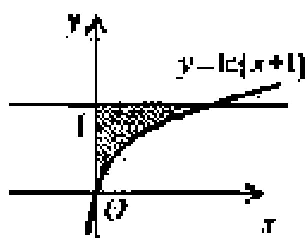
A. $S=\dfrac{11}{2}$. **B.** $S=\dfrac{7}{12}$. **C.** $S=\dfrac{20}{3}$. **D.** $S=-\dfrac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Parabol $y=x^2-4x+4$ có đỉnh $I(2;0)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-4x+4$ và $y=x^3$ là $x^3-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 91. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$, đường thẳng $y=1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $\mathrm{e}-2$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** 1. **D.** $\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\ln(x+1)$ và đường thẳng $y=1$ là $\ln(x+1)=1 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}-1$. Diện tích của (H) là $S=\int_{0}^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

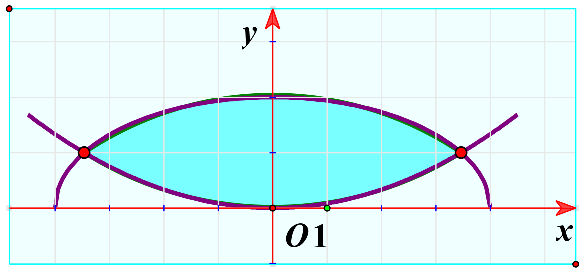
Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v=x+1 \end{cases}$. Khi đó $S=(x+1)\ln(x+1)\Big|_0^{\mathrm{e}-1}-\int_{0}^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$.

Câu 92. Hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x^2}{12}\Leftrightarrow 4-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^4}{144}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}+\dfrac{x^2}{4}-4=0\Leftrightarrow x^4+36x^2-576=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=12\\x^2=-48\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm2\sqrt{3}$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S=\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{x^2}{12}\mathrm{d}x$.

Xét $I=\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $x=4\sin t$, với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$.

Với $x=-2\sqrt{3}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}$ Với $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}16\cos^2 t\,\mathrm{d}t=8\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}$.

Vậy: $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)-\dfrac{x^3}{36}\Bigg|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=\dfrac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}-\left(\dfrac{24\sqrt{3}+24\sqrt{3}}{36}\right)=\dfrac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình tròn $(C):x^2+y^2=8$ và parabol $(P);y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$?

A. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **B.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi-2}{9\pi+2}$. **C.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi+2}$. **D.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi+1}{9\pi-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=8\ (1)\\ y=\dfrac{x^2}{2}\ (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $x^2+\dfrac{x^4}{4}=8\Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=-8\ (L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm2$

Phần nhỏ giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{2}$; $y=\sqrt{8-x^2}$; $x=-2$; $x=2$ nên ta có:

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\underbrace{\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)dx}_{A}-\underbrace{\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}dx}_{B}$$

Tính $A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)dx$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos t dt$. Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$; $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t dt=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4.$$

$$B=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}dx=\frac{8}{3}.$$

$\Rightarrow S_1=2\pi+\frac{4}{3}\Rightarrow S_2=\pi R^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$. Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

Câu 94. Tính diện tích hình phẳng giới han bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=-|x|$

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{11}{3}$.

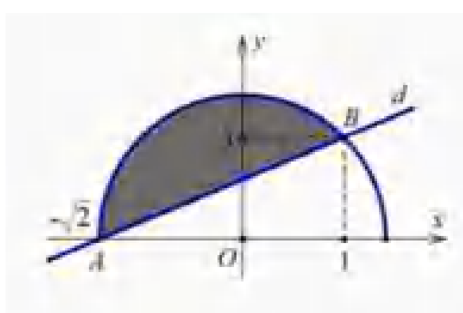
Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2=-|x|\Leftrightarrow|x|^2+|x|-2=0\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-2+|x|\right|dx=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+|x|\right)dx\right|=\left|\int_{-1}^{0}\left(x^2-2-x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^2-2+x\right)dx\right|$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-2x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{7}{6}\right|=\frac{7}{3}.$$

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $A\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $B(1;1)$ *(phần tô đậm như hình vẽ)*



A. $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có d đi qua $B(1;1)$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\left(1+\sqrt{2};1\right)$ (VTPT là $\vec{n}=\left(-1;1+\sqrt{2}\right)$

Suy phương trình tổng quát của $d:-1(x-1)+\left(1+\sqrt{2}\right)(y-1)=0\Leftrightarrow -x+\left(1+\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0$

$$y=\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}x-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x-\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x=A-B$$

Ta có $B=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{x^2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

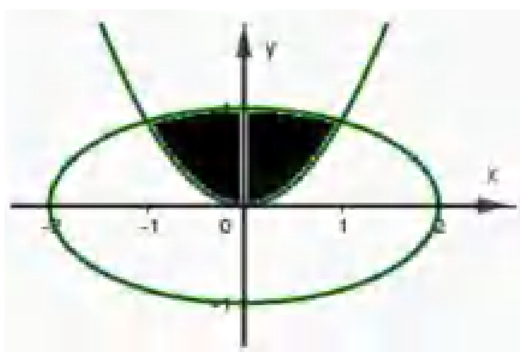
Xét tích phân $A=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$; Đổi cận: $x=-\sqrt{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$. $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$

Vậy $S=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 96. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của Elip và Parabol là

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-\frac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là $S_{(H)}=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx$, đặt $x=2\sin t$ ta được

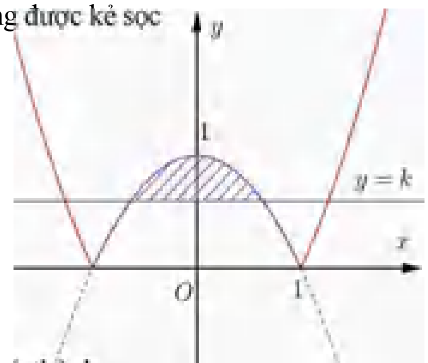
$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $S_{(H)} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

Chú ý: Ta có thể bấm máy $S_{(H)} = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} x^2 \right) dx$ rồi so sánh kết quả với các phương án.

Câu 97. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \left| x^2 - 1 \right|$ và $y = k, 0 < k < 1$.

Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.



A. $k = \sqrt[3]{4}$.

B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.

C. $k = \dfrac{1}{2}$.

D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

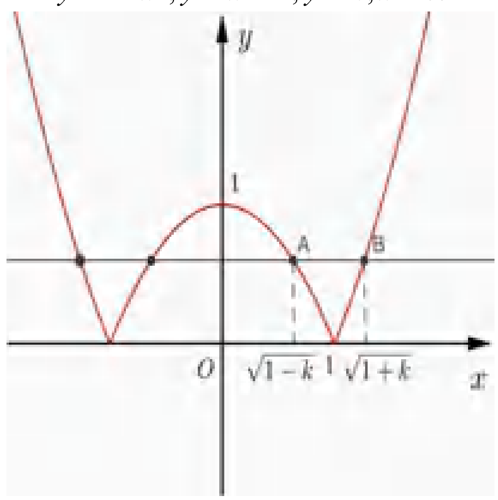
Hướng dẫn giải

Chọn D

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2, y = k, x = 0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, y = k, x > 0.$$



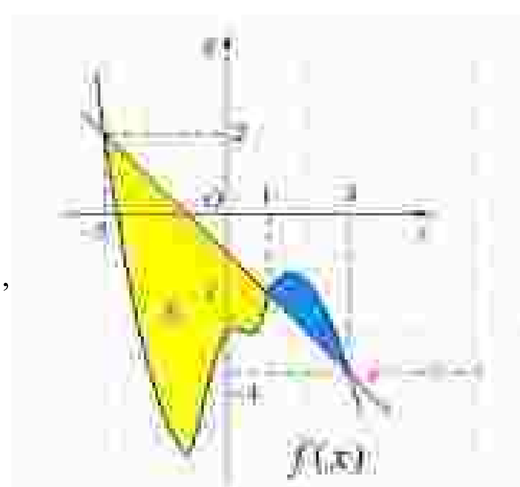
$$\int\limits_0^{\sqrt{1-k}} \left(1 - x^2 - k\right) dx = \int\limits_{\sqrt{1-k}}^{1} \left(k - 1 + x^2\right) dx + \int\limits_1^{\sqrt{1+k}} \left(k - x^2 + 1\right) dx.$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} + (1-k)\sqrt{1-k}$$

$$+ (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1.$$

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\int\limits_{-3}^{3} f(x) dx$ bằng



A. $6 + m - M$. **B.** $6 - m - M$.

C. $M - m + 6$. **D.** $m - M - 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

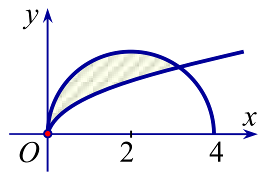
Ta có $M=S_1=\int\limits_{-3}^{1}\left(-x-1-f(x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-3}^{1}=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

$m=S_2=\int\limits_{1}^{3}\left(f(x)+x+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}(x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{1}^{3}=\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+6$.

$S_1-S_2=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x-6\Leftrightarrow M-m=-6-\left(\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x\right)$

$\Leftrightarrow M-m=-6-\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-M+6$

Câu 99. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

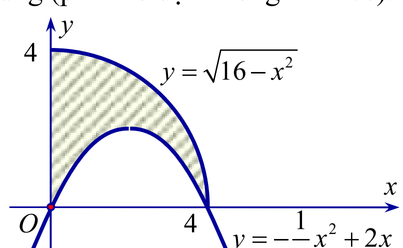
Chọn B. Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$. Vậy diện tích hình phẳng (H) là

$S=\int\limits_{0}^{3}\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{4-(x-2)^2}\mathrm{d}x-2\sqrt{3}$.

Đặt $x-2=2\sin t, t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Suy ra $S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t\mathrm{d}t-2\sqrt{3}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2t)\mathrm{d}t-2\sqrt{3}=(2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}-2\sqrt{3}$.

Câu 100. Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$, với ($0\le x\le 4$), trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D.



A. $8\pi-\frac{16}{3}$. **B.** $2\pi-\frac{16}{3}$. **C.** $4\pi+\frac{16}{3}$. **D.** $4\pi-\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Diện tích hình phẳng D là $S=\int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}-\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\right)\mathrm{d}x$.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x$ Đặt $x = 4\sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $I = \int \ \mathrm{d}t \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{t}\mathrm{d}t = 16\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = 4\pi$.

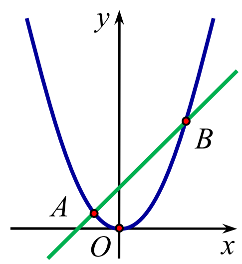
$J = \int\limits_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$. Vậy $S = 4\pi - \frac{16}{3}$.

Câu 101. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Cách 1: Gọi $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ với $a < b$. Ta có: $AB = 2 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4$

$AB: \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2} \Leftrightarrow \frac{x-a}{1} = \frac{y-a^2}{b+a} \Leftrightarrow y = (a+b)(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = (a+b)x - ab$

$S = \int\limits_a^b \left((a+b)x - ab - x^2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t = x - a$. Suy ra:

$S = \int\limits_0^{b-a} t(b-a-t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{b-a} \left((b-a)t - t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)t^2}{2}\Big|_0^{b-a} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^{b-a} = \frac{(b-a)^3}{6}$

Ta có: $(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2\left(1 + (b+a)^2\right) = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+(a+b)^2} \le 4$

Suy ra: $b - a \le 2 \Rightarrow S = \frac{(b-a)^3}{6} \le \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1;1)$; $B(1;1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\frac{4}{3}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể dự đoán (linh cảm:D) a, b đối nhau, nghĩa là: $a + b = 0$. Từ đó, thay vào $(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4$, tìm được $a = -1$, $b = 1$. Suy ra: $A(-1;1)$; $B(1;1)$.

Viết phương trình: $AB: y = 1$. Từ đó: $S = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Hoặc cũng linh cảm, đặc biệt hóa AB song song với Ox, từ đó cũng tìm được $a + b = 0$.

Cách 2: Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = ax^2 + bx + c$ và $(d): y = mx + n$. Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2=\dfrac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta=(b-m)^2-4a(c-n)$.

Áp dụng: Tương tự, ta có $(AB): y=(a+b)x-ab$, $a<b$.

PTHĐGĐ: $x^2=(a+b)x-ab \Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab=0$, có $\Delta=(b-a)^2$.

Suy ra: $S^2=\dfrac{\Delta^3}{36}=\dfrac{(b-a)^6}{36} \Rightarrow S=\dfrac{(b-a)^3}{6}$ và đánh giá như cách 1.

Câu 102. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\dfrac{64}{15}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{\pm 1\}$. **C.** $\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\pm 1\right\}$. **D.** $\left\{\pm\dfrac{1}{2};\pm 1\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y'=2x^3-4m^2x=2x\left(x^2-2m^2\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2}m \\ x=-\sqrt{2}m \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m\neq 0$

Vì $a=\dfrac{1}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=4m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2|m| \\ x=-2|m| \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$S=\int_{-2|m|}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|\mathrm{d}x=2\left|\int_{0}^{2|m|}\left(\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right)\mathrm{d}x\right|=2\left|\left(\frac{x^5}{10}-\frac{2}{3}m^2x^3\right)\Bigg|_0^{2|m|}\right|=\frac{64}{15}|m|^5$$

$$\text{Ta có } S=\frac{64}{15} \Leftrightarrow |m|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Câu 103. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Hướng dẫn giải

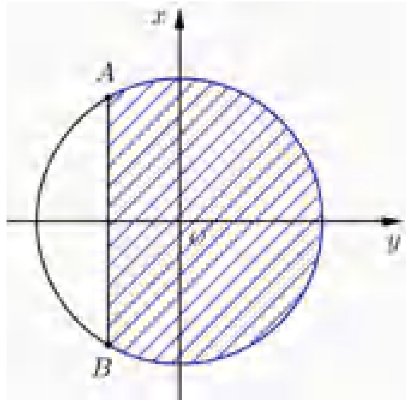
Chọn A

Cách 1:

Gọi diện tích cần tìm là S, diện tích của hình này chiếu xuống đáy là S'.

Ta có: $S'=S.\cos 60°$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.



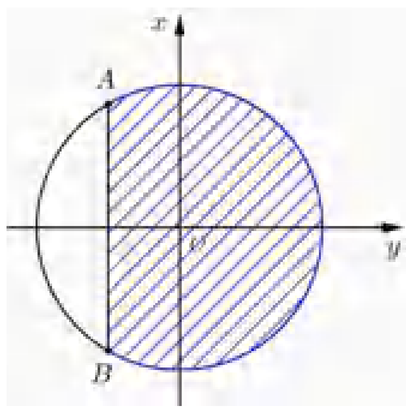
Trong ΔAOB ta có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Suy ra: sđ $\widehat{AOB}$ lớn $=\dfrac{4\pi}{3}$. Do đó $S'=S_{\text{quat}AOB}+S_{\Delta AOB}=\dfrac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}.\pi R^2+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)R^2=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

Vậy $S=\dfrac{S'}{\cos 60^\circ}=2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

Cách 2: Ta có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120^\circ\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Suy ra phương trình đường tròn đáy là $x^2+y^2=R^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

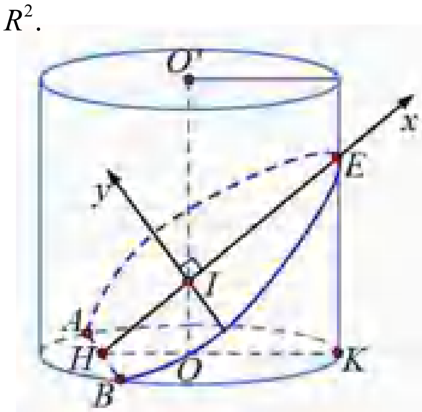
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t\Rightarrow S=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\dfrac{S}{\cos 60^\circ}=2S=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Cách 3: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.



* Ta có: $\widehat{IHO}=60^\circ$

$OH^2=OB^2-BH^2=R^2-\dfrac{3R^2}{4}=\dfrac{R^2}{4}$

$\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}\Rightarrow OI=OH.\tan 60^\circ=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, $IH=\dfrac{OH}{\cos 60^\circ}=R$,

$\Delta IOH\sim\Delta EKH$ nên ta có:

$\dfrac{IE}{IH}=\dfrac{OK}{OH}=2\Rightarrow IE=2R$.

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a=IE=2R$ và (E) đi qua $A\left(-R;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E):\dfrac{x^2}{4R^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$.

* Diện tích của thiết diện là $S=2\int\limits_{-R}^{2R}R\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x=2R\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$

* Xét tích phân: $I=\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$, đặt $x=2R.\sin t;\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được

$$I=\frac{R}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{R}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)R\Rightarrow S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

Câu 104. Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max}=\dfrac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\dfrac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Giả sử $A(a;a^2)$; $B(b;b^2)(b>a)$ sao cho $AB=2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y=(a+b)x-ab$. Khi đó

$$S=\int\limits_a^b\left|(a+b)x-ab-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

Vì $AB=2018\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=2018^2\Leftrightarrow(b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right)=2018^2$.

$\Rightarrow(b-a)^2\le 2018^2\Rightarrow|b-a|=b-a\le 2018\Rightarrow S\le\dfrac{2018^3}{6}$.

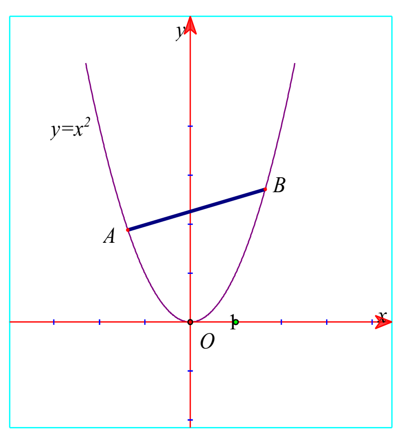
Vậy $S_{\max}=\dfrac{2018^3}{6}$ khi $a=-1009$ và $b=1009$.

Câu 105. Cho parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $A\left(a;a^2\right)$ và $B\left(b;b^2\right)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB=2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a<b$.

Theo giả thiết ta có $AB=2$ nên

$(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4\Leftrightarrow(b-a)^2\left[(b-a)^2+1\right]=4$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y=(b+a)x-ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S=\int_a^b\left[(a+b)x-ab-x^2\right]\mathrm{d}x=\left[(a+b)\frac{x^2}{2}-abx-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Mặt khác $(b-a)^2\left[(b-a)^2+1\right]=4$ nên $|b-a|=b-a\le 2$ do $(b-a)^2+1\ge 1$.

Vậy $S=\frac{(b-a)^3}{6}\le\frac{2^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\frac{4}{3}$.

Dạng 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong (>2 đường cong)

Câu 106. Cho parabol $(P): y=x^2+2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Hướng dẫn giải

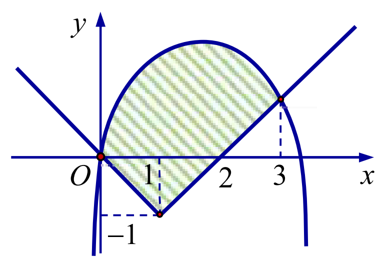
Chọn A. Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là $d_1: y=-2x+1$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(2;6)$ là $d_2: y=4x-2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2: $-2x+1=4x-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Vậy $S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|x^2+2+2x-1\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|x^2+2-4x+2\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$.

Câu 107. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{13}{2}$.

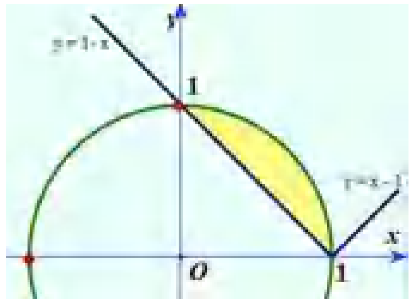
Câu 108. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $\frac{\pi}{4}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ 1-x & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y=\sqrt{1-x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Cách 1:

Diện tích hình phẳng trên là:

$S=\frac{1}{4}.\pi R^2-\frac{1}{2}.1.1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn – diện tích tam giác vuông cân)

Cách 2:

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\,\mathrm{d}x=I_1+\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_0^1=I_1-\frac{1}{2}.$$

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x=\cos t.\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left.\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$ Vậy $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Câu 109. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x$, $y=x^2$, $y=1$ trên miền $x\ge 0, y\le 1$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

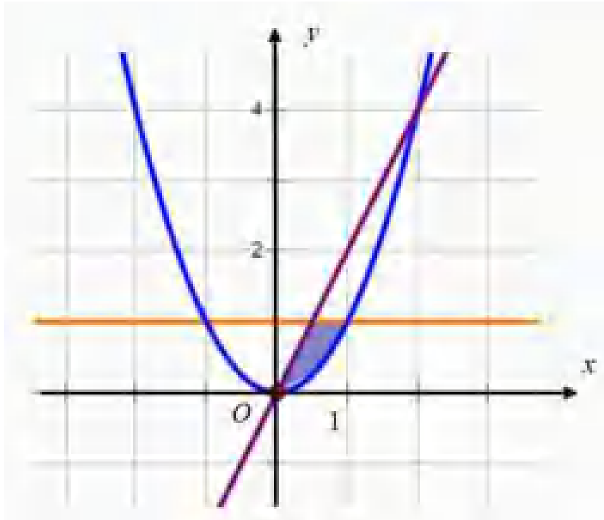
Cách 1: Ta có: $y=2x\Leftrightarrow x=\frac{y}{2}$; $y=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ (do $x\ge 0$).

Suy ra: $S=\int_0^1\left|\sqrt{y}-\frac{y}{2}\right|\mathrm{d}y=\frac{5}{12}$ (Bấm máy trực tiếp hoặc xét dấu bỏ $|\ |$)

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0$ $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.



Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

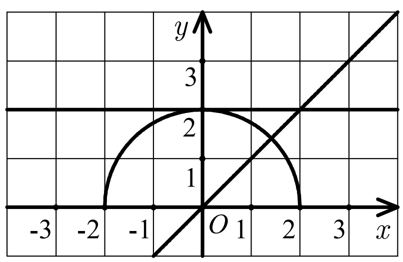
$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{12}.$$

Câu 110. Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 2$, $y = x$ có diện tích là $S = a + b.\pi$. Chọn kết quả đúng:

A. $a > 1$, $b > 1$. **B.** $a + b < 1$. **C.** $a + 2b = 3$. **D.** $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Các phương trình hoành độ giao điểm:

* $\sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$

* $\sqrt{4 - x^2} = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

* $x = 2$.

Diện tích cần tính là: $S = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{4 - x^2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} (2 - x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} 2\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} (2 - x)\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$

$= (2x)\Big|_0^{\sqrt{2}} + \left(2x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = 3 - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$.

Ta có $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2 t\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\left(1 + \cos 2t\right)\mathrm{d}x$

$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$. Vậy $S = 3 - \frac{\pi}{2} - 1 = 2 - \frac{1}{2}.\pi$.

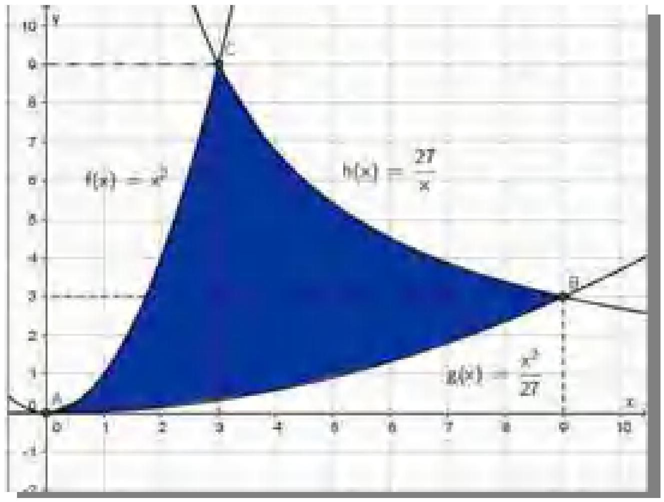
Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Câu 111. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$; $y = \frac{1}{27}x^2$; $y = \frac{27}{x}$ bằng

A. $27\ln 2$ **B.** $27\ln 3$ **C.** $28\ln 3$ **D.** $29\ln 3$

Hướng dẫn giải

Xét các pthđgđ $x^2 - \frac{x^2}{27} = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 3; \frac{x^2}{27} - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 9$



Suy ra $S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27}\right)dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27}\right)dx = 27\ln 3$

Câu 112. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $y' = 2x - 6$. Gọi tiếp tuyến tại điểm $A(1;7)$ là d_1

Suy ra $d_1: y = y'(1)(x-1) + 7 = -4x + 11$.

Gọi tiếp tuyến tại điểm $B(-1;19)$ là d_2. Suy ra $d_2: y = y'(-1)(x+1) + 19 = -8x + 11$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_1 và parabol là

$$x^2 - 6x + 12 = -4x + 11 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và parabol là

$$x^2 - 6x + 12 = -8x + 11 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và d_1 là

$$-4x + 11 = -8x + 11 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là

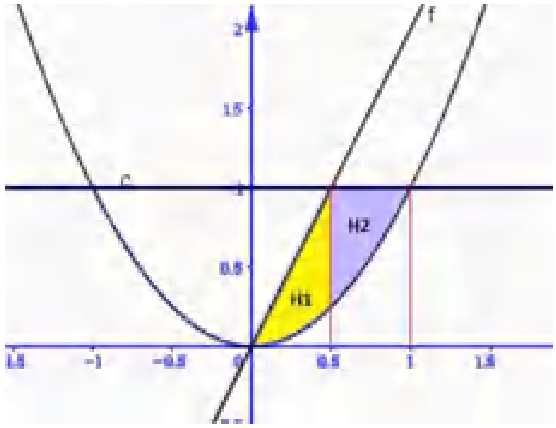
$$S = \int_{-1}^{0} \left|x^2 - 6x + 12 + 8x - 11\right| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|x^2 - 6x + 12 + 4x - 11\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 113. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$; $y = x^2$; $y = 1$ trên miền $x \geq 0$; $y \leq 1$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$; $2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Hình phẳng cần tính được tạo từ hai hình (H_1) và (H_2)

Trong đó $(H_1)\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \\ x = 0;\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|2x - x^2\right| dx = \dfrac{5}{24}$.

Và $(H_2) = \begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \\ x = \dfrac{1}{2};\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|1 - x^2\right| dx = \dfrac{5}{24}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{5}{24} + \dfrac{5}{24} = \dfrac{5}{12}$.

Câu 114. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x, y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là $\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 68 **B.** 67 **C.** 66 **D.** 65

Hướng dẫn giải

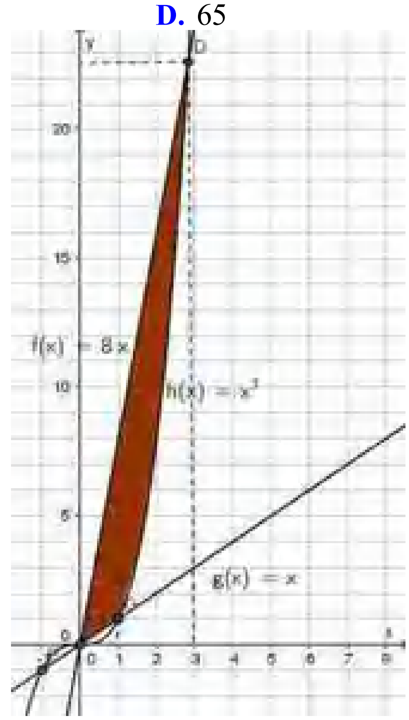
Ta có

$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0;$

$8x - x^3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{array}\right.;$

$x - x^3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Nên $S = \int_0^1 (8x - x)dx + \int_1^{2\sqrt{2}} \left(8x - x^3\right)dx = \dfrac{63}{4}$

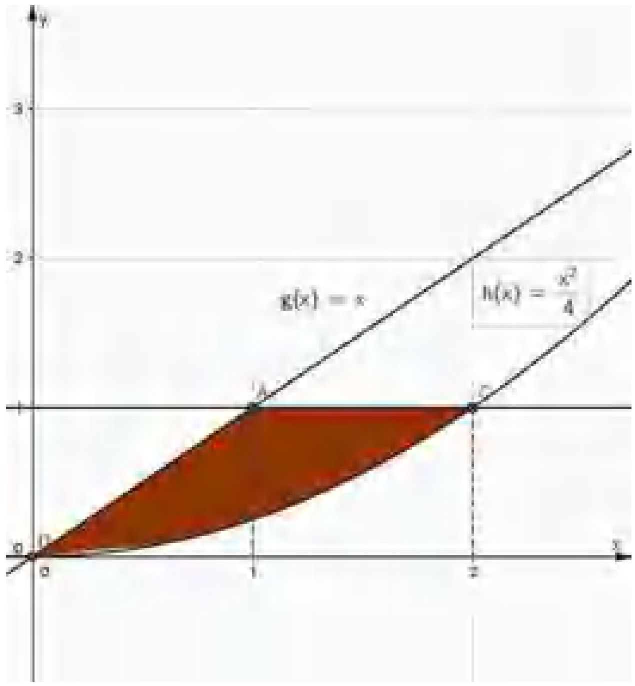


Câu 115. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=1, y=x$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ trong miền $x\geq 0, y\leq 1$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Ta có $x-1=0\Rightarrow x=1; x-\frac{x^2}{4}=0\Rightarrow x=0; 1-\frac{x^2}{4}=0\Rightarrow x=2$



Nên $S=\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_1^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{5}{6}$

Câu 116. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y=x^2-4x+5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

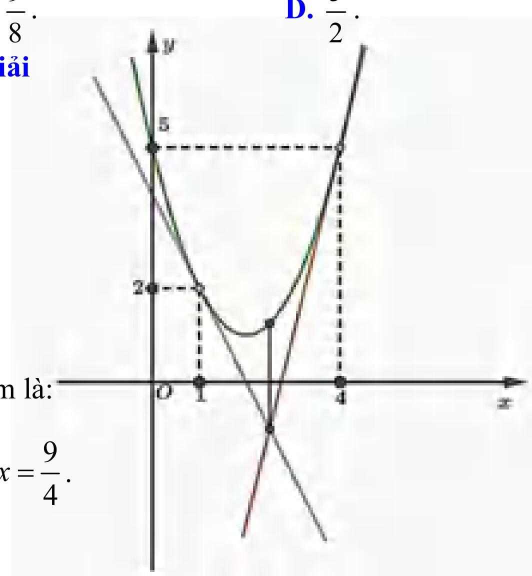
Chọn A.

Ta có $y'=2x-4$.

Tiếp tuyến của (P) tại A và B lần lượt là

$y=-2x+4$; $y=4x-11$.

Giao điểm của hai tiếp tuyến là $M\left(\frac{5}{2};-1\right)$.



Khi đó, dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là:

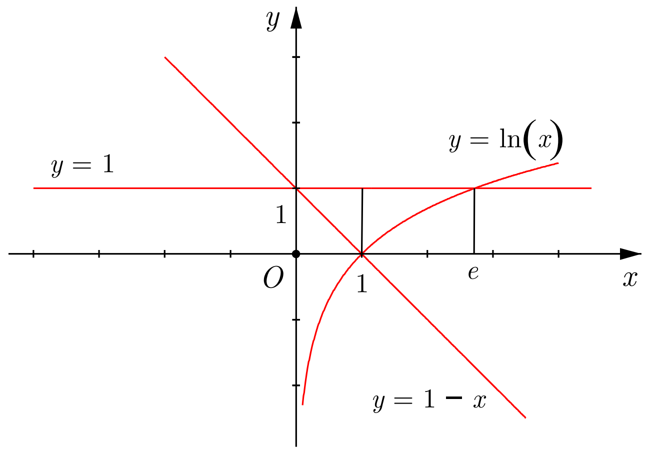
$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left(x^2-4x+5+2x-4\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{5}{2}}^4\left(x^2-4x+5-4x+11\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

Câu 117. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y=\ln x$, $y=1$, $y=1-x$.

A. $S = \mathrm{e} - \dfrac{3}{2}$. **B.** $S = \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$. **C.** $S = \mathrm{e} + \dfrac{1}{2}$. **D.** $S = \mathrm{e} + \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $S = \int_0^1 \left[1-(1-x)\right]\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.x(1-\ln x)\right|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}(1-\ln x)$

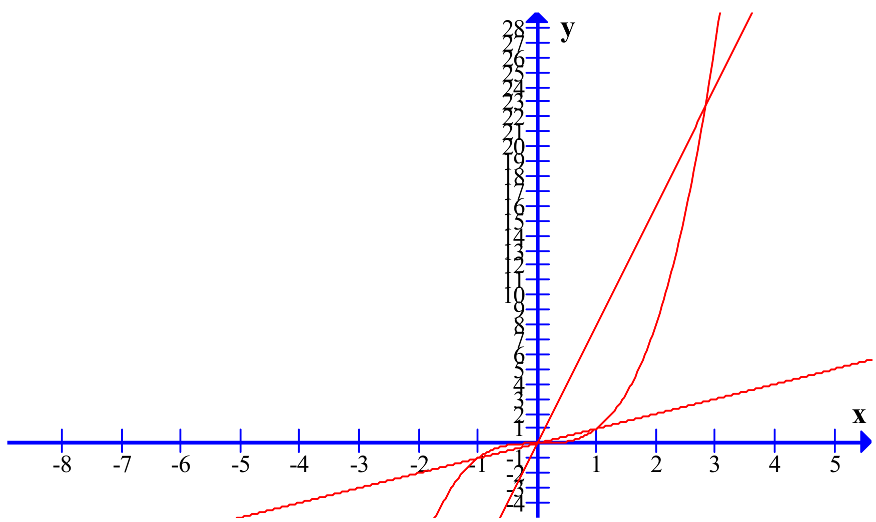
$= \dfrac{1}{2} - 1 - \int_1^{\mathrm{e}} x.\dfrac{-1}{x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} + \left.x\right|_1^{\mathrm{e}} = -\dfrac{1}{2} + (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e} - \dfrac{3}{2}$.

Câu 118. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 62. **B.** 67. **C.** 33. **D.** 66.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $x^3 = 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ loại $x = -2\sqrt{2}$

$x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$ loại $x = -1$

Suy ra $S = \int_0^{2\sqrt{2}} (8x - x^3)\mathrm{d}x - \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \left.\left(\dfrac{8x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right)\right|_0^{2\sqrt{2}} - \left.\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = 16 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{63}{4}$

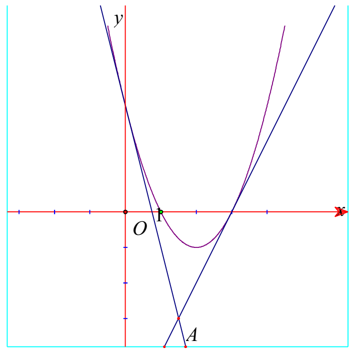
Khi đó $a + b = 67$.

Câu 119. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3$ (P) và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Giả sử Δ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ và có hệ số góc k, khi đó $\Delta: y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-3$.

Để đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ thì hệ phương trình $\begin{cases} 2x-4=k & (1) \\ x^2-4x+3=k\left(x-\frac{3}{2}\right)-3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (1) vào (2) ta được $x^2-4x+3=(2x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right)-3 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Với $x=0$ thì $k=-4$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+3$.

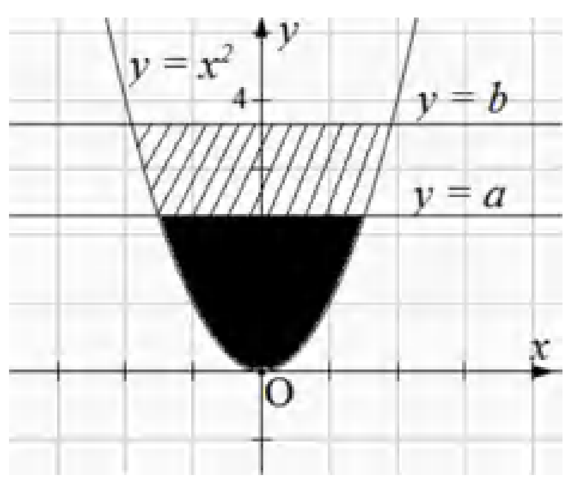
Với $x=3$ thì $k=2$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=2x-9$.

Diện thích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3$ và hai tiếp tuyến $y=-4x+3$ và $y=2x-6$ là

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-4x+3+4x-3\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-4x+3-2x+6\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{3}{2}}+\left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{4}.$$

Câu 120. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$.

C. $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là $x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

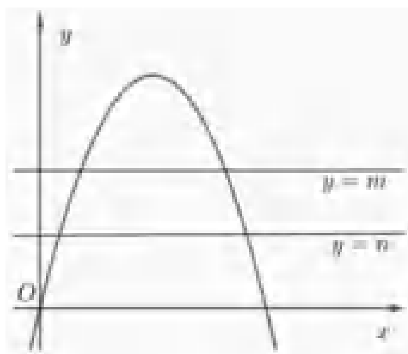
$$S = 2\int_0^{\sqrt{b}} \left(b - x^2\right) \mathrm{d}\,x = 2\left(bx - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}} = 2\left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3}\right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1 = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) \mathrm{d}\,x = 2\left(ax - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Do đó $S = 2S_1 \Leftrightarrow \dfrac{4b\sqrt{b}}{3} = 2.\dfrac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3 = 2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a$.

Câu 121. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ).



Giá trị biểu thức $T = (4 - m)^3 + (4 - n)^3$ bằng

A. $T = \dfrac{320}{9}$. **B.** $T = \dfrac{75}{2}$. **C.** $T = \dfrac{512}{15}$. **D.** $T = 450$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Sử dụng công thức: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ và trục hoành bằng $S = \dfrac{\sqrt{\Delta^3}}{6a^2}$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành $-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Diện tích hình (H) là $S = \displaystyle\int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)\mathrm{dx} = \frac{32}{3}$.

Từ đó, diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $y = m$ là

$$S_1 = \frac{\sqrt{\Delta_1^3}}{6a} = \frac{\sqrt{(16 - 4m)^3}}{6} = \frac{1}{3}S.$$

diện tích S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $y = n$ là

$$S_2 = \frac{\sqrt{\Delta_2^3}}{6a} = \frac{\sqrt{(16 - 4n)^3}}{6} = \frac{2}{3}S.$$

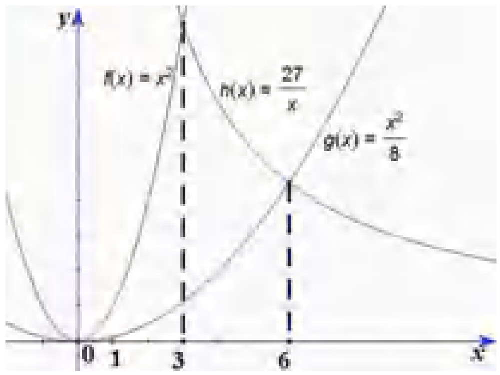
Từ đó $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(16-4m)^3}}{6} = \dfrac{32}{9} \\ \dfrac{\sqrt{(16-4n)^3}}{6} = \dfrac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-m)^3 = \dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{64}{3}\right)^2 \\ (4-n)^3 = \dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{128}{3}\right)^2 \end{cases}$. Suy ra $T = (4-m)^3 + (4-n)^3 = \dfrac{320}{9}$.

Câu 122. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{8}$, $y = \dfrac{27}{x}$.

A. $\dfrac{63}{8}$. **B.** $27\ln 2 - \dfrac{63}{8}$. **C.** $27\ln 2$. **D.** $27\ln 2 - \dfrac{63}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x = 3$; $x^2 = \dfrac{x^2}{8} \Leftrightarrow x = 0$; $\dfrac{x^2}{8} = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x = 6$.

Ta có : $S_{HP} = \int_0^3 \left(x^2 - \dfrac{x^2}{8}\right)dx + \int_3^6 \left(\dfrac{27}{x} - \dfrac{x^2}{8}\right)dx$.

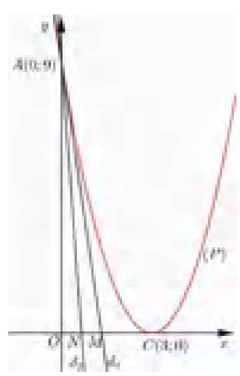
$S_{HP} = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^3}{24}\right)\Bigg|_0^3 + \left(27\ln|x| - \dfrac{x^3}{24}\right)\Bigg|_3^6 = \dfrac{63}{8} + 27\ln 2 - \dfrac{63}{8} = 27\ln 2$.

Câu 123. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1 > k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $d_1 : y = k_1x + 9$, $d_2 : y = k_2x + 9$ $(k_1 > k_2)$.

Gọi $M = d_1 \cap Ox \Rightarrow M\left(-\dfrac{9}{k_1};0\right)$; $N = d_2 \cap Ox \Rightarrow N\left(-\dfrac{9}{k_2};0\right)$ $\left(-\dfrac{9}{k_2} < -\dfrac{9}{k_1}\right)$

Giao điểm của $(P): y=(x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.

Theo giả thiết ta có $S_{\Delta AON}=S_{\Delta ANM} \Leftrightarrow OM=2ON \Leftrightarrow -\frac{9}{k_1}=-\frac{18}{k_2} \Leftrightarrow k_2=2k_1$.

Lại có $S_{(H)}=3S_{\Delta AON} \Leftrightarrow \int_0^3 (x-3)^2\,dx = 3.\frac{1}{2}.OA.ON \Leftrightarrow 9=-\frac{243}{2k_2} \Leftrightarrow k_2=-\frac{27}{2}$.

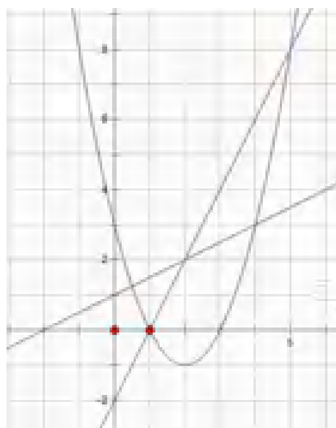
Suy ra $k_1=-\frac{27}{4} \Rightarrow k_1-k_2=\frac{27}{4}$.

Câu 124. Tính diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $(d_1): y=2x-2$, $(d_2): y=\frac{x}{2}+1$, $(P): y=x^2-4x+3$.

A. $S=\frac{189}{16}$. **B.** $S=\frac{13}{3}$. **C.** $S=\frac{487}{48}$. **D.** $S=\frac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x}{2}+1=x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=4 \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-2=x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-2=\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích của hình phẳng (H):

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{x}{2}+1-\left(x^2-4x+3\right)\right]dx+\int_{2}^{5}\left[2x-2-\left(x^2-4x+3\right)\right]dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-x^2+\frac{9}{2}x-2\right)dx+\int_{2}^{5}\left(-x^2+6x-5\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{9}{4}x^2-2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Bigg|_{2}^{5}=\frac{189}{16}.$$

Dạng 5: Diện tích S giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị của $x=g(y)$, $x=h(y)$, $h(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.
- Hai đường thẳng $x=c, x=d$

$$S=\int_c^d \left|g(y)-h(y)\right|dy$$

Câu 125. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2-2y+x=0$, $x+y=0$ là

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{7}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

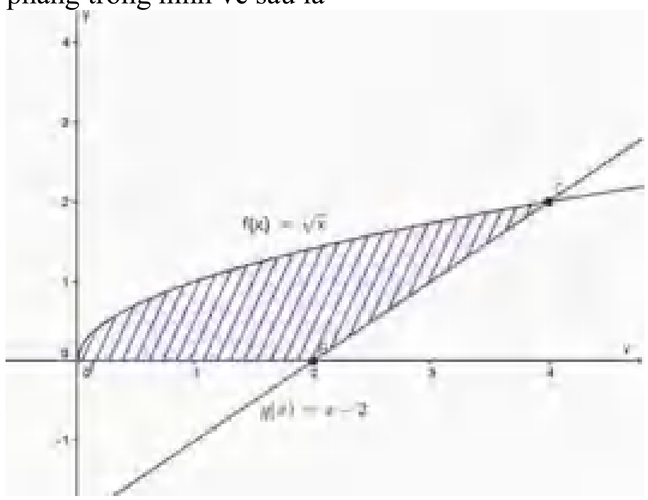
Hướng dẫn giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là $x=-y^2+2y,\ x=-y$

Xét pt tung độ giao điểm $(-y^2+2y)-(-y)=0$ có nghiệm $y=0,\ y=3$

Vậy $S=\int_0^3\left|-y^2+3y\right|dy=\int_0^3\left(-y^2+3y\right)dy=\frac{9}{2}$

Câu 126. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{11}{3}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{10}{3}$

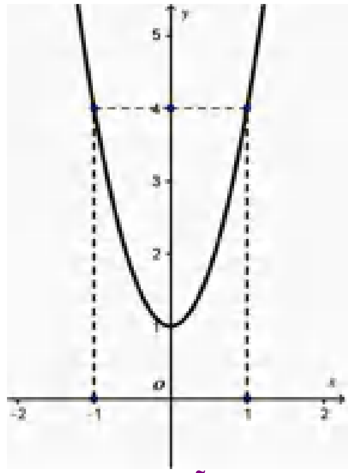
Hướng dẫn giải

Ta có $y^2=y+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right.$, nên $S=\int_0^2(y+2-y^2)dy=\frac{10}{3}$.

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH CÓ ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 45$. **B.** $H = 64$. **C.** $H = 51$. **D.** $H = 58$.



Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

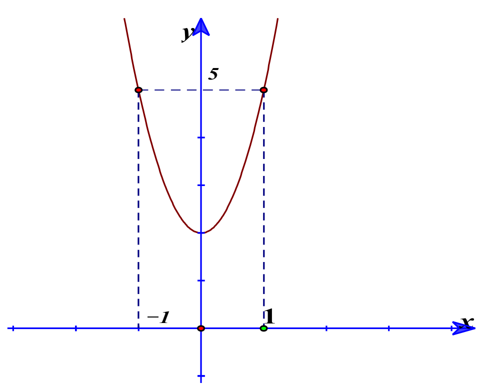
Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1$.

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = 4$, $x = 2$.

Ta có $S = \int_2^4 (3x^2 + 1)\mathrm{dx} = 58$. Lại có: $S = \int_2^4 f'(x)\mathrm{dx} = f(x)\Big|_2^4 = f(4) - f(2)$.

Do đó: $H = f(4) - f(2) = 58$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc toạ độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3) - f(1)$?



A. 24. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Chọn D

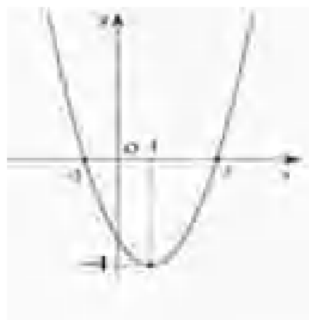
Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có trục đối xứng là trục tung nên $b=0$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 2 điểm $(1;5),(0;2)$ ta tìm được: $a=1;c=2$.

Suy ra: $f'(x)=3x^2+2\Rightarrow f(x)=x^3+2x+C$, đồ thị hàm số (C) đi qua gốc toạ độ nên $C=0\Rightarrow f(x)=x^3+2x\Rightarrow f(3)-f(2)=21$.

Hoặc: $f'(x)=3x^2+2\Rightarrow f(3)-f(2)=\int\limits_2^3 f'(x)dx=21$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R};a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. 2. **B.** 27. **C.** 29. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 3 điểm $(-1;0),(3,0),(1,-4)$ ta tìm được: $a=\frac{1}{3};b=-1;c=-3$.

Suy ra: $f'(x)=x^2-2x-3\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ dương nên ta có:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1;x=3\Rightarrow x=3$.

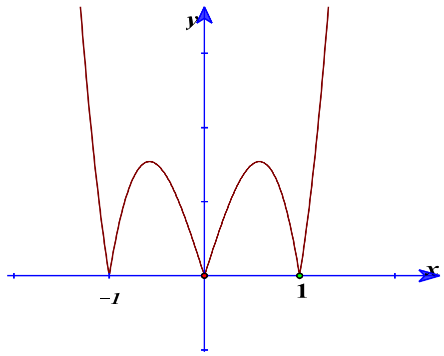
Như vậy (C) đi qua điểm $(3;-9)$ ta tìm được $C=0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Xét phương trình trình hoành độ giao điểm và trục hoành:

$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x=0\Leftrightarrow x=0;x=\frac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

$$S=\int\limits_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}}\left|\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right|dx=29,25.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ $(a>0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?

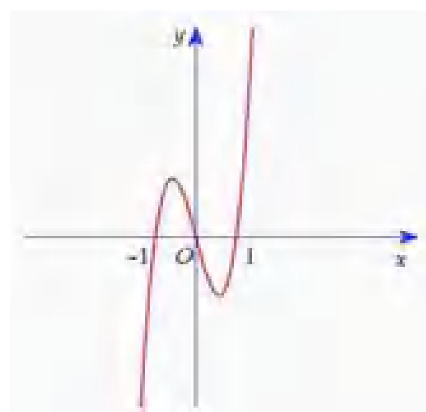


A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{8}{15}$. **C.** $\frac{14}{15}$. **D.** $\frac{16}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ và $a>0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:

$f'(x)=4ax^3+2bx$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua $(1;0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$ ta tìm được $a=1;b=-2\Rightarrow f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-2x^2+C$.



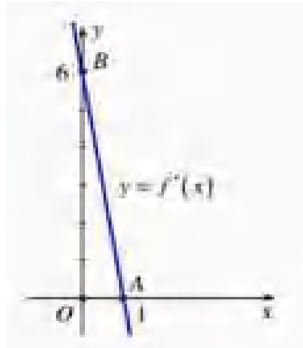
Do (C) tiếp xúc với trục hoành nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm1$. Do (C) đối xứng qua trục tung nên (C) tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm $(1;0),(-1;0)$.

Do đó: $f\left(0\right)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-2x^2+1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$S=\int_{-1}^{1}\left|x^4-2x^2+1\right|dx=\frac{16}{15}$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f\left(0\right)=5$, tính giá trị của $f\left(1\right)$?



A. 0. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 11.

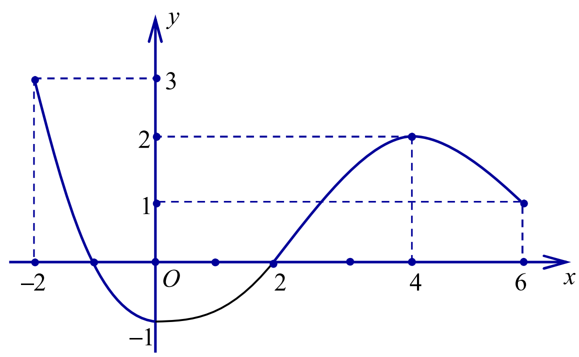
Hướng dẫn giải

Cách 1: $f'(x) = ax + b$. Theo hình vẽ ta tìm được $f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + c$

Mà $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(1) = 8.$

Cách 2: $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx = S_{OAB} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 + 5 = 8.$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-2)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(2)$. **C.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(6)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

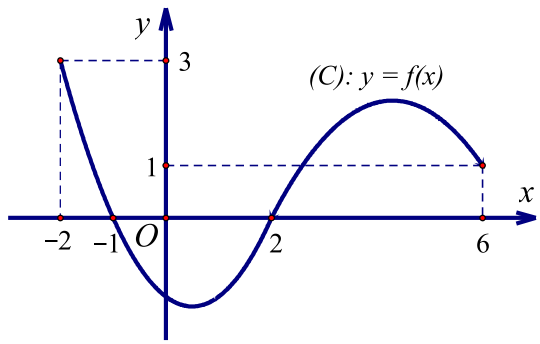
Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;6]} y = \max\{f(-1); f(6)\}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$ và $x=2$ là $S_1=-\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_{-1}^{2}=f(-1)-f(2)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=6$ là $S_2=\int_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{2}^{6}=f(6)-f(2)$.

Từ hình vẽ suy ra $S_2>S_1 \Rightarrow f(6)-f(2)>f(-1)-f(2) \Leftrightarrow f(6)>f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2)<f(-1)<f(2)<f(6)$.   **B.** $f(2)<f(-2)<f(-1)<f(6)$.

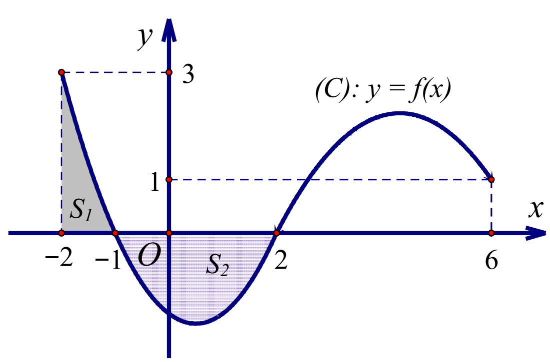
C. $f(-2)<f(2)<f(-1)<f(6)$.   **D.** $f(6)<f(2)<f(-2)<f(-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2)<f(-1) \\ f(2)<f(-1) \\ f(2)<f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

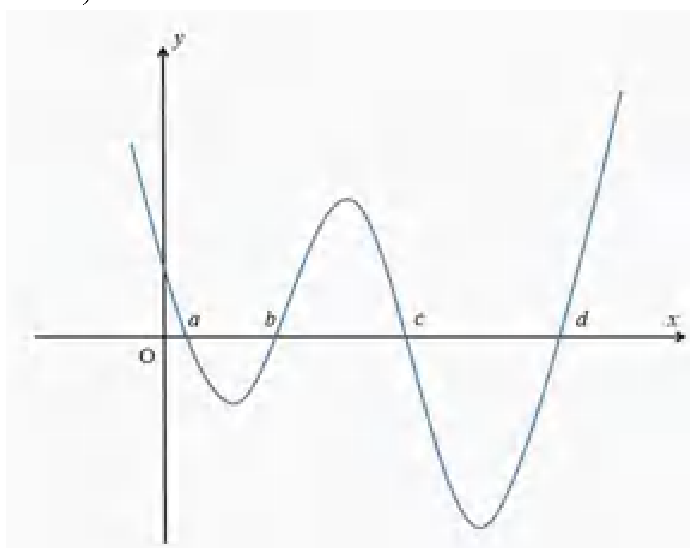
Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

Ta có: $S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx = f(-1) - f(-2)$.

$S_2 = \int_{-1}^{2} |f'(x)| dx = -\int_{-1}^{2} f'(x) dx = f(-1) - f(2)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau).

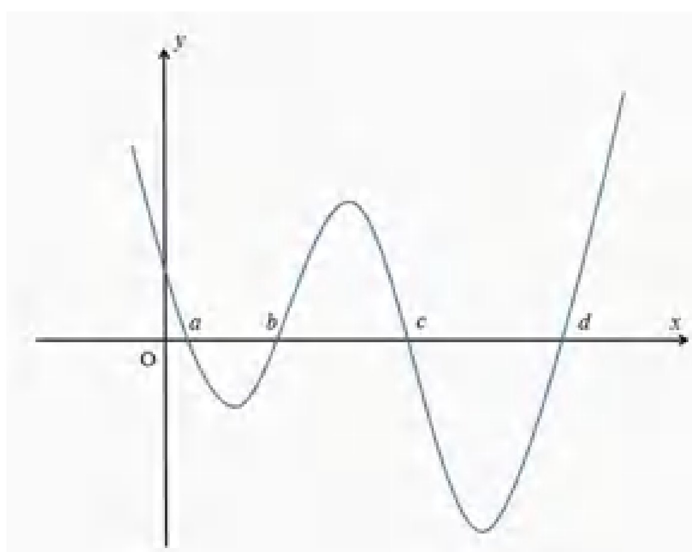


Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.
B. $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.
C. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.
D. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Hướng dẫn giải

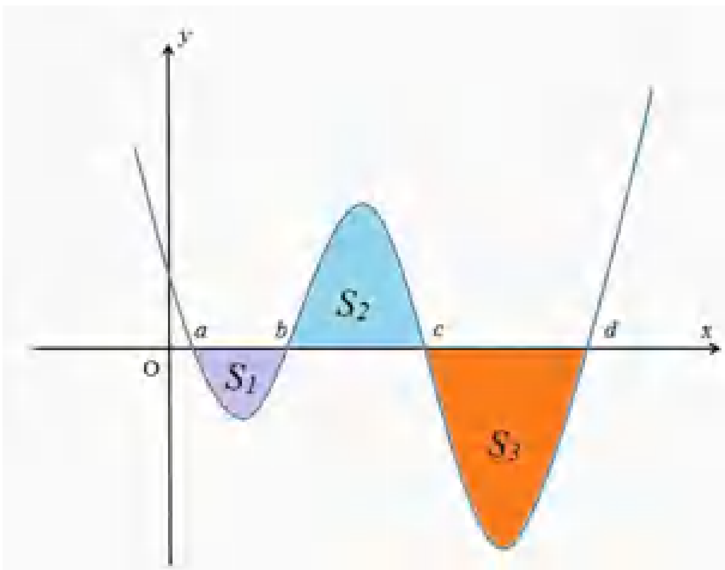
Chọn D



☑ Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và BBT như sau

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$f(d)$	↗	

☑ Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$ **(1)**

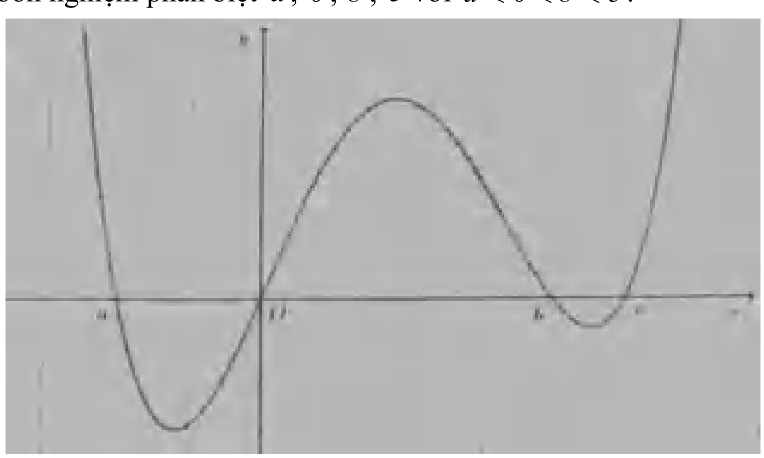


$S_1 < S_2 \Rightarrow \int_b^a f'(x)dx < \int_b^c f'(x)dx \Rightarrow f(a)-f(b) < f(c)-f(b) \Rightarrow f(a) < f(c)$ **(2)**

$S_2 < S_3 \Rightarrow \int_b^c f'(x)dx < \int_d^c f'(x)dx \Rightarrow f(c)-f(b) < f(c)-f(d) \Rightarrow f(b) > f(d)$ **(3)**

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(b) > f(a) > f(c)$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(b) > f(c) > f(a)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

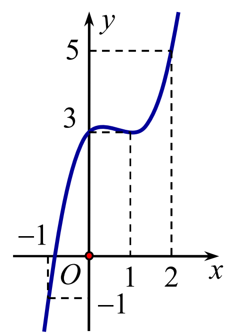
+ Từ hình vẽ ta thấy: $f'(x) < 0$ khi $x \in (b;c)$; $f'(x) > 0$ khi $x > c$ nên có $f(b) > f(c)$.

+ Ta lại có: $\int_a^0 [-f'(x)]dx < \int_0^b f'(x)dx - \int_b^c [-f'(x)]dx \Leftrightarrow \int_a^0 [-f'(x)]dx < \int_0^c f'(x)dx$

$\Rightarrow [-f(x)]\Big|_a^0 < f(x)\Big|_0^c \Rightarrow -f(0) + f(a) < f(c) - f(0) \Rightarrow f(a) < f(c)$.

+ Vậy $f(b) > f(c) > f(a)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.

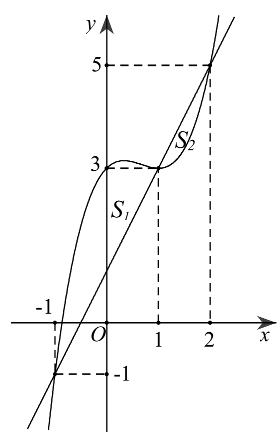


Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(1) = g(2)$. **D.** $g(1) > g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Xét hàm số $h(x) = f'(x) - (2x+1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;1]$, $[1;2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ y = f'(x) \\ y = 2x+1 \end{cases}$ là

$S_1 = \int_{-1}^{1} |f'(x) - (2x+1)|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} [f'(x) - (2x+1)]\mathrm{d}x = g(x)\Big|_{-1}^{1} = g(1) - g(-1)$.

Vì $S_1 > 0$ nên $g(1) > g(-1)$.

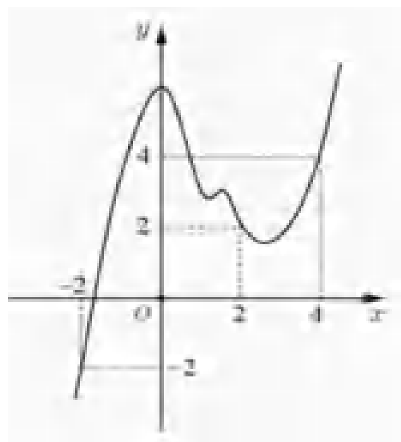
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ y=f'(x) \\ y=2x+1 \end{cases}$ là

$$S_2=\int_1^2\left|f'(x)-(2x+1)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left[(2x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x=-g(x)\Big|_1^2=g(1)-g(2).$$

Vì $S_2>0$ nên $g(1)>g(2)$.

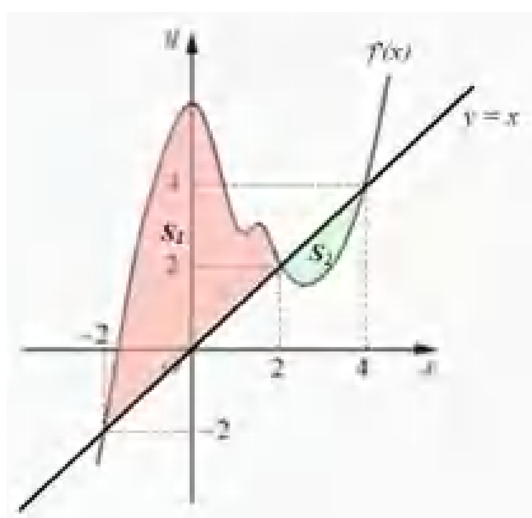
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

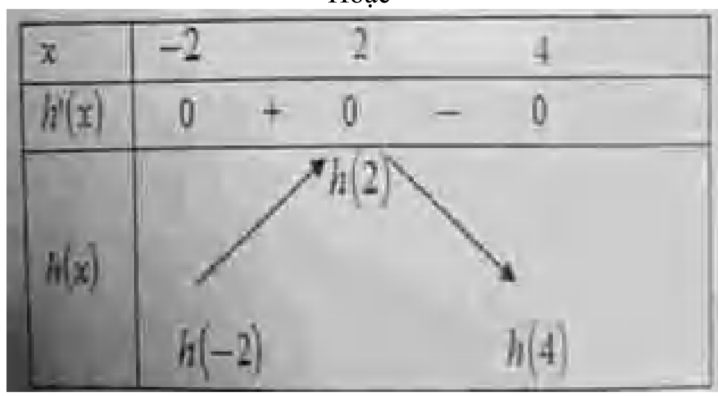
A. $h(4)=h(-2)>h(2)$.
B. $h(4)=h(-2)<h(2)$.
C. $h(2)>h(4)>h(-2)$.
D. $h(2)>h(-2)>h(4)$.



Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $h'(x)=2f'(x)-2x=2\left[f'(x)-x\right]$. Ta vẽ đường thẳng $y=x$.



<table>
<tr>
<td>$h(2)-h(-2)=\int\limits_{-2}^{2} h'(x)dx$
$=2\int\limits_{-2}^{2}[f'(x)-x]dx>0$
$\Rightarrow h(2)>h(-2).$</td>
<td rowspan="2">Hoặc


x	-2		2		4
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$

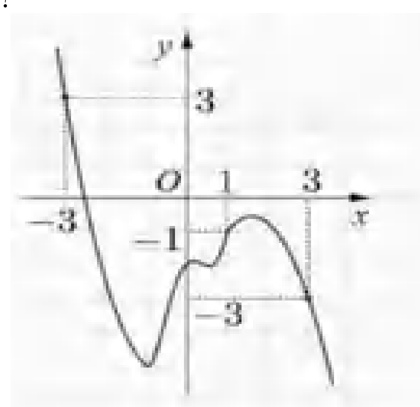
</td>
</tr>
<tr>
<td>$h(4)-h(2)=\int\limits_{2}^{4} h'(x)dx$
$=2\int\limits_{-2}^{2}[f'(x)-x]dx<0$
$\Rightarrow h(4)<h(2).$</td>
</tr>
</table>

$$h(4)-h(-2)=\int\limits_{-2}^{4} h'(x)dx=2\int\limits_{-2}^{4}[f'(x)-x]dx=2\int\limits_{-2}^{2}[f'(x)-x]dx+2\int\limits_{2}^{4}[f'(x)-x]dx$$

$=2S_1-2S_2>0\Rightarrow h(4)>h(-2).$

Như vậy ta có: $h(-2)<h(4)<h(2)$.

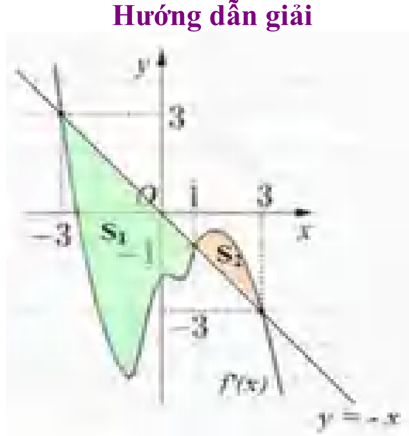
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$. **B.** $g(1)<g(3)<g(-3)$.

C. $g(1)<g(-3)<g(3)$. **D.** $g(-3)<g(3)<g(1)$.

Hướng dẫn giải



Chọn B. Ta có: $g'(x)=2f'(x)+2x=2\left[f'(x)+x\right]\Rightarrow -g'(x)=2\left[-x-f'(x)\right]$

Ta vẽ đường thẳng $y=-x$.

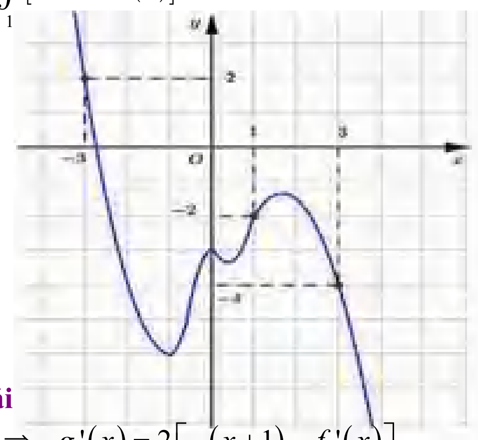
$$g(-3)-g(1)=-\int_{-3}^{1}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-x-f'(x)\right]dx>0\Rightarrow g(-3)>g(1).$$

$$g(1)-g(3)=-\int_{1}^{3}g'(x)dx=2\int_{1}^{3}\left[-x-f'(x)\right]dx<0\Rightarrow g(3)>g(1).$$

$$g(-3)-g(3)=-\int_{-3}^{3}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-x-f'(x)\right]dx+2\int_{1}^{3}\left[-x-f'(x)\right]dx=2S_1-2S_2>0$$

$\Rightarrow g(-3)>g(3)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1)<g(3)<g(-3)$.

B. $g(1)<g(-3)<g(3)$.

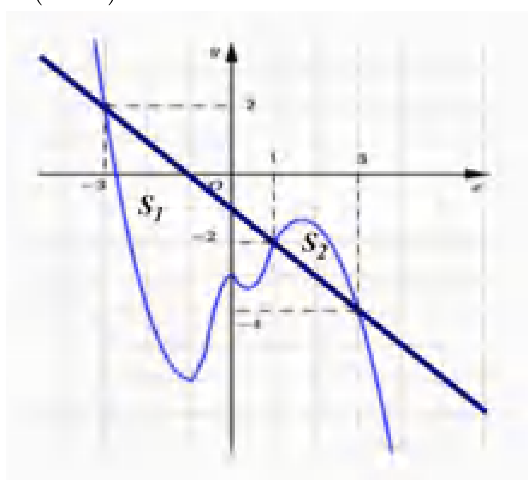
C. $g(3)=g(-3)<g(1)$.

D. $g(3)=g(-3)>g(1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $g'(x)=2f'(x)+2(x+1)=2\left[f'(x)+(x+1)\right]\Rightarrow -g'(x)=2\left[-(x+1)-f'(x)\right]$

Ta vẽ đường thẳng $y=-(x+1)$.



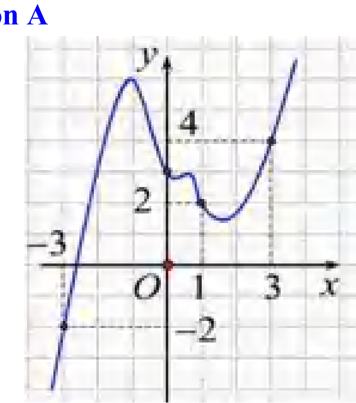
$$g(-3)-g(1)=-\int_{-3}^{1}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx>0\Rightarrow g(-3)>g(1).$$

$$g(1)-g(3)=-\int_{1}^{3}g'(x)dx=2\int_{1}^{3}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx<0\Rightarrow g(3)>g(1).$$

$$g(-3)-g(3)=-\int_{-3}^{3}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx+2\int_{1}^{3}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx=2S_1-2S_2>0$$

$\Rightarrow g(-3)>g(3)$. Như vậy ta có: $g(1)<g(3)<g(-3)$. **Chọn A**

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\min\limits_{[-3;3]}g(x)=g(1)$.

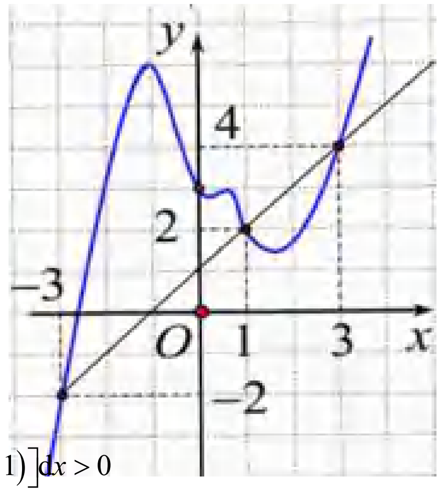
B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - (2x+2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$.



Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y = x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x = 1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$

Xét $\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x) - (x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(1) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

Tương tự xét $\int\limits_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x) - (x+1)\right]\mathrm{d}x < 0$

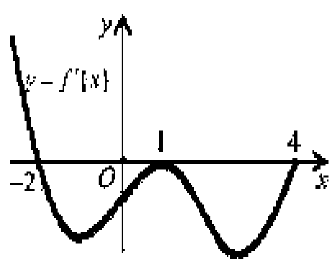
$\Leftrightarrow g(3) - g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x) - (x+1)\right]\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x) - (x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(3) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

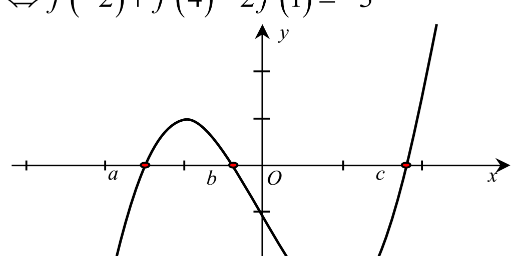
Chọn C. Theo giả thiết ta có $\int\limits_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = 9$ và $\int\limits_{1}^{4}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = 12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int\limits_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = -\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_{-2}^{1} = -f(-1) + f(-2)$

$\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9$. Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$.

Như vậy $\left[-f(1) + f(-2)\right] - \left[-f(4) + f(1)\right] = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$.



Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm.

C. 4 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a)$$

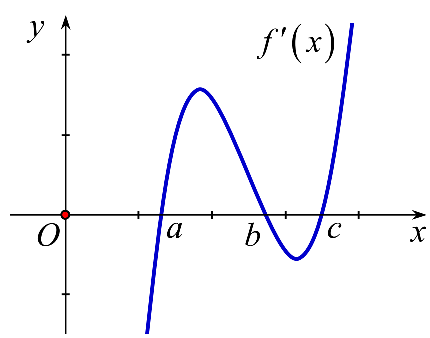
Do $f(a) > 0$ nên

$f(c) > 0$: PT $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$f(c) = 0$: PT $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

$f(c) < 0$: PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

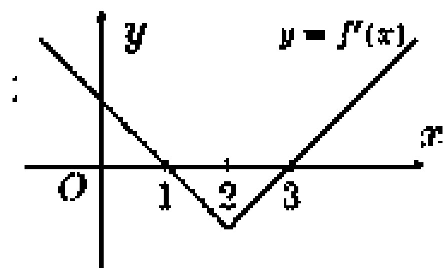
Chọn D. Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c f'(x)dx>0\Rightarrow f(c)>f(a)>0\Rightarrow$ PT $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0); f(1); f(3); f(4)$?

A. $f(0)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(4)$.

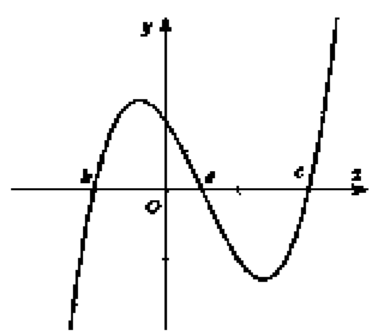


Hướng dẫn giải

x	0		1		3		4
y'		+	0	-	0	+	
y	$f(0)$ ↗		$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$f(4)$

$f(4)-f(1)=\int_1^4 f'(x)dx=\int_1^3 f'(x)dx+\int_3^4 f'(x)dx<0\Rightarrow f(4)<f(1)$. **Chọn B**

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(a)>f(b)$ và $f(c)>f(a)$. **B.** $f(a)>f(b)$ và $f(c)<f(a)$.

C. $f(a)<f(b)$ và $f(c)>f(a)$. **D.** $f(a)<f(b)$ và $f(c)<f(a)$.

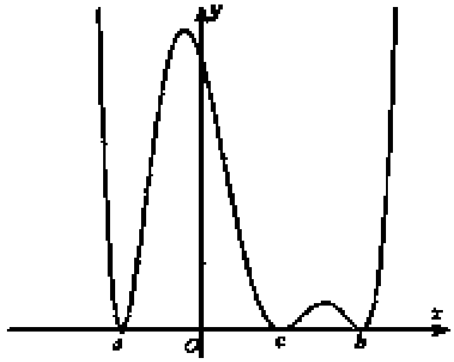
Hướng dẫn giải

$f(a)-f(b)=\int_b^a f'(x)dx>0\Leftrightarrow f(a)>f(b)$.

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx<0 \Leftrightarrow f(c)<f(a).$$

Chọn B

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(b)>f(c)$ và $f(c)>f(a)$.

B. $f(b)>f(c)$ và $f(c)<f(a)$.

C. $f(b)<f(c)$ và $f(c)>f(a)$.

D. $f(b)<f(c)$ và $f(c)<f(a)$.

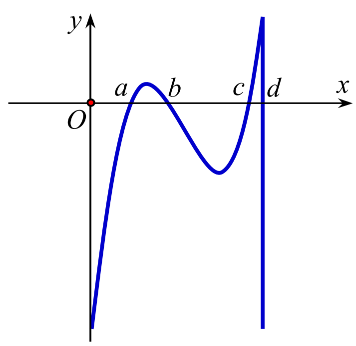
Hướng dẫn giải

$$f(b)-f(c)=\int_c^b f'(x)dx>0 \Leftrightarrow f(b)>f(c).$$

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx>0 \Leftrightarrow f(c)>f(a).$$

Chọn A

Câu 21: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$.

B. $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$.

D. $M+m=f(0)+f(a)$.

Hướng dẫn giải

Ta có bảng biến thiên:

x	0	a	b	c	d

y'		-	0	+	0	-	0	+				
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$			

So sánh $f(a); f(c)$

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c f'(x)dx<0 \Rightarrow f(c)<f(a) \Rightarrow m=f(c).$$

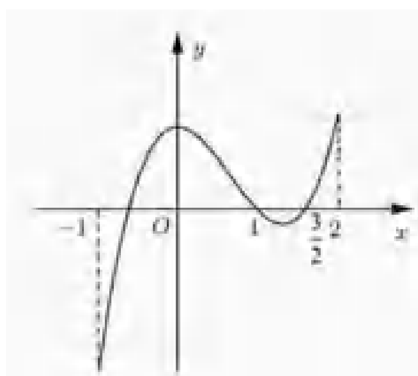
So sánh $f(0); f(b); f(d)$.

$$f(b)-f(0)=\int_0^b f'(x)dx=\int_0^a f'(x)dx+\int_a^b f'(x)dx<0 \Rightarrow f(b)<f(0).$$

$$f(d)-f(b)=\int_b^d f'(x)dx=\int_b^c f'(x)dx+\int_c^d f'(x)dx<0 \Rightarrow f(d)<f(b).$$

$\Rightarrow f(d)<f(b)<f(0) \Rightarrow M=f(0)$. **Chọn A**

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$.

B. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

C. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$.

D. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)$.

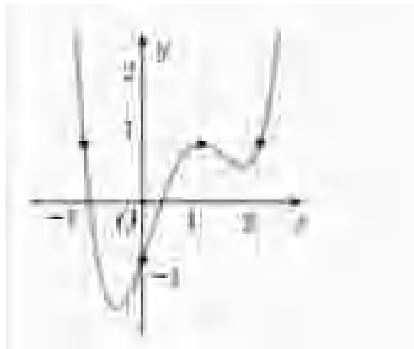
Hướng dẫn giải

x	-1		a		1		$\frac{3}{2}$		2
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$f(-1)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$

$$f(1)-f(-1)=\int_{-1}^{1} f'(x)dx=\int_{-1}^{a} f'(x)dx+\int_{a}^{1} f'(x)dx>0 \Rightarrow f(1)>f(-1).$$

$$f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} f'(x)dx=\int_{1}^{1,5} f'(x)dx+\int_{1,5}^{2} f'(x)dx>0 \Rightarrow f(2)>f(1).$$ **Chọn B**

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Đặt $g(x)=f(x)-x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1)<g(1)<g(2)$.

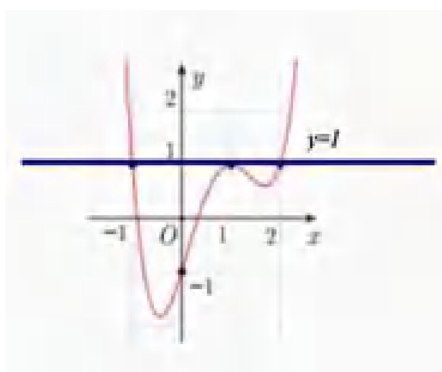
B. $g(2)<g(1)<g(-1)$.

C. $g(2)<g(-1)<g(1)$.

D. $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=1$.

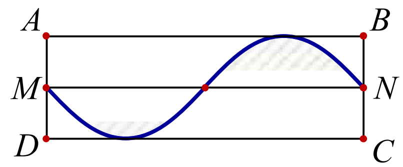


Ta có: $g(1)-g(-1)=\int_{-1}^{1} g'(x)dx=\int_{-1}^{1}[f'(x)-1]dx<0 \Rightarrow g(1)<g(-1)$.

$$g(2)-g(1)=\int_{1}^{2} g'(x)dx=\int_{1}^{2}[f'(x)-1]dx<0 \Rightarrow g(2)<g(1).$$ **Chọn B**

BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

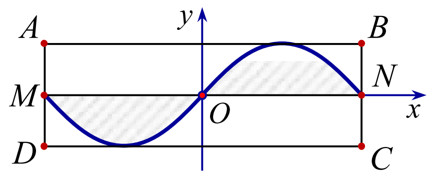
Câu 24: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB=2\pi(m)$, $AD=2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.



A. $4\pi - 1$. **B.** $4(\pi - 1)$. **C.** $4\pi - 2$. **D.** $4\pi - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

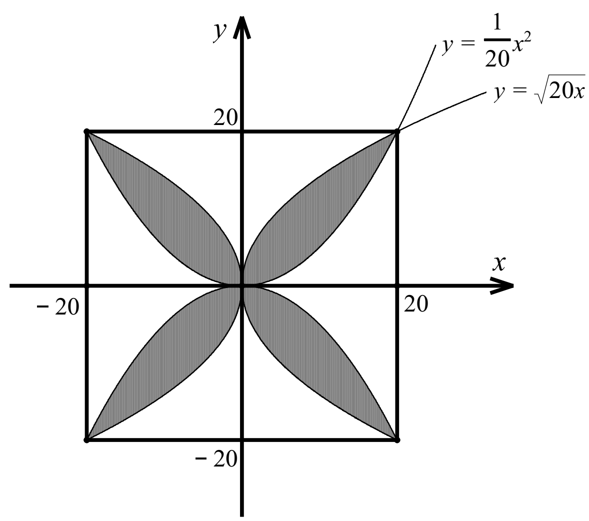


Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$.

Diện tích phần đất được tô màu đen là $S_2 = 2\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = 4$.

Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Câu 25: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3}$ cm^2. **B.** $\frac{400}{3}$ cm^2. **C.** 250 cm^2. **D.** 800 cm^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}.\sqrt{20}.\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right)\Bigg|_0^{20} = \frac{400}{3} \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

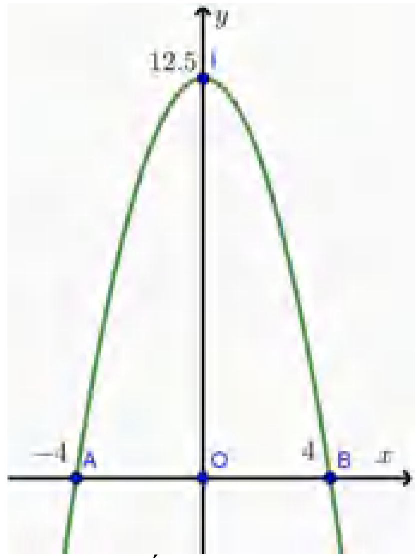
Câu 26: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8\,m$, chiều cao $12,5\,m$. Diện tích của cổng là:

A. $100\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $200\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\frac{100}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\frac{200}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

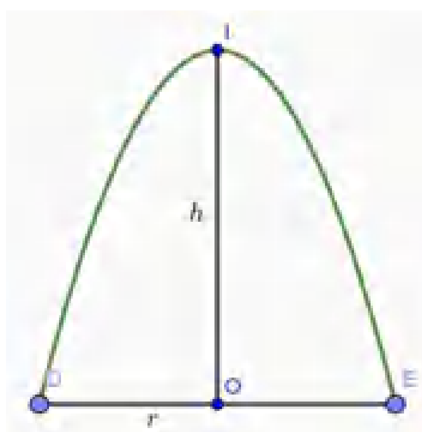
Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32}$.

Do đó $(P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5\right)dx = \frac{200}{3}\left(m^2\right)$.

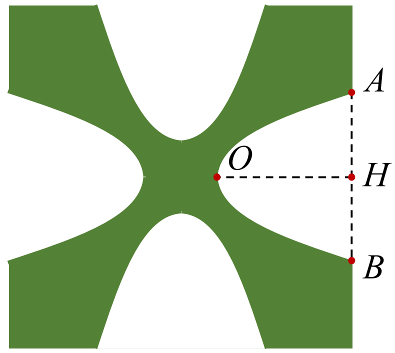
Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5m$ và bán kính đáy $OD = OE = 4m$.

Do đó diện tích parabol đã cho là: $S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3}\left(m^2\right)$.

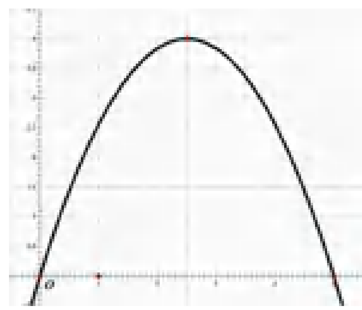
Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** 50 cm^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P): y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$.

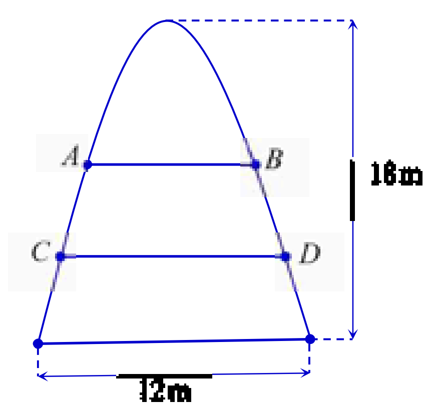
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là $S = \displaystyle\int_0^5 \left(-\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \dfrac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100\text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \dfrac{160}{3} = \dfrac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

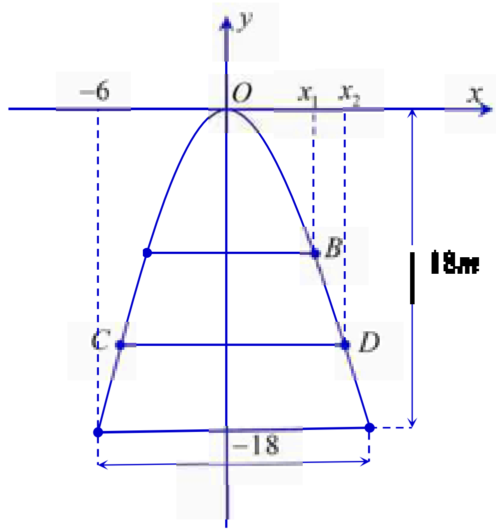
Câu 28: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

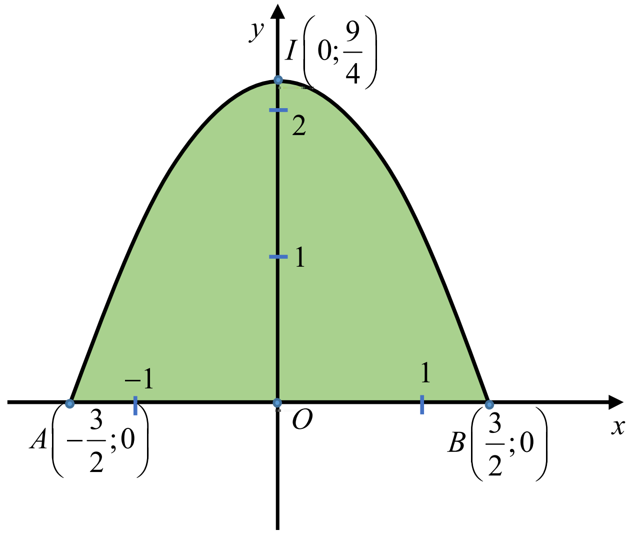
Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4}=c,\left(I\in(P)\right) \\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0\left(A\in(P)\right) \\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\left(B\in(P)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{9}{4} \\ a=-1 \\ b=0 \end{cases}$. Vậy $(P): y=-x^2+\frac{9}{4}$.

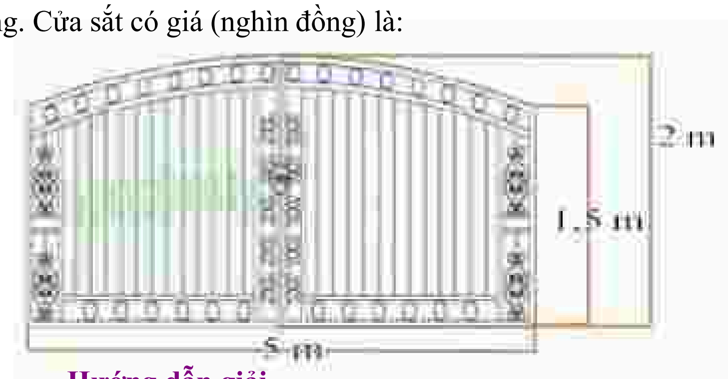
Diện tích cửa parabol là: $S=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2$.

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng.

Câu 30: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá $1\mathrm{m}^2$ cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

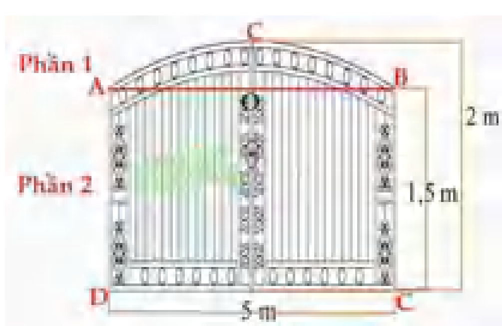
A. 6500. **B.** $\frac{55}{6}.10^3$.

C. 5600. **D.** 6050.



Hướng dẫn giải

Chọn D



Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau:

Khi đó $S = S_1 + S_2 = S_1 + 5.1,5 = S_1 + 7,5$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB, $OB \subset Ox, OC \subset Oy$,

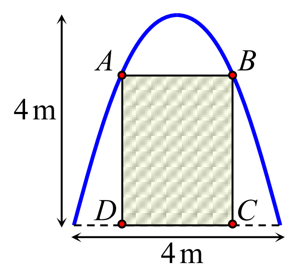
Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol. Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

Khi đó: $\begin{cases} A\left(-\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ B\left(\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ C\left(0,\frac{1}{2}\right) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}$

Diện tích $S_2 = 2\int_0^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{10}{6}\left(m^2\right) \Rightarrow S = \frac{55}{6}\left(m^2\right)$.

Vậy giá tiền cửa sắt là: $\frac{55}{6}$ x $660.000 = 6.050.000$ (đồng).

Câu 31: Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

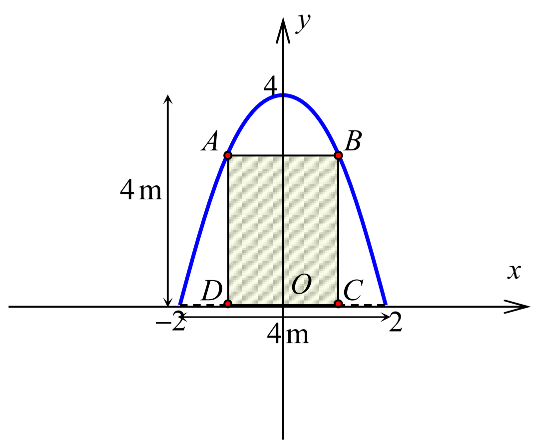


A. 900.000 đồng. **B.** $1.232.000$ đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** $1.230.000$ đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0;4)$ và cắt trục hoành tại $(2;0)$ nên:

$\begin{cases} b=4 \\ a.2^2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$. Do đó, phương trình parabol là $y=-x^2+4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là

$S_1=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$. Gọi $C\left(t;0\right) \Rightarrow B\left(t;4-t^2\right)$ với $0<t<2$.

Ta có $CD=2t$ và $BC=4-t^2$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_2=CD.BC=2t.\left(4-t^2\right)=-2t^3+8t$.

Diện tích phần trang trí hoa văn là $S=S_1-S_2=\frac{32}{3}-\left(-2t^3+8t\right)=2t^3-8t+\frac{32}{3}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^3-8t+\frac{32}{3}$ với $0<t<2$.

Ta có $f'\left(t\right)=6t^2-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\in\left(0;2\right) \\ t=-\frac{2}{\sqrt{3}}\notin\left(0;2\right) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên suy ra diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}\mathrm{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000\approx 902000$ đồng.

Câu 32: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

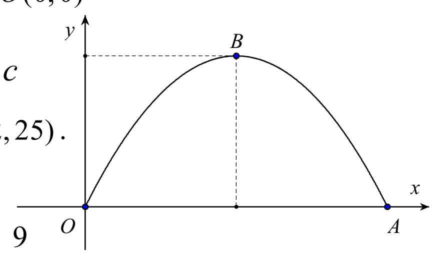
Chọn C

• Gắn parabol $\left(P\right)$ và hệ trục tọa độ sao cho $\left(P\right)$ đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parbol là (P): $\left(P\right):\ y=ax^2+bx+c$

Theo đề ra, $\left(P\right)$ đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $\left(P\right):\ y=-x^2+3x$



• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S=\int_0^3\left|-x^2+3x\right|dx=\frac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ (đồng)

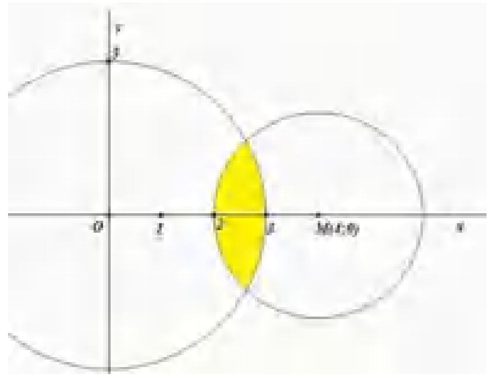
Câu 33: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

A. $1,034\,\mathrm{m}^2$ **B.** $1,574\,\mathrm{m}^2$ **C.** $1,989\,\mathrm{m}^2$ **D.** $2,824\,\mathrm{m}^2$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O, M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{9-x^2}$ và $y = \sqrt{4-(x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2} = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4 + 8x - 16 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S = 2\left[\int_2^{\frac{21}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2}dx + \int_{\frac{21}{8}}^3 \sqrt{9-x^2}dx\right] \approx 1,989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy.

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \end{array}\right.$

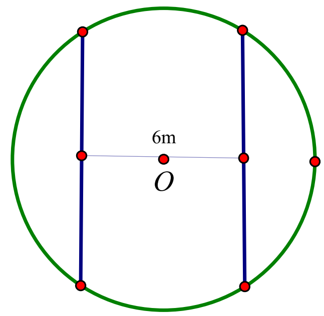
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1); (E_2); x = -4; x = 4$

Diện tích của dải vườn là $S = 2\int_{-4}^{4} \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^4 \sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8\sin t$, ta được $S = 80\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T = 80\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000 = 7652891,82 \simeq 7.653.000$.

Câu 34: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3;\ x = 3$ $\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

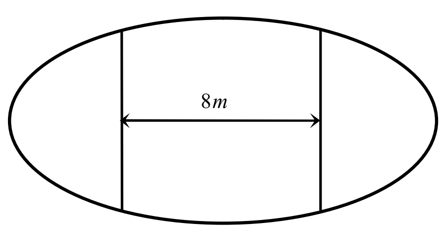
Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)\,dt = 18(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 35: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng$/1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. $7.862.000$ đồng. **B.** $7.653.000$ đồng. **C.** $7.128.000$ đồng. **D.** $7.826.000$ đồng.



Hướng dẫn giải

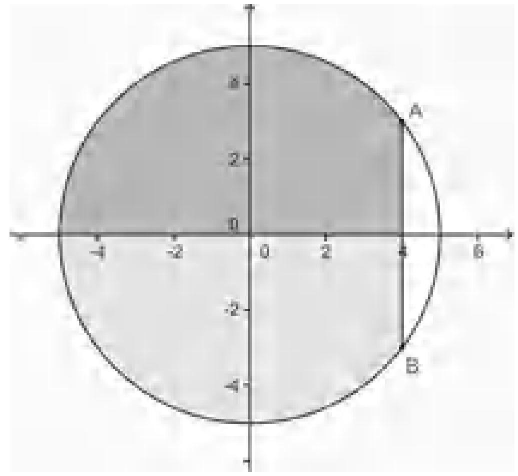
Chọn B. Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16 \Rightarrow a=8$ và $2b=10 \Rightarrow b=5$

Câu 36: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chồi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

.**A.** 3722. **B.** 7445. **C.** 7446. **D.** 3723

Hướng dẫn giải



Đặt hệ trục tọa độ 4349582 như hình vẽ.

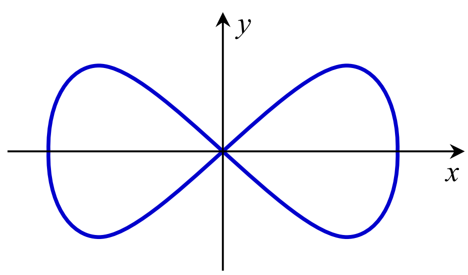
Phương trình đường tròn của miếng đất sẽ là $x^2+y^2=25$

Diện tích cần tính sẽ bằng 2 lần diện tích phần tô đậm phía trên.

Phần tô đậm được giới hạn bởi đường cong có phương trình là $y=\sqrt{25-x^2}$, trục $Ox; x=-5; x=4$ (trong đó giá trị 4 có được dựa vào bán kính bằng 5 và độ dài dây cung bằng 6)

Vậy diện tích cần tính là $S=2\int_{-5}^{4}\sqrt{25-x^2}dx \approx 74,45228...$ **Chọn B**

Câu 37: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S=\frac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S=\frac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S=\frac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x \in [0;5]$

Nên $S_{(I)} = \frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3}(m^3)$

Câu 38: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$ Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36-x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3;\ x = 3 \Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}dx$

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos tdt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 tdt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t+1)\,dt = 18(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 39: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*

A. $\frac{28}{3}(m^2)$ **B.** $\frac{26}{3}(m^2)$ **C.** $\frac{128}{3}(m^2)$ **D.** $\frac{131}{3}(m^2)$

Hướng dẫn giải:

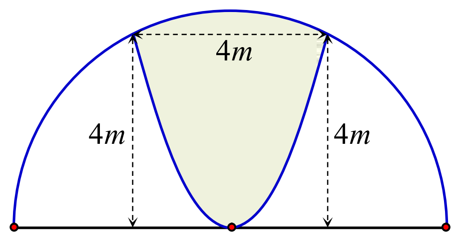
Chọn C. Các phương án nhiễu:

A. HS tính tích phân sai $S=\int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8\right|dx=\frac{28}{3}\ (m^2)$

B. HS tính tích phân sai $S=\int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8\right|dx=\frac{26}{3}\ (m^2)$)

D. HS nhầm a = $-\frac{1}{2}$, b= 8, c = 0 => $S=\int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8x\right|dx=\frac{131}{3}\ (m^2)$

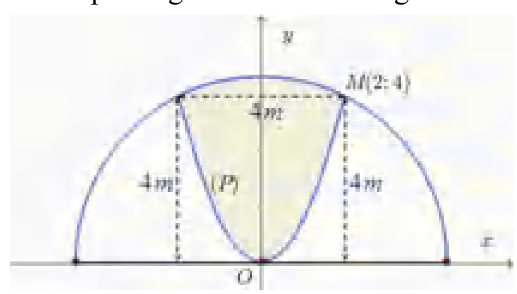
Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4(m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.**1.194.000 (đồng).

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.



Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2\Rightarrow a=1$.

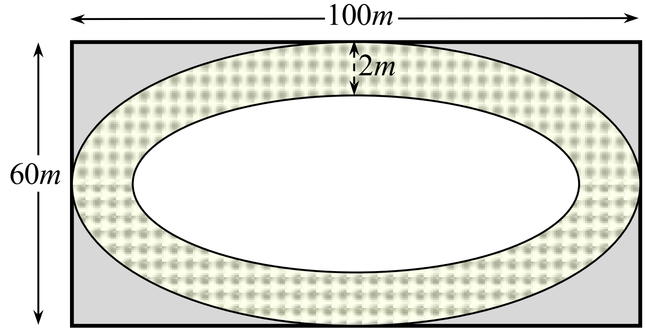
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx\cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco}=\frac{1}{2}S_{hinhtron}-S_1\approx 19,47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo}\times 100000\approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

Câu 41: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

Hướng dẫn giải:

ChọnA.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó $S=S_1-S_2=2\int\limits_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x-2\int\limits_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x$.

Tính tích phân $I=2\int\limits_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x, \left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

Đặt $x=a\sin t, \left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t=2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$

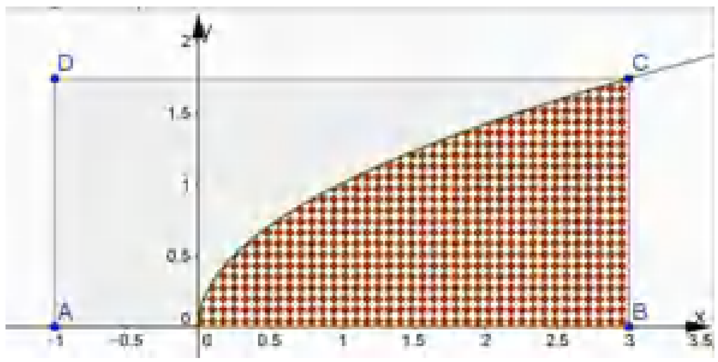
$= ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$. Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B\left(a;\sqrt{a}\right)$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

A. $a = 9$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = 3$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Gọi $ACBD$ là hình chữ nhật với AC nằm trên trục Ox, $A(-1;0)$ và $B\left(a;\sqrt{a}\right)$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $B\left(a;\sqrt{a}\right)$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ACBD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1, S_2. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và trục Ox, $x = 0, x = a$ và S_1 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2.

Tính diện tích $S_2 = \int_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \sqrt{a}$.

Do đó $S_2 = \int_0^{\sqrt{a}} 2t^2\mathrm{d}t = \left(\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ACBD$ có $AC = a+1; AD = \sqrt{a}$

nên $S_1 = S_{ACBD} - S_2 = \sqrt{a}(a+1) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$

Do đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3$ (Do $a > 0$)

Câu 43: Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

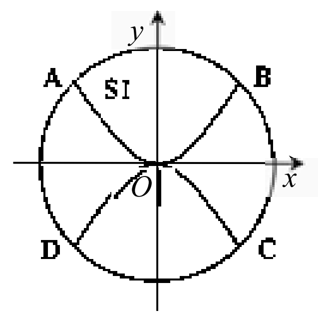
A. $6.060.000$ đồng. **B.** $5.790.000$ đồng. **C.** $3.270.000$ đồng. **D.** $3.000.000$ đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.



Vậy diện tích phần $S_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1 + S_2 = 2\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \approx 15,233...$

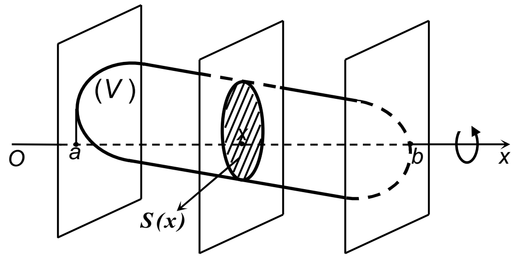
Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: $15,233 \times 150.000 + \left(\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 15,233\right) \times 100.000 \approx 3.274.924$ đồng.

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là $3.270.000$ đồng.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG

1. Thể tích vật thể:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

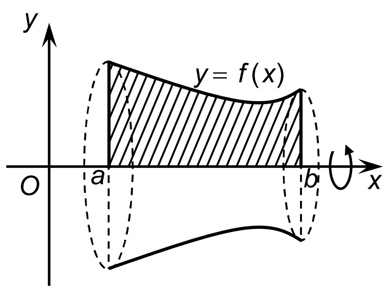


$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

2. Thể tích khối tròn xoay:

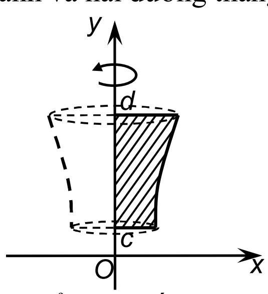
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$$

Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$$

THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

Tính thể tích khối tròn xoay:

Trường hợp 1. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Trường hợp 2. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$.

Dạng 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y=f(x)$; $y=0$ và $x=a, x=b$ khi quay quanh trục Ox.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

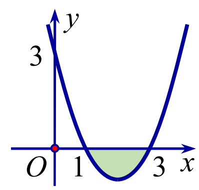
A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V=\pi\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\frac{1}{3}\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi^2\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1$, $x=3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V=\pi\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 4. Cho hàm số $y=\pi^x$ có đồ thị (C). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V=\pi\int_3^2\pi^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^3\int_2^3\pi^x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_2^3\pi^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_2^3\pi^x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức: $V=\pi\int\limits_2^3\left(\pi^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_2^3\pi^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 5. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, $x=a$ và $x=b$ được tính bởi công thức: $V=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\frac{8\pi}{15}$ **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$ **C.** $V=\frac{15\pi}{8}$ **D.** $V=\frac{7\pi}{8}$

- **Phương pháp**: Công thức tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,x=b\left(a<b\right)$ quay xung quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

- **Cách giải**: Áp dụng công thức ta có

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)^2dx=\pi\int\limits_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8\pi}{15}$$

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

A. $V=60\pi$. **B.** 30π. **C.** $\frac{1188}{25}\pi$. **D.** $\frac{1416}{25}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{25}\Leftrightarrow y=\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{25}\right)}$ với $\left(-5\le x\le 5\right)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V=\pi\int\limits_{-5}^{5}\left(9-\frac{9x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=60\pi$.

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **B.** $V=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$. **D.** $\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Câu 9. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C): $x^2+\left(y-3\right)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$(C): x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow (y-3)^2=1-x^2 \Rightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$ $\quad (y-3)^2=1-x^2\ge 0 \Rightarrow -1\le x\le 1$.

Thể tích của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[3+\sqrt{1-x^2}\right]^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[3-\sqrt{1-x^2}\right]^2\mathrm{d}x=6\pi^2$.

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=a$ với $a\in(0;\frac{\pi}{2})$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng này xung quanh trục Ox là

A. $-\pi(\mathrm{a}-\tan\mathrm{a})$ **B.** $\pi(\mathrm{a}-\tan\mathrm{a})$ **C.** $-\pi\ln(\cos a)$ **D.** $\pi\ln(\cos a)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 11. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2\le 1$ quanh trục Ox.

A. $V=2\pi^2$ (đvtt). **B.** $V=6\pi^2$ (đvtt). **C.** $V=\pi^2$ (đvtt). **D.** $V=6\pi$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn D. Tịnh tiến (C) theo $\vec{v}=(2;0)$ ta được hình tròn $(C'):x^2+(y-3)^2\le 1$.

Xét $x^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh (C') quanh trục Ox là:

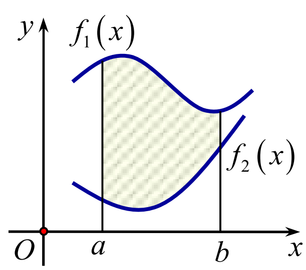
$$V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x=4\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$, $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$V=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t=12\pi.\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=6\pi$$

Dạng 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y=f(x)$ và $y=g(x)$ quay quanh trục Ox.

Câu 12. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V=\int\limits_a^b\left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b\left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $f_1(x)>f_2(x)\forall x\in(a;b)$

Câu 13. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức ?

A. $V=\pi\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

Câu 14. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_0^\pi|\sin x|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\left|\int\limits_0^\pi(-\sin x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 15. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xe^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b\,(a<b)$ xác định bởi: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. Vậy, $V=\pi\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

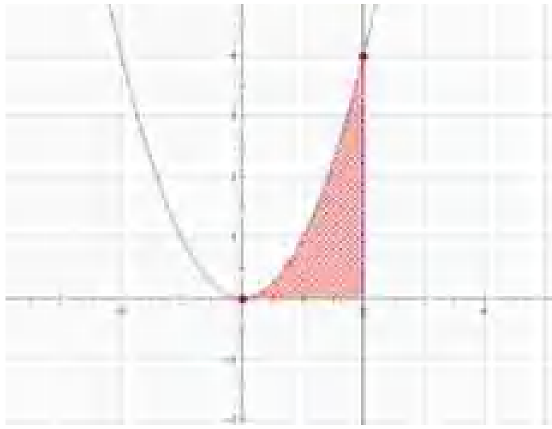
Chọn A. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $(H):\begin{cases}y=x.\ln x\\y=0\\x=1;x=2\end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

Câu 17. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2; y=0; x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\frac{8}{3}$. **B.** $V=\frac{32}{5}$. **C.** $V=\frac{8\pi}{3}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Vẽ phác họa hình thấy ngay miền cần tính: $V = \pi\int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$.

Câu 18. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x+2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{72\pi}{10}$ (đvtt). **B.** $\frac{72\pi}{5}$ (đvtt). **C.** $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). **D.** $\frac{81\pi}{5}$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Thể tích cần tìm là $V = \pi\left|\int_{-1}^{2}\left[x^4-(x+2)^2\right]\mathrm{d}x\right| = \frac{72\pi}{5}$.

Câu 19. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $V = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = \pi\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 20. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x + \pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

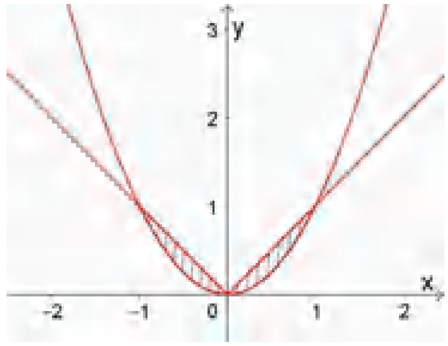
Vậy thể tích khối tròn xoay được tính: $V = \pi\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x$.

Câu 21. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\; \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x = y$ và $x = \sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là: $V = \pi \int_0^1 \left| y - y^2 \right| \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(y - y^2 \right) \mathrm{d}y = \pi . \left. \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \right|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

Câu 22. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Khi đó $a+b$ có kết quả là:

A. 11 **B.** 17 **C.** 31 **D.** 25

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 \, dx = \frac{16\pi}{15}$ Nên a= 16, b= 15, a+b=31

Câu 23. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường : $y = f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $y = g(x) = \frac{x^2}{2}$.Tính thể tích khối tròn xoay thu được tạo thành khi quay D quanh trục Ox ? Thể tích được viết dưới dạng $T = m\pi^2 + n\pi$;m,n$\in$ R thì tổng giá trị $m + n$ là ?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{13}{20}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét phương trình $\frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Như vậy, thể tích cần tìm sẽ được tính theo công thức: $V = \pi \int_{-1}^{1} \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left| \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^2 - \frac{x^4}{4} \right| dx = \pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^2} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{4} dx \right| \pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^2} dx - \left. \frac{x^5}{20} \right|_{-1}^{1} \right| = \pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^2} dx - \frac{1}{10} \right|$$

$V = \pi \left| I - \frac{1}{10} \right|$ với $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^2} dx$

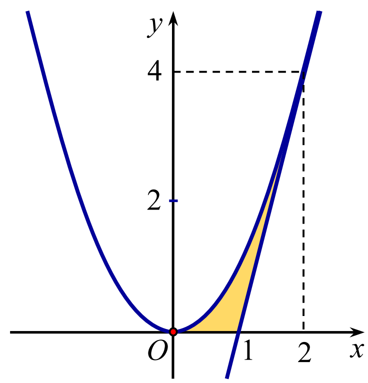
Tính I: Đặt $x=\tan t, t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)dt$

Ta có thể viết I lại dưới dạng $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}V=\pi\left|\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right|=\frac{\pi^2}{4}+\frac{2\pi}{5}$

Nhận xét: *Đây là một bài toán khá khó, đòi hỏi thí sinh phải biết đúng công thức và việc xử lí tích phân khéo léo.*

Câu 24. Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{32\pi}{5}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y=x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y=4(x-2)+4=4x-4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2 dx-\pi\int\limits_1^2(4x-4)^2 dx$.

$\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2 dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{32}{5}$; $\int\limits_1^2(4x-4)^2 dx=16\int\limits_1^2\left(x^2-2x+1\right)dx=16\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\right|_1^2=\frac{16}{3}$.

Vậy $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2 dx-\pi\int\limits_1^2(4x-4)^2 dx=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 25. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy=4$, $x=0$, $y=1$ và $y=4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V=8\pi$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=10\pi$. **D.** $V=12\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

$V=\pi\int\limits_1^4\left(\frac{4}{y}\right)^2 dy=\pi\int\limits_1^4\frac{16}{y^2}dy=\pi\left.\left(-\frac{16}{y}\right)\right|_1^4=12\pi$.

Câu 26. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^4\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thể tích vật thể cần tính là $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)}{2}$.

Câu 27. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox là $V=\dfrac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

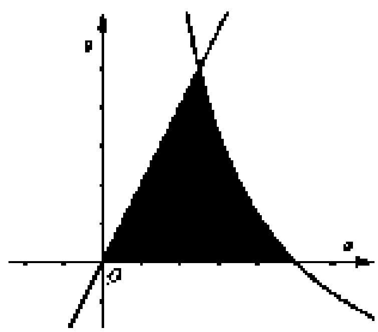
A. 11. **B.** 17. **C.** 31. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm $1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Ta có $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}\Rightarrow a=16$, $b=15$. Vậy $a+b=31$.

Câu 28. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=2x, y=\dfrac{1-x}{x}, y=0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên).



Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.

A. $V=\pi\left(\dfrac{5}{3}-2\ln2\right)$. **B.** $V=\pi\left(\dfrac{5}{3}+2\ln2\right)$. **C.** $V=\pi\left(2\ln2-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $V=\pi\left(2\ln2+\dfrac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=\dfrac{1-x}{x}$ là:

$$2x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=0$ là: $2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=0$ và $y=\dfrac{1-x}{x}$ là: $\dfrac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\1-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

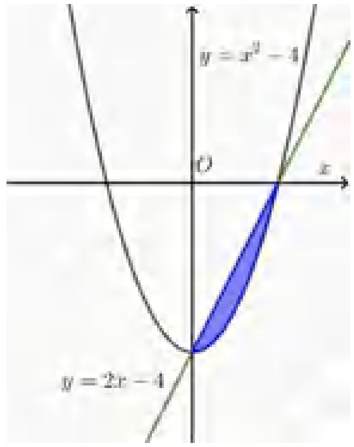
$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}}4x^2\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi.\frac{4x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$$

Câu 29. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{32\pi}{7}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Có $V_1=\pi\int_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x=\frac{256}{15}\pi$, $V_2=\pi\int_0^2(2x-4)^2\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\pi$. Vậy thể tích cần tìm $V=V_1-V_2=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 30. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=1$, $x=4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $2\pi\ln 2$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}-1$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Câu 31. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=a$, $(a>1)$ quay xung quanh trục Ox.

A. $V=\left(1-\frac{1}{a}\right)$. **B.** $V=\left(1-\frac{1}{a}\right)\pi$. **C.** $V=\left(1+\frac{1}{a}\right)\pi$. **D.** $V=\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích V của vật thể tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int_1^a\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=-\pi\frac{1}{x}\Bigg|_1^a=-\pi\left(\frac{1}{a}-1\right)\Leftrightarrow V=\left(1-\frac{1}{a}\right)\pi$.

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{32\pi}{15}$. **B.** $\frac{64\pi}{15}$. **C.** $\frac{21\pi}{15}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

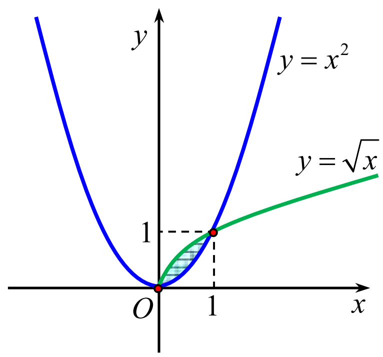
Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi\int\limits_0^2 \left|\left(x^2\right)^2 - (2x)^2\right| dx = \dfrac{64\pi}{15}$.

Câu 33. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox.

A. $V = \dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V = \dfrac{7\pi}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

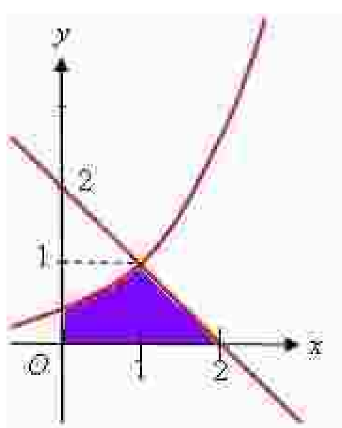
Khi đó thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) là $V = \pi\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int\limits_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \dfrac{3\pi}{10}$

Câu 34. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \dfrac{1}{3} + \dfrac{e^2 - 1}{2e^2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi\left(5e^2 - 3\right)}{6e^2}$. **C.** $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{e - 1}{e}\pi$. **D.** $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^2 - 1}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = e^{x-1}$ và đường thẳng $y = 2 - x$: $e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. (Vì $y = e^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y = 2 - x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định

$\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x=1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

Đường thẳng $y=2-x$ cắt trục hoành tại $x=2$.

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{x-1}\right)^2dx+\pi\int_1^2(2-x)^2dx=\pi e^{2x-2}\Big|_0^1+\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x+4\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi\left(5e^2-1\right)}{6e^2}.$$

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $x=g(y)$; $x=f(y)$ quay xung quanh trục Oy

Câu 35. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}$. **B.** $\frac{32\pi}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và trục hoành $-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+2x\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-1$, trục hoành và đường thẳng $x=4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{7\pi^2}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{6}$. **D.** $V=\frac{7\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành $V=\pi\int_1^4\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx=\pi\int_1^4\left(x-2\sqrt{x}+1\right)dx$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Bigg|_1^4=\frac{7\pi}{6}.$$

Câu 37. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x=e-1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $e-2$. **B.** 2π. **C.** πe. **D.** $\pi(e-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thể tích khối tròn xoay (H) là: $V=\pi\int_0^{e-1}\ln^2(x+1)dx=\pi\int_1^e\ln^2 x\,dx$

Đặt $\left\{\begin{array}{l}u=\ln^2x\\dv=dx\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}du=\frac{2\ln x}{x}dx\\v=x\end{array}\right.$. Ta có $V=\pi\left(x\ln^2x\Big|_1^e-2\int_1^e\ln x\,dx\right)$. Đặt $\left\{\begin{array}{l}u'=\ln x\\dv'=dx\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}du'=\frac{1}{x}dx\\v'=x\end{array}\right.$

Suy ra $V=\pi\left(x\ln^2x\Big|_1^e-2x\ln x\Big|_1^e+2\int_1^e dx\right)=\pi\left(x\ln^2x\Big|_1^e-2x\ln x\Big|_1^e+2x\Big|_1^e\right)=\pi(e-2)$.

Câu 38. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y=(2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

A. $V=\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

C. $V=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số $y=(2x-1)\sqrt{\ln x}$ có tập xác định là $D=[1;+\infty)$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $(2x-1)\sqrt{\ln x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Thể tích vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

Câu 39. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1-\frac{\pi}{4}$. **B.** π^2. **C.** $\pi-\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4}+\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích của (H) là : $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\pi(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 40. Goi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$. **B.** $\pi(e^2+1)$. **C.** $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$. **D.** $\pi(e^2-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

Câu 41. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi\ln 2}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\pi\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Câu 42. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=\pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\frac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0)=2$ thì $2a+5b$ bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có thể tích của vật thể là

$$V=\pi\int_0^{\pi}(a\sin x+b\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(a^2\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\frac{1+\cos 2x}{2}+ab\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\pi\left[a^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+b^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)-\frac{ab}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$=\pi\left(a^2+b^2\right)\dfrac{\pi}{2}$. Theo giả thiết ta có $a^2+b^2=5\,(1)$.

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x\Rightarrow f'(0)=a$. Theo giả thiết ta có $a=2$ và $b=1$.

Ta được $2a+5b=9$.

Câu 43. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1;x=3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{16}{15}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_1^3\left[x^2-4x+3\right]^2dx=\pi\int_1^3\left[x^4-5x^3+19x^2-12x+9\right]dx=\frac{16\pi}{15}\text{ (đvtt).}$$

Câu 44. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $32+2\sqrt{15}$. **B.** $\dfrac{124\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{124}{3}$. **D.** $\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích vật thể cần tìm là $V=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x=\int_1^5 t.t\mathrm{d}t=\left.\dfrac{t^3}{3}\right|_1^5=\dfrac{124}{3}$.

Câu 45. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ là:

A. $\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **B.** $\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$. **D.** $\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$ và trục hoành: $\sqrt{x}\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow x=0$.

Khi đó $V=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

Khi đó: $V=\pi\left[\left.\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right]=\pi\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-\dfrac{1}{4}\left.\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1\right]=\pi\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4}\right]=\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$.

$$=\frac{1}{6}\pi+\pi\left.\left(-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{6}\pi+\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)=\pi\left(\frac{5}{3}-2\ln 2\right).$$

Câu 46. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). **B.** $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). **C.** $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt). **D.** $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $3x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$. Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^3 \left(3x-x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=\frac{81\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$

Câu 47. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu ?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 48. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ là:

A. $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **B.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **C.** $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$. **D.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}\mathrm{e}^x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$.

Câu 49. Thể tích của vật tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y=\tan x$, trục Ox, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=\frac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

A. $V=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **B.** $V=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$. **C.** $V=\pi\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{3}$. **D.** $V=\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thể tích của vật tròn xoay là

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\pi(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi\left(\tan\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}.$$

Câu 50. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x}{4}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{15}{16}$. **B.** $\frac{15\pi}{8}$. **C.** $\frac{21}{16}$. **D.** $\frac{21\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$V=\pi\int_1^4\frac{x^2}{16}\mathrm{d}x=\pi\frac{x^3}{48}\Bigg|_1^4=\frac{21}{16}\pi.$$

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $V=\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ và trục hoành là $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\ln^3 x}{3}\right)\Bigg|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{3}.$$

Câu 52. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-4x+6$ và $y=-x^2-2x+6$.

A. π. **B.** $\pi-1$. **C.** 3π. **D.** 2π.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4x+6=-x^2-2x+6 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2-4x-6\right)^2-\left(-x^2-2x+6\right)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left|-12x^3+36x^2-24x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left|\int_0^1\left(-12x^3+36x^2-24x\right)\mathrm{d}x\right|=\pi\left|\left(-3x^3+12x^3-12x^2\right)\Big|_0^1\right|=3\pi.$$

Câu 53. Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Xét phương trình $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vì $2x-x^2\ge 0\,\forall x\in[0;2]$ nên thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox là $V=\pi\displaystyle\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$. Vậy $a-b=1$.

Câu 54. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ và trục Ox, quay (S) xung quang trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

A. $V=\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục Ox:

$\sqrt{2-x^2}=0 \Leftrightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

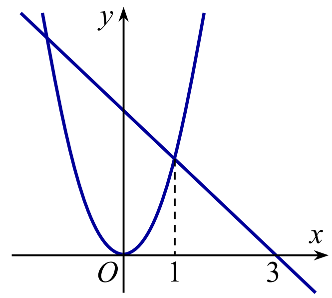
$$V=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Câu 55. Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh parabol $y=2x^2$ (với $x\ge 0$), đường thẳng $y=-x+3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{52\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{17\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{51\pi}{17}$. **D.** $V=\dfrac{53\pi}{17}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2=-x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay tạo bởi $(H):V=\pi\int_1^3(-x+3)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\dfrac{52}{15}\pi$.

Câu 56. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $\dfrac{64\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét phương trình hoành độ giao điểm của paraboly $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ ta có $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. Do $x^2-2x<0$ với $0<x<2$ nên $2x-x^2>0$ với $0<x<2$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành thì

$$V=\pi\int_0^2\left((2x)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

Câu 57. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x+y-2=0$; $y=\sqrt{x}$; $y=0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{6\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=0$; $x=1$.

Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1=\pi\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\pi.\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\dfrac{\pi}{2}$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2-x$; $y=0$; $x=1$; $x=2$.

Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$V_2 = \pi\int\limits_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x = \pi.\left.\dfrac{(x-2)^3}{3}\right|_1^2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Câu 58. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}$, $y=-x+2$ và $x=0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V=\dfrac{1}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{3}{2}\pi$. **C.** $V=\dfrac{32}{15}\pi$. **D.** $V=\dfrac{11}{6}\pi$.

Hướng dẫn giải

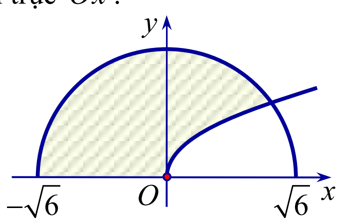
Chọn C. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ y=-x+2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2\,(x\ge 0) \\ y=-x+2 \\ x=0 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=-x+2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (nhaän) \\ x=-2\ (loaïi) \end{array}\right.$

Thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình (H) quay quanh trục Ox là:

$V=\pi\int\limits_0^1\left((-x+2)^2-(x^2)^2\right)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1\left(x^2-4x+4-x^4\right)\mathrm{d}x = \dfrac{32}{15}\pi$ (đvtt)

Câu 59. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ $\left(-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}\right)$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox.



A. $V=8\pi\sqrt{6}-2\pi$. **B.** $V=8\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$. **C.** $V=8\pi\sqrt{6}-\dfrac{22\pi}{3}$. **D.** $V=4\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3=8\pi\sqrt{6}.$$

Thể tích nửa khối cầu là $V_1=4\pi\sqrt{6}$. Xét phương trình: $\sqrt{x}=\sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$, và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quanh Ox là $V_2=\pi\int\limits_0^2\left(6-x^2-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{22\pi}{3}$. Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=V_1+V_2=4\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$.

Cách 2. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3=8\pi\sqrt{6}.$$

Xét phương trình: $\sqrt{x}=\sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ và đường thẳng $y=0$ quanh Ox là $V_2=\pi\int\limits_0^2 x\text{d}x+\pi\int\limits_2^{\sqrt{6}}\left(6-x^2\right)\text{d}x$

$=2\pi+\dfrac{12\sqrt{6}-28}{3}\pi=4\pi\sqrt{6}-\dfrac{22\pi}{3}$.

Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=V_1-V_2=8\pi\sqrt{6}-\left(4\pi\sqrt{6}-\dfrac{22\pi}{3}\right)=4\sqrt{6}\pi+\dfrac{22\pi}{3}$.

Câu 60. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$.

A. $\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

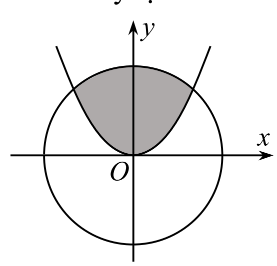
Ta có: $\begin{cases} 0=\sqrt{x}\Rightarrow x=0 \\ 0=x-2\Rightarrow x=2 \\ \sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=4 \end{cases}$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=0$; $x=2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và $x=2$; $x=4$.

Thể tích vật thể bằng: $V=\pi\int\limits_0^2\left(\sqrt{x}\right)^2\text{d}x+\pi\int\limits_2^4\left|(x-2)^2-\sqrt{x}^2\right|\text{d}x=\pi\int\limits_0^2 x\text{d}x+\pi\int\limits_2^4\left(x-(x-2)^2\right)\text{d}x$

$$=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x-2)^3}{3}\right)\right|_2^4=\frac{16\pi}{3}.$$

Câu 61. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



A. $V=\dfrac{44\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

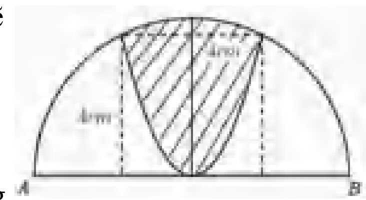
Chọn A.

Với $y=x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2+x^4=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Hơn nữa $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{2-x^2} \\ y=\sqrt{2-x^2} \end{array}\right.$.

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay $(H_1):\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích $(H_2):\begin{cases} y=x^2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox. Do đó $V=\pi\left[\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x\right]=\dfrac{44\pi}{15}$.

Câu 62. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ một parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB. Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần tô màu trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB. Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng:



A. $V=\dfrac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-464\right)$ cm^3.

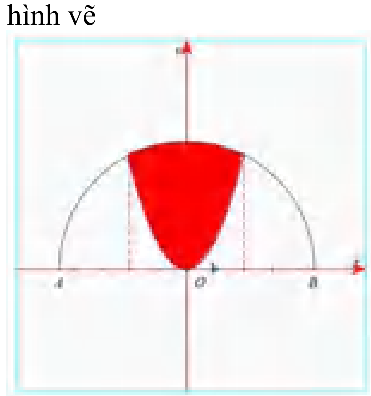
B. $V=\dfrac{\pi}{3}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

C. $V=\dfrac{\pi}{5}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

D. $V=\dfrac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



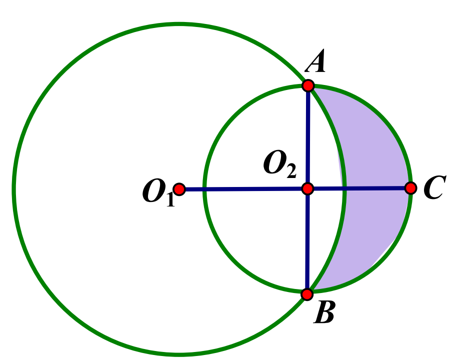
Theo đề bài ta có phương trình đường tròn là $y=\sqrt{20-x^2}$ và phương trình của parabol là $y=x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{20-x^2}=x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2-20=0 \Rightarrow x=\pm 2$.

Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên ta có thể tích vật thể tròn xoay được tính theo công thức

$$V=2\left[\pi\int\limits_{0}^{2\sqrt{5}}(20-x)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{0}^{2}\left(20-x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{15}\pi\left(800\sqrt{5}-928\right).$$

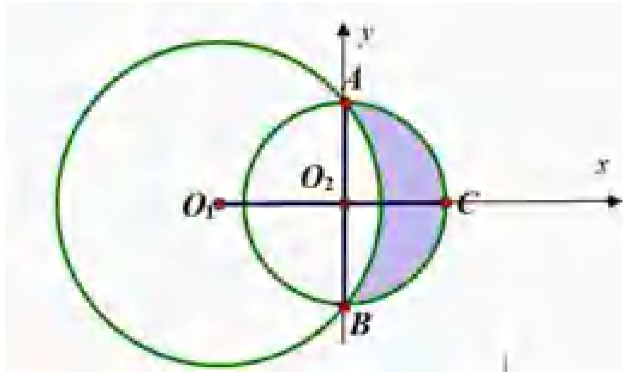
Câu 63. Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;8)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



A. $\dfrac{824\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{608}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{97}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{145}{3}\pi$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

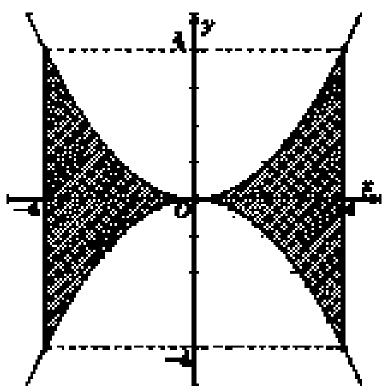
Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$. Ta có $O_2(0;0), O_1(-6;0)$.

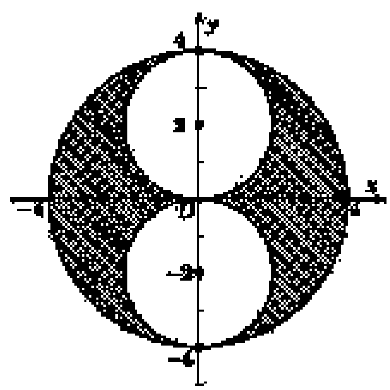
Đường tròn $(O_2;8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.

Đường tròn $(O_1;10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$.

Thể tích cần tìm $V = \pi\int\limits_0^8 (64 - x^2)dx - \pi\int\limits_0^4 \left[100 - (x+6)^2\right]dx = \dfrac{608\pi}{3}$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa: $x^2 + y^2 \le 16$, $x^2 + (y-2)^2 \ge 4$, $x^2 + (y+2)^2 \ge 4$.





Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \dfrac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = \dfrac{2}{3}V_2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

• Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là: $\mathrm{V} = \pi r^2 h = \pi.4^2.8 = 128\pi$.

• Thể tích giới hạn bởi Parabol $y = \dfrac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y = 4$ quay quanh Oy là:

$\Rightarrow V_{(P)} = \pi\int\limits_0^4 x^2 \mathrm{d}y = \pi\int\limits_0^4 4y\mathrm{d}y = 32\pi$.

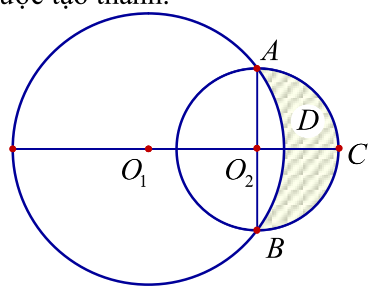
Suy ra thể tích (H_1) là: $V_1 = V - 2.V_{(P)} = 128\pi - 2.32\pi = 64\pi$.

• Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$: $V_L = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi$.

• Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$: $V_N = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi$

Suy ra thể tích (H_2) là: $V_2 = V_L - 2.V_N = \frac{256\pi}{3} - \frac{2.32\pi}{3} = 64\pi$. Vậy $r = 2$: $V_1 = V_2$.

Câu 65. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$. **B.** $V = \frac{68\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{14\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{40\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 3$.

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\int\limits_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \left[25 - (x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 66. Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

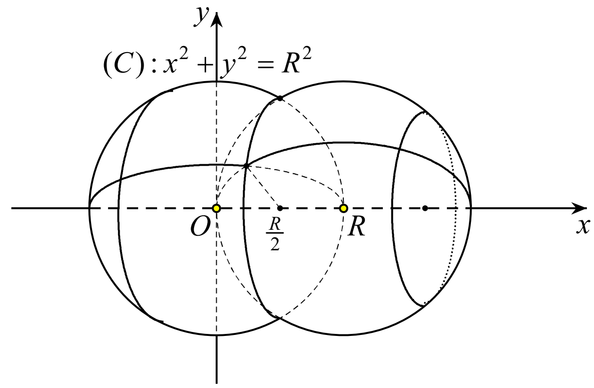
Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là

$(C): x^2+y^2=R^2$

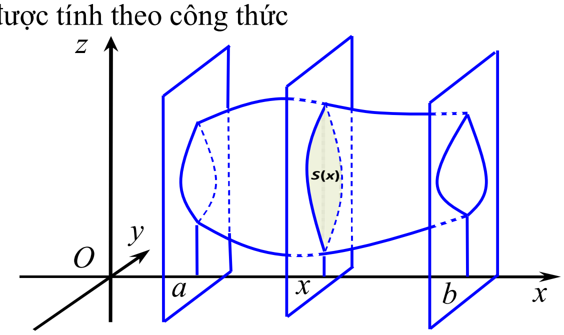
Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$



THỂ TÍCH TÍNH THEO MẶT CẮT S(X)

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



A. $V=\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Câu 68. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V=\frac{4}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Diện tích thiết diện: $S_\Delta=\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im=\int_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 69. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.

A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tại vị trí có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$.

Vậy thể tích V của vật thể là $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{3}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi+3}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi-3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thể tích vật thể B là $V=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\mathrm{d}x=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$.

Câu 71. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V=3$. **B.** $V=3\pi$. **C.** $V=2\pi\sqrt{3}$. **D.** $V=2\sqrt{3}$.

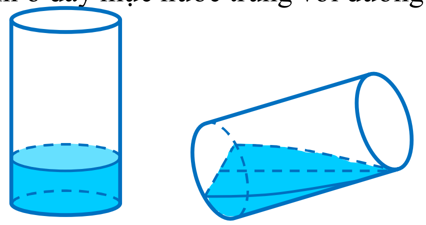
Hướng dẫn giải

Chọn D. Diện tích tam giác đều $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4}=\sqrt{3}\sin x$.

Vậy thể tích $V=\int\limits_{0}^{\pi}S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{3}\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{3}$.

BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

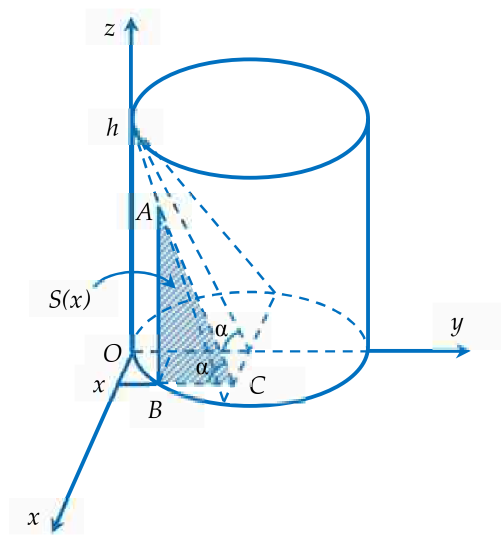
Câu 1. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Đặt $R = 6\,(\text{cm})$, $h = 10\,(\text{cm})$. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $(-6 \le x \le 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}BC^2\tan\alpha = \dfrac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\dfrac{h}{R} = \dfrac{5\left(36 - x^2\right)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int\limits_{-6}^{6} S(x)\,\text{d}x = \int\limits_{-6}^{6} \dfrac{5\left(36 - x^2\right)}{6}\,\text{d}x = 240\,(\text{cm}^3)$.

Câu 2. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$ có phương trình

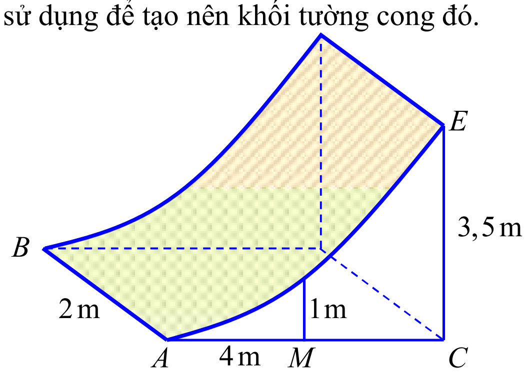
$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm\frac{25}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

Do đó thể tích quả dưa là $V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int\limits_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\mathrm{d}x$

$=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\frac{56}{3}=\frac{8750\pi}{3}\,\mathrm{cm}^3$.

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 183259$ đồng.

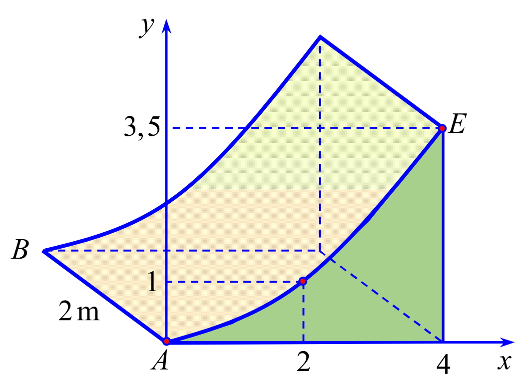
Câu 3. Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\mathrm{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB=2\,\mathrm{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC=4\,\mathrm{m}$, $CE=3,5\,\mathrm{m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao $1\,\mathrm{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



A. $9,75\,\mathrm{m}^3$. **B.** $10,5\,\mathrm{m}^3$. **C.** $10\,\mathrm{m}^3$. **D.** $10,25\,\mathrm{m}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ sao cho $A\equiv O$

$\Rightarrow$ cạnh cong AE nằm trên parabol $(P): y=ax^2+bx$ đi qua các điểm $(2;1)$ và $\left(4;\frac{7}{2}\right)$ nên $(P): y=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{8}x$

Khi đó diện tích tam giác cong ACE có diện tích $S=\int\limits_0^4\left(\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x=5\,\mathrm{m}^2$.

Vậy thể tích khối bê tông cần sử dụng là $V=5.2=10\,\mathrm{m}^3$.

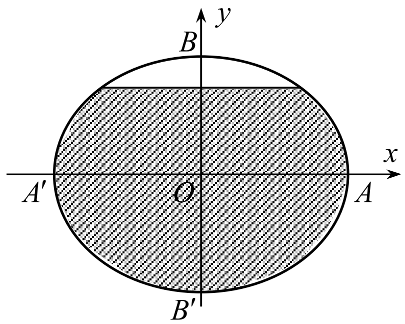
Câu 4. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1\mathrm{m}$, trục bé bằng $0,8\mathrm{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3\mathrm{m}$. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\mathrm{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V = 1,52\text{m}^3$. **B.** $V = 1,31\text{m}^3$. **C.** $V = 1,27\text{m}^3$. **D.** $V = 1,19\text{m}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5} \right) \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I = \displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = \dfrac{1}{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t = -\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Vậy $S_2 = \dfrac{4}{5}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) - \dfrac{\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

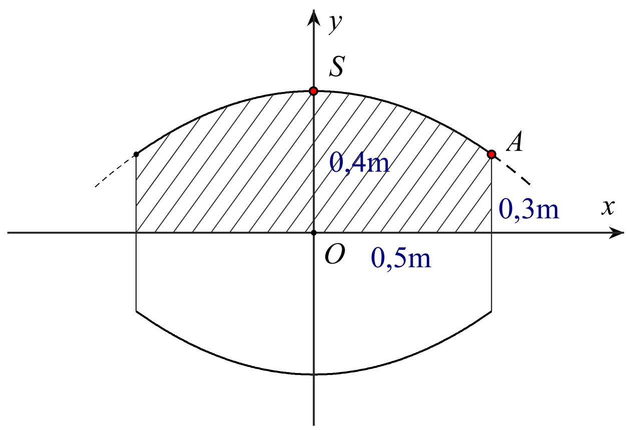
Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

Câu 5. Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?

A. $425,2$ *lit*. **B.** 425162 *lit*.
C. 212581 *lit*. **D.** $212,6$ *lit*.

Hướng dẫn giải

Chọn A



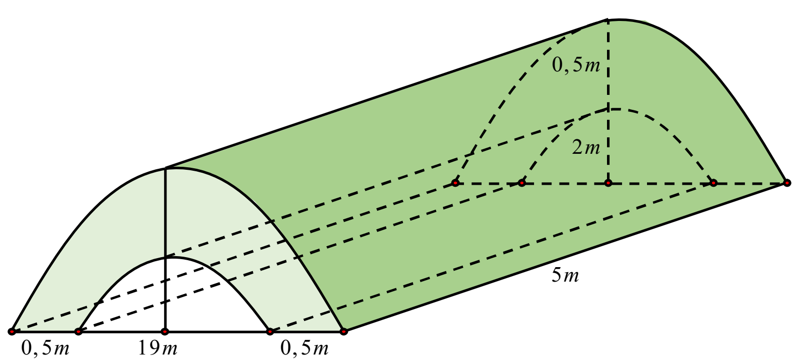
• Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$ (hình vẽ).

Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x=\pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

• Dễ dàng tìm được $(P): y=-\frac{2}{5}x^2+0,4$

• Thể tích thùng rượu là: $V=\pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=2\pi\int_{0}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=\frac{203\pi}{1500}\approx 425,5$ (l)

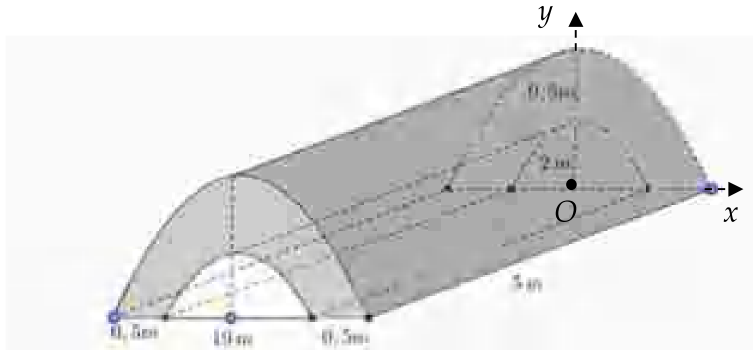
Câu 6. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$.. **D.** $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

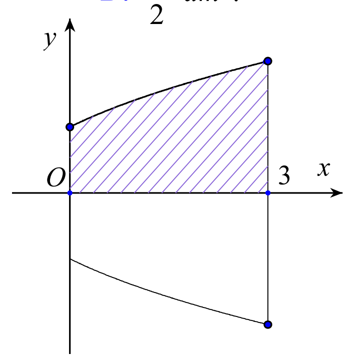
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$

Câu 7. Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

A. $8\pi\ dm^2$. **B.** $\frac{15}{2}\pi\ dm^3$. **C.** $\frac{14}{3}\pi\ dm^2$. **D.** $\frac{15}{2}\ dm^2$.

Hướng dẫn giải



Chọn B

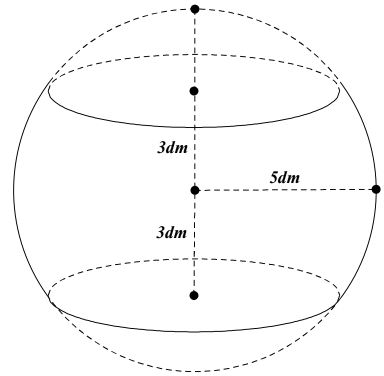
- $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$
- $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra: $V = \pi\int_0^3 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^3 (x+1)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$

Câu 8. Một khối cầu có bán kính 5dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm 3dm để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $132\pi\,(dm^3)$. **B.** $41\pi\,(dm^3)$. **C.** $\frac{100}{3}\pi\,(dm^3)$. **D.** $43\pi\,(dm^3)$

Hướng dẫn giải:

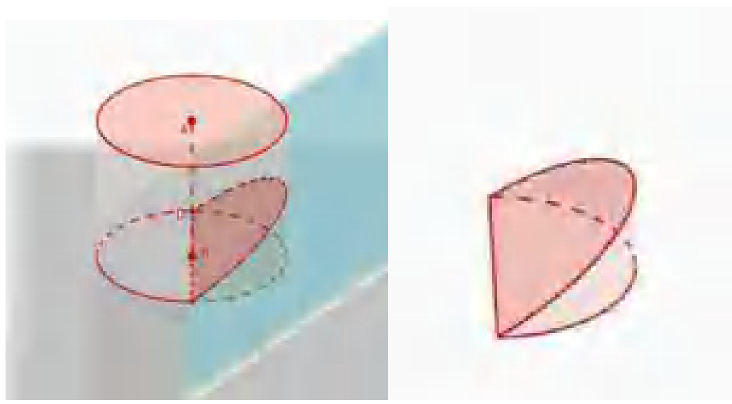


Chọn A. Đặt hệ trục với tâm *O*, là tâm của mặt cầu; đường thẳng đứng là *Ox*, đường ngang là *Oy*; đường tròn lớn có phương trình $x^2+y^2=25$.

Thể tích là do hình giới hạn bởi *Ox*, đường cong $y=\sqrt{25-x^2}$, $x=3, x=-3$ quay quanh *Ox*.

$V=\pi\int_{-3}^{3}(25-x^2)dx=132\pi$ (**bấm máy**).

Câu 9. Từ một khúc gõ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45^0 để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)

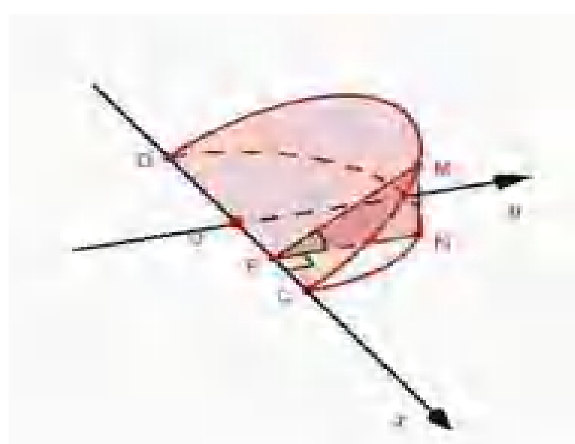


Hình 1 **Hình 2**

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V.

A. $V=2250\left(cm^3\right)$. **B.** $V=\dfrac{225\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **C.** $V=1250\left(cm^3\right)$. **D.** $V=1350\left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.Khi đó hình nêm có đáy

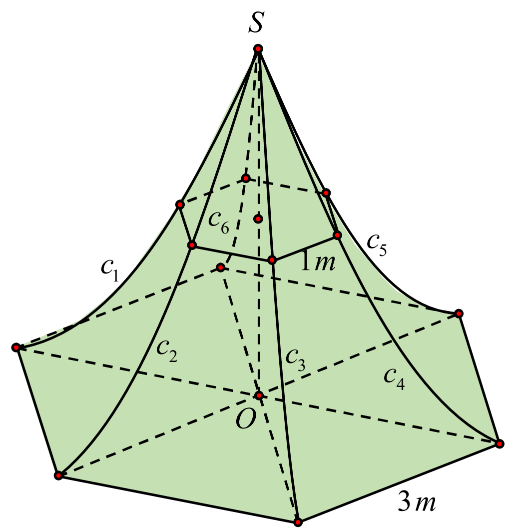
là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{225-x^2}, x\in\left[-15;15\right]$

Một một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x, \left(x\in\left[-15;15\right]\right)$

cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S\left(x\right)$ (xem hình).

Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP\tan 45^0 = y = \sqrt{15 - x^2}$ khi đó $S\left(x\right) = \frac{1}{2}MN.NP = \frac{1}{2}.\left(225 - x^2\right)$ suy ra thể tích hình nêm là: $V = \int\limits_{-15}^{15} S\left(x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-15}^{15}.\left(225 - x^2\right)dx = 2250\left(cm^3\right)$. **Chọn A**

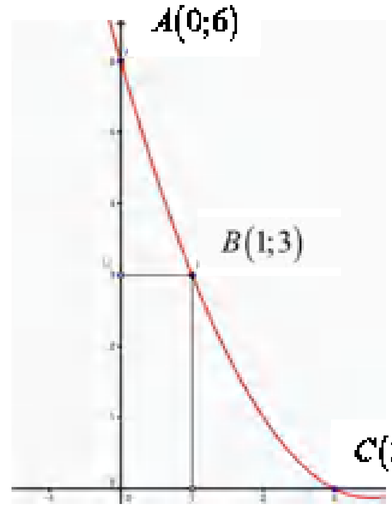
Câu 10. Người ta dựng một cái lều vải $\left(H\right)$ có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của $\left(H\right)$ là một hình lục giác đều cạnh $3\ m$. Chiều cao $SO = 6\ m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của $\left(H\right)$ là các sợi dây c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của $\left(H\right)$ với mặt phẳng $\left(P\right)$ vuông góc với SO là một lục giác đều và khi $\left(P\right)$ qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1\ m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều $\left(H\right)$ đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}$ (m^3). **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}$ (m^3). **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}$ (m^3). **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}$ (m^3).

Hướng dẫn giải

Đặt **hệ** trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A\left(0;6\right)$, $B\left(1;3\right)$, $C\left(3;0\right)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$



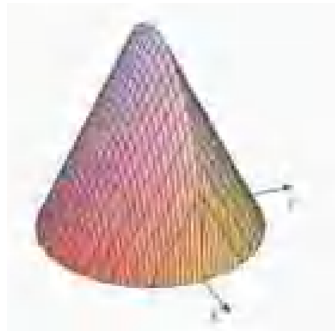
Theo **hình** vẽ ta có cạnh của "**thiết diện lục giác**" là BM. Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$ (chú ý là ta phải lấy giá trị có dấu "$-$" trước dấu căn và cho B chạy từ C đến A).

Khi đó, diện **tích** của "**thiết diện lục giác**" bằng $S\left(t\right) = 6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2$ với $t \in \left[0;6\right]$.

Vậy thể tích của "túp lều" theo đề bài là: $V=\int_0^6 S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 \mathrm{d}t=...=\frac{135\sqrt{3}}{8}$.

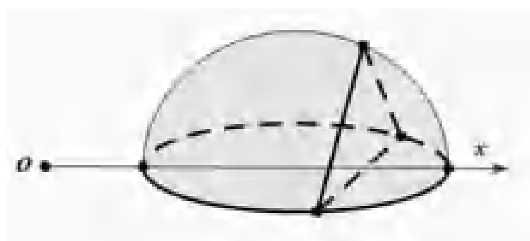
Chọn D

Câu 11. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{256}{3}$. **B.** $V=\frac{64}{3}$. **C.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

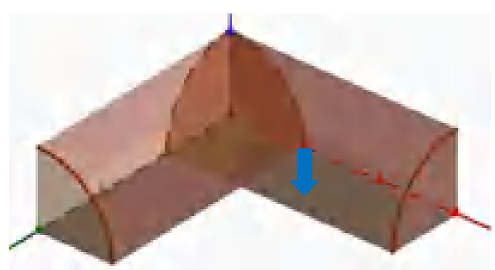
Hướng dẫn giải



Chọn tâm đường tròn làm gốc. Diện tích thiết diện là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}(4-x^2)$

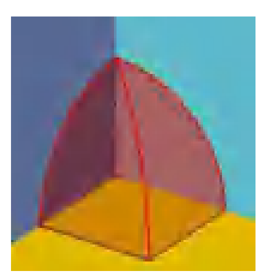
$V=\int_{-2}^{2} S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{32\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D**

Câu 12. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)}=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)}=\frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)}=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)}=\frac{\pi a^3}{4}$.

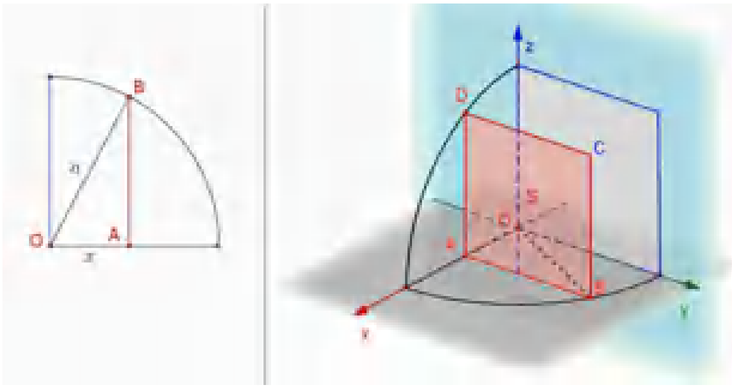


Hướng dẫn giải

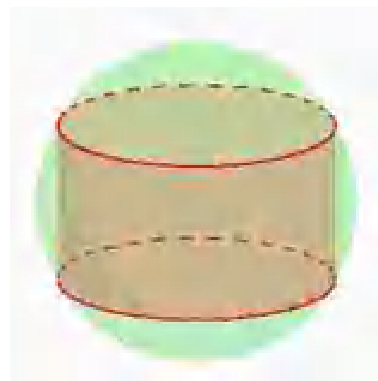
Chọn A

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x)dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2a^3}{3}$.



Câu 13. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$

C. $41\pi(dm^3)$ **D.** $132\pi(dm^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x = 0,\ x = 2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y = \sqrt{25-(x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$

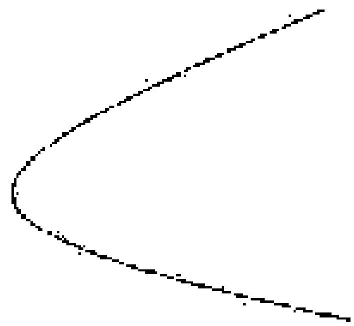
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi\int_0^2 (10x - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(5x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi.5^3 = \frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V = V_2 - 2V_1 = \dfrac{500\pi}{3} - 2.\dfrac{52\pi}{3} = 132\pi\left(dm^3\right)$

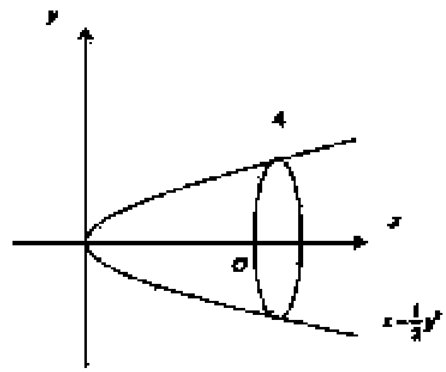
Câu 14. Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol (hình vẽ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$. Tính thể tích chuông?



A. 6π **B.** 12π **C.** $2\pi^3$ **D.** 16π

Hướng dẫn giải

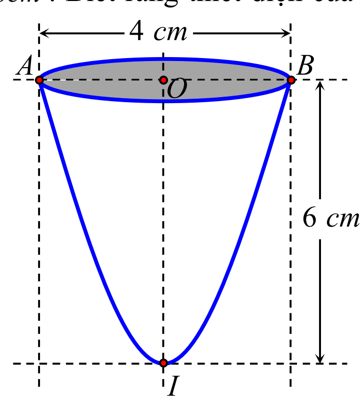
Xét hệ trục như hình vẽ, dễ thấy parabol đi qua ba điểm $(0;0),\left(4;2\sqrt{2}\right),\left(4;-2\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình $x = \dfrac{y^2}{2}$. Thể tích của chuông là thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng $y = \sqrt{2x}, x = 0, x = 4$ quay quanh trục Ox. Do đó



Ta có $V = \pi\int\limits_0^4 2xdx = \left(\pi x^2\right)\Big|_0^4 = 16\pi$

Câu 15. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây

Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\left(cm^3\right)$ của vật thể đã cho.



A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 12$.

C. $V = \dfrac{72}{5}\pi$. **D.** $V = \dfrac{72}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P). Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \dfrac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \dfrac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{3}y$. Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi\int\limits_0^6\left(\dfrac{2}{3}y\right)dy = 12\pi\left(cm^3\right)$.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ VÀ LIÊN MÔN

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

A. 1028 *m*. **B.** 1280 *m*. **C.** 1308 *m*. **D.** 1380 *m*.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Khi vật dừng lại thì $v(t)=160-10t=0 \Leftrightarrow t=16$

Suy ra: $s=\int_0^{16} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{16}(160-10t)\,\mathrm{d}t=\left(160t-5t^2\right)\Big|_0^{16}=1280\ m.$

Câu 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)\ (m/s)$, có gia tốc $a(t)=v'(t)=\dfrac{3}{2t+1},\ (m/s^2)$. Vận tốc của ô tô sau 10 giây (*làm tròn đến hàng đơn vị*) là

A. $4,6\,m/s$. **B.** $7,2\,m/s$. **C.** $1,5\,m/s$. **D.** $2,2\,m/s$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vận tốc của ô tô sau 10 giây là: $v=\int_0^{10}\dfrac{3}{2t+1}\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}\ln|2t+1|\Big|_0^{10}=\dfrac{3}{2}\ln 21\approx 4,6\ (m/s).$

Câu 3: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm^2/s) là $a(t)=\dfrac{-20}{(1+2t)^2}$ (với t tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30\ (cm/s)$.

A. $\dfrac{10}{1+2t}$ **B.** $\dfrac{10}{1+2t}+20$ **C.** $(1+2t)^{-3}+30$ **D.** $\dfrac{-20}{(1+2t)^2}+30$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{-20}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t=\dfrac{10}{1+2t}+C$
- Do $v(0)=30$, suy ra $\dfrac{10}{1+2.0}+C=30\Leftrightarrow C=20$
- Vậy, hàm $v(t)=\dfrac{10}{1+2t}+20$.

Câu 4: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động trong khoảng thời gian $t=0$ (s) đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}$ (s) là

A. $\dfrac{3\pi}{4}-1$. **B.** $\dfrac{3\pi-1}{4}$. **C.** $\dfrac{3\pi+1}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Quãng đường cần tìm $s=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\,\mathrm{d}t=(t+\cos 2t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{3\pi}{4}-1$.

Câu 5: Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\ m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách $45m$ (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh.

Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

A. $5\ m$. **B.** $4\ m$. **C.** $6\ m$. **D.** $3\ m$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xe đang chạy với vận tốc $v = 20\ m/s$ tương ứng với thời điểm $t = 0(s)$

Xe đừng lại tương ứng với thời điểm $t = 4(s)$.

Quảng đường xe đã đi là $S = \int_0^4 (-5t + 20)\,dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right)\Big|_0^4 = 40(m)$.

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45 - 40 = 5(m)$.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc $10\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3}$ *m.* **B.** 4300 *m.* **C.** 430 *m.* **D.** $\frac{430}{3}$ *m.*

Hướng dẫn giải

Chọn A. • Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t)\,dt = \int (3t + t^2)\,dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

• Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$. Ta được: $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$

• Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là: $s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\Big|_0^{10} = \frac{4300}{3}$ *m.*

Câu 7: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 95,70$ (m). **B.** $S = 87,50$ (m). **C.** $S = 94,00$ (m). **D.** $S = 96,25$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn D. Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t)\,dt = \int_0^5 7t\,dt = 7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5 = 87,5\ (m).$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn

$v_2(t) = \int (-70)\,dt = -70t + C$, $v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385$. Vậy $v_2(t) = -70t + 385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thoả mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t)\mathrm{d}t = \int_5^{5,5} (-70t + 385)\mathrm{d}t = 8,75\,(\mathrm{m})$. Quãng đường cần tính $S = S_1 + S_2 = 96,25\,(\mathrm{m})$.

Câu 8: Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ \ m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

A. $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

Ta có: $v(t) - v(0) = \int_0^t (-a)\mathrm{d}t = -at \Rightarrow v(t) = -at + 15$.

$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (-at + 15)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$, $x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$

Ta có: $\begin{cases} v(t) = 0 \\ x(t) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t + 15t = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{45}{8}$.

Câu 9: Một ôtô đang chạy với vận tốc $18\ m/s$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ôtô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

A. $5,5\ m$. **B.** $3,5\ m$. **C.** $6,5\ m$. **D.** $4,5\ m$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng.

Ta có $v(T) = 0$. Suy ra $-36T + 18 = 0 \Rightarrow T = 0,5$ (s)

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn ô tô là 0,5 s. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $s = \int_0^{0,5} (-36t + 18)\,dt = \left(-18t^2 + 18t\right)\Big|_0^{0,5} = 4,5(m)$.

Câu 10: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2}\ (m/s^2)$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là $30m/s$. Tính quảng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. $S = 106m$. **B.** $S = 107m$. **C.** $S = 108m$. **D.** $S = 109m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có $v(t) = \int a(t)\,dt = \int -20(1+2t)^{-2}\,dt = \frac{10}{1+2t} + C$. Theo đề ta có

$v(0) = 30 \Leftrightarrow C + 10 = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S=\int_0^2\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)dt=\left(5\ln(1+2t)+20t\right)\Big|_0^2=5\ln 5+100\approx 108m.$$

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1,5+\frac{t^2+2}{t+2}$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

A. 12,60 *m*. **B.** 12,59 *m*. **C.** 0,83 *m*. **D.** 6,59 *m*.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Quãng đường trong 4 giây đầu tiên (*từ* $t=0$ *đến* $t=4$) là

$$s=\int_0^4\left(1,5+\frac{t^2+2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^4\left(1,5+t-2+\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(1,5t+\frac{t^2}{2}-2t+6\ln|t+2|\right)\Big|_0^4\approx 12,59\ m.$$

Câu 12: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s. Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là $9,8\ m/s^2$?

A. $30,625$ *m*. **B.** $37,5$ *m*. **C.** $68,125$ *m*. **D.** $6,875$ *m*.

Hướng dẫn giải

Chọn C. • Hàm vận tốc $v(t)=v_0+at=15+9,8t$

• Quãng đường tia lửa đi được sau 2,5 giây là: $s=\int_0^{2,5}(15+9,8t)\mathrm{d}t=\left(15t+4,9t^2\right)\Big|_0^{2,5}$ =68,125 *m*.

Câu 13: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $24,5(m/s)$ và gia tốc trọng trường là $9,8(m/s^2)$. Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là (coi như viên đạn được bắn lên từ mặt đất)

A. $61,25\ (m)$. **B.** $30,625\ (m)$. **C.** $29,4\ (m)$. **D.** $59,5\ (m)$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Chọn chiều dương từ mặt đất hướng lên trên, mốc thời gian $t=0$ bắt đầu từ khi vật chuyển động. Ta có vận tốc viên đạn theo thời gian t là $v(t)=v_0-gt=24,5-9,8t\quad (m/s)$

Khi vật ở vị trí cao nhất thì có vận tốc bằng 0 tương ứng tại thời điểm $t=\frac{5}{2}$

Quãng đường viên đạn đi được từ mặt đất đến vị trí cao nhất là

$$S(t)=\int_0^{\frac{5}{2}}|v(t)|dt=\int_0^{\frac{5}{2}}|24,5-9,8t|dt=\frac{245}{8}$$

Vậy quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là $2.\frac{245}{8}=61,25\ (m)$.

Câu 14: Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

A. 1,95J. **B.** 1,59 J. **C.** 1000 J. **D.** 10000 J

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm x m so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trì lại với một lực $f(x) = kx$ .Khi kéo căng lò xo từ 5 cm đến 10 cm, thì nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m. Bằng cách này, ta được $f(0,05) = 50$ bởi vậy: $0.05k = 50 \Rightarrow k = \dfrac{50}{0.05} = 1000$

Do đó: $f(x) = 1000x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 13 cm là:

$$\mathrm{W} = \int_{0,05}^{0,08} 1000x dx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,05}^{0,08} = 1,95J$$

Câu 15: Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

A. $v = 5(m/p)$. **B.** $v = 7(m/p)$. **C.** $v = 9(m/p)$. **D.** $v = 3(m/p)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là $t = 0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1.

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 là

$$\int_0^{t_1} (10t - t^2)\mathrm{d}t = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3} = 162 \quad \Leftrightarrow t \approx -4,93 \vee t \approx 10,93 \vee t = 9$$

Do $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$ nên chọn $t = 9$.

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là $v(9) = 10.9 - 9^2 = 9(m/p)$

Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phân, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2m$. **B.** $2m$. **C.** $10m$. **D.** $20m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có ô tô đi được thêm 2 giây nữa với vận tốc chậm dần đều $v(t) = -5t + 10(m/s)$

Ta có quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^2 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 (-5t + 10)\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10(m)$

* Lúc dừng thì ta có: $v(t) = 0 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2$

Từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường: $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Với $\begin{cases} a=-5 \\ t=2 \\ v_0=10 \end{cases} \Rightarrow S=10.2+\dfrac{1}{2}(-5).2^2=10(m)$

* Áp dụng công thức lý 10 ta có: $v_2^2-v_1^2=2.a.s$

Ta còn có công thức liên hệ giữa vận tốc và gia tốc: $v=v_0+a.t$

Dựa vào phương trình chuyển động thì $a=-5\left(m/s^2\right)$

Khi dừng hẳn thì ta có $v_2=0(m/s)$

Theo công thức ban đầu, ta được $s=\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2a}=\dfrac{0-10^2}{2.(-5)}=10(m)$.

Câu 17: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t(\text{m/s})$. Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(\text{s})$ đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}(\text{s})$ là

A. $\dfrac{3\pi}{4}(\text{m})$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}-1(\text{m})$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}-2(\text{m})$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}+1(\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $s=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t)\text{d}t=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\text{d}t=\left(t+\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{3\pi}{4}-1$.

Câu 18: Bạn Minh ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5$ (m/s). Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

A. 246 m. **B.** 252 m. **C.** 1134 m. **D.** 966 m.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $S=\int\limits_4^{10}\left(3t^2+5\right)\text{d}t=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=1050-84=996$.

Câu 19: Một ô tô đang chạy với tốc độ $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét.

A. $8m$. **B.** $10m$. **C.** $5m$. **D.** $20m$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Khi ô tô có vận tốc $10(\text{m/s})$ tương ứng với $t=0(\text{s})$.

Lúc ô tô dừng lại thì $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+10=0\Leftrightarrow t=2(\text{s})$.

Quãng đường ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$S=\int\limits_0^2(-5t+10)\text{d}t=\left(-\dfrac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10(\text{m})$.

Câu 20: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t)=v'(t)=\dfrac{3}{t+1}$ (m/s^2). Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

A. $v=3\ln 3$. **B.** $v=14$. **C.** $v=3\ln 3+6$. **D.** $v=26$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int \dfrac{3}{t+1}=3\ln|t+1|+C$.

Lại có: $v(6)=6\Leftrightarrow 3\ln 7+c=6\Leftrightarrow c=6-3\ln 7$. Suy ra $v(20)=3\ln 21+6-3\ln 7=3\ln 3+6$.

Vậy vận tốc của ôtô tại giây thứ 20 bằng $3\ln 3+6$.

Câu 21: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t(\text{m/s})$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(\text{m/s})$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\dfrac{2500}{3}(\text{m})$. **B.** $2000(\text{m})$. **C.** $500(\text{m})$. **D.** $\dfrac{4000}{3}(\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi t là thời gian máy bay chuyển động trên đường băng $(t>0)$.

Khi máy bay rời đường bằng thì $v(t)=200\Rightarrow t^2+10t-200=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20(L)\end{array}\right.$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$S=\int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t^2\right)\Bigg|_0^{10}=\frac{10^3}{3}+5.10^2=\frac{2500}{3}(\text{m}).$$

Câu 22: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t)=2t+1$ (m/s^2). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

A. 200. **B.** 243. **C.** 288. **D.** 300.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(2t+1)\mathrm{d}t=t^2+t+C$.

Mặt khác vận tốc ban đầu là 180 km/h hay 50 m/s nên ta có $v(0)=50\Leftrightarrow C=50$.

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là $v(5)=5^2+5+50=80$ m/s hay 288 km/h.

Câu 23: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

A. 4 m. **B.** 5 m. **C.** 3 m. **D.** 6 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B. * Xe dừng lại khi $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4\ (\text{s})$.

* Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là:

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(-5t+20)\,dt=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=40\text{ m}$$

* Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45-40=5$ m.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3+\frac{9}{2}t^2-6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng $24\ (\text{m/s})$ là

A. $21\ (\text{m/s}^2)$. **B.** $12\ (\text{m/s}^2)$. **C.** $39\ (\text{m/s}^2)$. **D.** $20\ (\text{m/s}^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $v(t)=s'(t)=3t^2+9t-6=24 \Rightarrow t=2\ (\text{s})$. Lại có $a(t)=s''(t)=6t+9 \Rightarrow a(2)=21\ (\text{m/s}^2)$.

Câu 25: Một vật chuyển động có phương trình $v(t)=t^3-3t+1\ (\text{m/s})$. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng $24\ \text{m/s}^2$ là

A. $\frac{15}{4}$ m. **B.** 20 m. **C.** 19 m. **D.** $\frac{39}{4}$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gia tốc $a(t)=v'(t)=3t^2-3$. Tại thời điểm vật có gia tốc $24\ \text{m/s}^2$ thì $24=3t^2-3 \Leftrightarrow t=3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng $24\ \text{m/s}^2$ là quãng đường vật đi từ vị trí $t=0$ đến vị trí $t=3$. $S(3)=\int_0^3(t^3-3t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{39}{4}$.

Câu 26: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t)=6t+12t^2\ (\text{m/s}^2)$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\frac{4300}{3}$ m. **B.** 11100 m. **C.** 4300 m. **D.** $\frac{98}{3}$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Vật tốc $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int(6t+12t^2)\,\mathrm{d}t=3t^2+4t^3+C$

Tại thời điểm $t=0$ (lúc bắt đầu tăng tốc) thì $v(t)=10$ m/s $\Leftrightarrow v(0)=10 \Leftrightarrow 3.0^2+4.0^3+C=10 \Leftrightarrow C=10$. Vậy $v(t)=3t^2+4t^3+10$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$S=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10}(3t^2+4t^3+10)\,\mathrm{d}t=11100\text{ m}.$$

Câu 27: Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 20\left(\text{m/s}\right)$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a\left(t\right) = -4 + 2t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

A. $\dfrac{104}{3}\,\text{m}$. **B.** $104\,\text{m}$. **C.** $208\,\text{m}$. **D.** $\dfrac{104}{6}\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vận tốc của vật khi thay đổi là $v\left(t\right) = \int\left(-4 + 2t\right)\mathrm{d}t = t^2 - 4t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$ (khi vật bắt đầu thay đổi vận tốc) có $v_0 = 20 \Rightarrow C = 20$

Suy ra $v\left(t\right) = t^2 - 4t + 20$. Có $v\left(t\right) = \left(t-2\right)^2 + 16 \geq 16$, suy ra vận tốc của vật đạt bé nhất khi $t = 2$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là

$$S = \int_0^2 v\left(t\right)\mathrm{d}t = \int_0^2\left(t^2 - 4t + 20\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 20t\right)\right|_0^2 = \frac{104}{3}\ \left(\text{m}\right).$$

Câu 28: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right) = t^2 + 4t\left(m/s^2\right)$. Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

A. $68,25\,m$. **B.** $67,25\,m$. **C.** $69,75\,m$. **D.** $70,25\,m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $v\left(t\right) = \int\left(t^2 + 4t\right)\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + C$. Theo giả thiết $v_0 = 15\ m/s \Rightarrow C = 15$.

Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

$$S = \int_0^3\left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^4}{12} + \frac{2}{3}t^3 + 15t\right)\right|_0^3 = 69,75.$$

Câu 29: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\text{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A\left(t\right) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $v_A\left(0\right) = 16\,\text{m/s}$. Khi xe A dừng hẳn: $v_A\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 4\,\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4\left(16 - 4t\right)\mathrm{d}t = 32\,\text{m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,\text{m}$.

Câu 30: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1\left(t\right) = 6 - 3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2\left(t\right) = 12 - 4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

A. 25 mét. **B.** 22 mét. **C.** 20 mét. **D.** 24 mét.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thời gian người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là: $6-3t=0 \Leftrightarrow t=2$ giây.

Quãng đường người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là: $S_1=\int_0^2 (6-3t)\,dt=\left(6t-\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^2=6$ mét.

Thời gian người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là: $12-4t=0 \Leftrightarrow t=3$ giây.

Quãng đường người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là $S_2=\int_0^3 (12-4t)\,dt=\left(12t-2t^2\right)\Big|_0^3=18$ mét

Khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn là: $S=S_1+S_2=6+18=24$ mét.

Câu 31: Một ô tô đang chạy với tốc độ $36(\text{km/h})$ thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $10(\text{m})$. **B.** $20(\text{m})$. **C.** $2(\text{m})$. **D.** $0,2(\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $36\,\text{km/h}=10\,\text{m/s}$. Khi xe dừng thì vận tốc bằng $0 \Rightarrow -5t+10=0 \Rightarrow t=2(\text{s})$.

Quãng đường xe đi đường từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s=\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (-5t+10)\,dt=\left(-\frac{5t^2}{2}+10t\right)\Big|_0^2=10(\text{m}).$$

Câu 32: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 150 mét. **B.** 5 mét. **C.** 50 mét. **D.** 100 mét.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t_0=0$ là thời điểm người lái xe ô tô bắt đầu đạp phanh, khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc triệt tiêu nên $-4t+20=0 \Leftrightarrow t=5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường:

$$\int^5 (-4t+20)\,dt=50 \text{ mét.}$$

Câu 33: Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $v(0)=10\,\text{m/s}$ và $v(t)=\int_0^t a(t)\,dt=\int_0^t (t^2+3t)\,dt=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\left(\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\text{m}$.

Câu 34: Một ôto đang chuyển động đều với vận tốc $20\ (\text{m/s})$ rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ôto đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

A. $100\ (\text{m})$. **B.** $75\ (\text{m})$. **C.** $200\ (\text{m})$. **D.** $125\ (\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Thời gian từ lúc hãm phanh đến dừng hẳn là: $-2t+20=0 \Leftrightarrow t=10\ (\text{s})$.

Quãng đường ôto đi được trong 15 giây cuối cùng là:

$$s=20.5+\int_0^{10}(-2t+20)\,\mathrm{d}t=100+\left(-t^2+20t\right)\Big|_0^{10}=100+(-100+200)=200\ (\text{m}).$$

Câu 35: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\,(\text{m/s})$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200\,(\text{m/s})$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $500\,(\text{m})$. **B.** $2000\,(\text{m})$. **C.** $\dfrac{4000}{3}(\text{m})$. **D.** $\dfrac{2500}{3}(\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. - Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200\,(\text{m/s})$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2+10t=200 \Leftrightarrow t^2+10t-200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20 \end{array}\right. \Rightarrow t=10\,(\text{s}).$$

- Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là: $s=\displaystyle\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t^2\right)\Big|_0^{10}=\frac{2500}{3}(\text{m})$

.

Câu 36: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ (\text{m})$. **B.** $S=87,5\ (\text{m})$. **C.** $S=94\ (\text{m})$. **D.** $S=95,7\ (\text{m})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35\,(\text{m/s})$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$. Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5\text{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\displaystyle\int_0^5 7t\,\mathrm{d}t+\int_5^{5,5}\left[35-70(t-5)\right]\mathrm{d}t=96,25\,(\text{m})$.

Câu 37: Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc $80\,\text{m/s}$ thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian $56\,\text{s}$, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là $74\,\text{s}$. Tính quảng đường đi được của xe.

A. $5200\,\text{m}$. **B.** $5500\,\text{m}$. **C.** $5050\,\text{m}$. **D.** $5350\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Lần tăng tốc đầu tiên xe chuyển động với vận tốc $v(t)=a.t$, $(a>0)$.

Đến khi xe đạt vận tốc 80m/s thì xe chuyển động hết $t_1=\dfrac{80}{a}(\text{s})$.

Lần giảm tốc, xe chuyển động với vận tốc $v_3=80-bt$, $(b>0)$.

Khi xe dừng lại thì xe chuyển động thêm được $t_3=\dfrac{80}{b}(\text{s})$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{80}{a}+56+\dfrac{80}{b}=74 \Leftrightarrow \dfrac{80}{a}+\dfrac{80}{b}=18$.

Ta có $S_1=\int\limits_0^{t_1} at\text{dt}=\int\limits_0^{\frac{80}{a}} at\text{dt}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{80^2}{a}(\text{m})$. $S_2=80.56(\text{m})$.

$S_3=b\int\limits_0^{t_3}(80-bt)\text{dt}=\int\limits_0^{\frac{80}{b}}(80-bt)\text{dt}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{80^2}{b}(\text{m})$.

Vậy quảng đường xe chạy được là $S_3=\dfrac{1}{2}.80.\left(\dfrac{80}{a}+\dfrac{80}{b}\right)+80.56=40.18+80.56=5200(\text{m})$.

Câu 38: Một ô tô chạy với vận tốc $v_0(\text{m/s})$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ôtô chuyển động chậm dần với gia tốc $a=-8t(\text{m/s}^2)$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12m. Tính v_0?

A. $\sqrt[3]{1296}$. **B.** $\sqrt[3]{36}$. **C.** $\sqrt[3]{1269}$. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$a=-8t(m/s^2)\Rightarrow v=\int -8t\text{d}t=-4t^2+C$.

Tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc của vật là $v_0(\text{m/s})$ nên ta có $v_0=C$, vậy $v=-4t^2+v_0$.

Tại thời điểm t_0 vận tốc của vật là 0 nên ta có $0=-4t_0{}^2+v_0 \Leftrightarrow 4t_0{}^2=v_0$. Ta có

$$\int_0^{t_0}(-4t^2+v_0)\text{d}t=12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0{}^3}{3}+v_0t_0=12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0{}^3}{3}+4t_0{}^3=12 \Leftrightarrow t_0=\frac{\sqrt[3]{36}}{2} \Rightarrow v_0=4.\left(\frac{\sqrt[3]{36}}{2}\right)^2=\sqrt[3]{1296}$$

Câu 39: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi h(t) là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. $8400m^3$. **B.** $2200m^3$. **C.** $6000m^3$. **D.** $4200m^3$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $h(t)=\int(3at^2+bt)dt=at^3+\dfrac{bt^2}{2}$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}5^3.a+\dfrac{1}{2}.b.5^2=150\\10^3.a+\dfrac{1}{2}.b.10^2=1100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

Khi đó $h(t)=t^3+t^2$. Vậy thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=8400m^3$.

Câu 40: Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến $0,01$ cm)

A. $2,67$ cm. **B.** $2,66$ cm. **C.** $2,65$ cm. **D.** $2,68$ cm.

Chọn B. • Hàm $h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}\mathrm{d}t=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}+C$

• Lúc $t=0$, bồn không chứa nước. Suy ra $h(0)=0\Rightarrow\frac{12}{5}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{12}{5}$

Vậy, hàm $h(t)=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}-\frac{12}{5}$

• Mức nước trong bồn sau 6 giây là $h(6)\approx 2,66$ cm.

Câu 41: Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x)=\frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con.Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?

A. 10130. **B.** 5130. **C.** 5154. **D.** 10129.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Thực chất đây là một bài toán tìm nguyên hàm. Cho $N'(x)$ và đi tìm $N(x)$.

Ta có $\int\frac{2000}{1+x}\mathrm{d}x=2000.\ln|1+x|+5000$ (Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000).Với $x=12$ thì số lượng vi khuẩn là ≈ 10130 con.

Câu 42: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

A. 251000 con. **B.** 264334 con. **C.** 261000 con. **D.** 274334 con.

Chọn B. • $N(t)=\int\frac{4000}{1+0,5t}\mathrm{d}t=8000.\ln|1+0,5t|+C$

• Lúc đầu có 250000 con, suy ra $N(0)=250000\Rightarrow C=250000$

• Vậy $N(t)=8000.\ln|1+0,5t|+250000\Rightarrow N(10)\approx 264334,0758$.

Câu 43: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t)=\frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

A. 302542 con. **B.** 322542 con. **C.** 312542 con. **D.** 332542 con.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $N(t)=\int N'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{7000}{t+2}\mathrm{d}t=7000\ln|t+2|+C$

Do $N(0)=300000\Rightarrow C=300000-7000\ln 2$

Khi đó $N(10)=7000\ln 12+300000-7000\ln 2=312542$.

Câu 44: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}, t\ge 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

A. 9 **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\int B'(t)\mathrm{d}t=\int \dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$

Mà $B(0)=500 \Leftrightarrow -\dfrac{10000}{3(1+0,3.0)}+C=500 \Leftrightarrow C=\dfrac{11500}{3}$. Do đó: $B(t)=-\dfrac{10000}{3(1+0,3t)}+\dfrac{11500}{3}$

Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi $B(t)<3000 \Leftrightarrow -\dfrac{10000}{3(1+0,3t)}+\dfrac{11500}{3}<3000 \Leftrightarrow t<10$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

Câu 45: Hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Nếu tách hai hạt eletron từ $1pm$ đếm $4pm$ thì công W sinh ra là

A. $W=3,194.10^{-28}\ J$. **B.** $W=1,728.10^{-16}\ J$.

C. $W=1,728.10^{-28}\ J$. **D.** $W=3,194.10^{-16}\ J$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. • Áp dụng công thức $A=\int_a^b \dfrac{kq_1q_2}{x^2}\mathrm{d}x$.

Trong đó: $k=9.10^9$; $a=1\ pm=10^{-12}m$; $b=4\ pm=4.10^{-12}\ m$; $q_1=q_2=1,6.10^{-19}C$

• Suy ra: $A=\int_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} \dfrac{9.10^9.(1,6.10^{-19})^2}{x^2}\mathrm{d}x=2,304.10^{-28}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{10^{-12}}^{4.10^{-12}}=1,728.10^{-16}\ J$.

Câu 46: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian *t*, với $I(t)=0,3-0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05 giây là bao nhiêu?

A. $0,29975\ mC$. **B.** $0,29\ mC$. **C.** $0,01525\ mC$. **D.** $0,01475\ mC$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $q=\int_0^{0,05} I(t)\mathrm{d}t=\int_0^{0,05}(0,3-0,2t)\mathrm{d}t=\left(0,3t-\dfrac{t^2}{10}\right)\Big|_0^{0,05}=0,01475\ mC$.

Câu 47: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\dfrac{\pi}{\omega}$ là

A. $\dfrac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2I_0}{\omega}$. **D.** $\dfrac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$q=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{I_0}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2I_0}{\omega}$$

Câu 48: Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0{,}15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trì lại (chống lại) với một lực $f(x)=800x$. Hãy tìm công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0{,}15(m)$ đến $0{,}18(m)$.

A. $W=36.10^{-2}J$. **B.** $W=72.10^{-2}J$. **C.** $W=36J$. **D.** $W=72J$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 0,15m đến 0,18m là:

$$W=\int_0^{0{,}03} 800x.\mathrm{d}x=400x^2\Big|_0^{0{,}03}=36.10^{-2}J.$$

Chú ý: Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

Câu 49: Một dòng điện xoay chiều i = $I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R. Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T.

A. $\frac{RI_0^2}{2}T$. **B.** $\frac{RI_0^2}{3}T$. **C.** $\frac{RI_0^2}{4}T$. **D.** $\frac{RI_0^2}{5}T$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: Q = $\int_0^T Ri^2dt=\int_0^T RI_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt=RI_0^2\int_0^T\frac{1-cos2\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi\right)}{2}dt$

$$=\frac{RI_0^2}{2}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T=\frac{RI_0^2}{2}T.$$

Câu 50: Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều u = $U_0\sin\frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng diện xoay chiều i = $I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng diện và hiệu điện thế.Hãy Tính công của dòng diện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạnh đó trong thời gian một chu kì.

A. $\frac{U_0I_0}{2}cos\varphi$. **B.** $\frac{U_0I_0}{2}T\sin\varphi$. **C.** $\frac{U_0I_0}{2}Tcos(\varphi+\pi)$. **D.** $\frac{U_0I_0}{2}Tcos\varphi$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $A = \int_0^T uidt = \int_0^T U_0 I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\sin\frac{2\pi}{T}tdt = U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2}\left(cos\varphi - cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt$

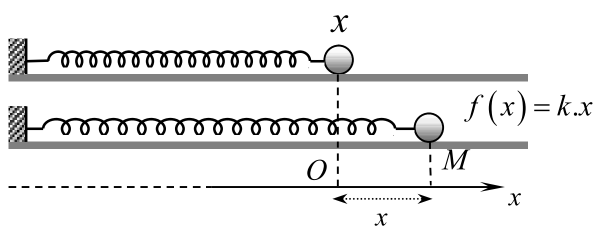
$$= \frac{U_0 I_0}{2}\int_0^T \frac{1}{2}\left(cos\varphi - cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt = \frac{U_0 I_0}{2}\left(tcos\varphi - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T = \frac{U_0 I_0}{2}Tcos\varphi .$$

Câu 51: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

A. $A = 1,56\ (J)$. **B.** $A = 1\ (J)$. **C.** $A = 2,5\ (J)$. **D.** $A = 2\ (J)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\ cm = 0.05\ m$. Điều này có nghĩa $f(0.05) = 40$, do đó: $0,05k = 40 \Leftrightarrow k = \frac{40}{0,05} = 800(N/m)$

Vậy $f(x) = 800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

$$A = \int_{0,05}^{0,08} 800\,dx = 400x^2\Big|_{0,05}^{0,08} = 400\left[(0,08)^2 - (0,05)^2\right] = 1,56(J)$$

Câu 52: Một thanh AB có chiều dài là 2a ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_o$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc α theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

A. $t = -\int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$.

B. $t = -\int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o + \sin\alpha)}}$.

C. $t = -\int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$.

D. $t = -\int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do trượt không ma sát nên cơ năng của thanh được bảo toàn

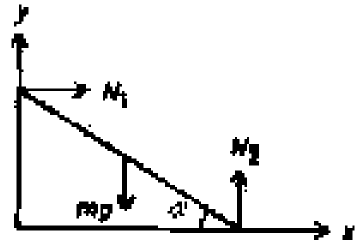
$mga\sin\alpha_o = mga\sin\alpha + K_q + K_{tt}$ (1)

Do khối tâm chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính a nên: $K_{tt} = \frac{ma^2\omega^2}{2} = \frac{1}{2}ma^2\alpha'^2$

Động năng quay quanh khối tâm: $K_q = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2a)^2\alpha'^2 = \frac{1}{6}ma^2\alpha'^2$

Thay vào (1) ta được: $\frac{2}{3}a\alpha'^2 = g(\sin\alpha_o - \sin\alpha)$

$\alpha' = -\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}$ $\qquad t = -\int\limits_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$.



Câu 53: Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I = \int\limits_0^a [p(x) - P].\mathrm{d}x.$$

Với $p(x)$ là hàm biểu thị biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa.

Câu 54: a là số lượng sản phẩm đã bán ra, $P = p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm làa.

Cho $p = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD). Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500.

A. 1108333,3 USD. **B.** 570833,3 USD. **C.** 33333,3 USD. **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Áp dụng công thức trên với $a = 500$; $P = p(a) = p(500) = 1075$.

Suy ra $I = \int\limits_0^{500}\left(1200 - 0,2x - 0,0001x^2 - 1075\right)\mathrm{d}x = \left.\left(125x - \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{30000}\right)\right|_0^{500} \approx 33333,3$ USD

Câu 55: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

A. $s = 6$ (km). **B.** $s = 8$ (km). **C.** $s = \frac{40}{3}$ (km). **D.** $s = \frac{46}{3}$ (km).

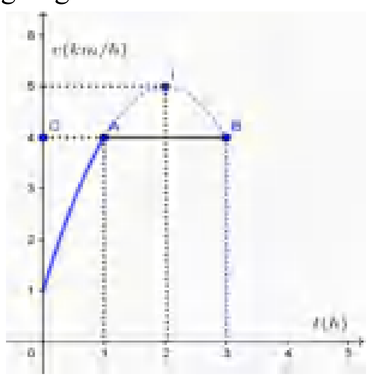
Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn). Từ đó $s=\int_0^4 (t^2-2t+2)dt=\frac{40}{3}(km)$.

Câu 56: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. 15 (km). **B.** $\frac{32}{3}$ (km). **C.** 12 (km). **D.** $\frac{35}{3}$ (km).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Parabol có đỉnh $I(2;5)$ và đi qua điểm $(0;1)$ có phương trình $y=-x^2+4x+1$.

Quãng đường vật đi được trong 1 giờ đầu là: $S_1=\int_0^1(-x^2+4x+1)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{8}{3}$

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ sau là $S_2=2.4=8$

Vậy trong ba giờ vật đi được quãng đường là $S=S_1+S_2=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$ (km).

Câu 57: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

A. $s=24,25$ (km)
B. $s=26,75$ (km)
C. $s=24,75$ (km)
D. $s=25,25$ (km)

Hướng dẫn giải

Chọn C. Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t)=at^2+bt+c\ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c=6 \\ 4a+2b+c=9 \\ \dfrac{-b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=6 \\ b=3 \\ a=\dfrac{-3}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t)=\dfrac{-3}{4}t^2+3t+6$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$s=\int\limits_0^3\left(\dfrac{-3}{4}t^2+3t+6\right)dt=\dfrac{99}{4}\approx 24,75.$

Hướng dẫn giải

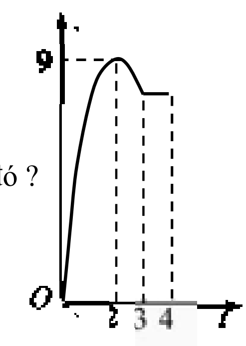
Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t)=at^2+bt+c\ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c=0 \\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c=8 \\ \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=32 \\ a=-32 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-32t^2+32t$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 45 phút là:

$s=\int\limits_0^{3/4}\left(-32t^2+32t\right)dt=\dfrac{9}{2}=4,5$. **Chọn C**

Câu 58: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó ?



A. 26,5 (km)

B. 28,5 (km)

C. 27 (km)

D. 24 (km)

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t)=at^2+bt+c\ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=9 \\ \dfrac{-b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=9 \\ a=\dfrac{-9}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t)=\dfrac{-9}{4}t^2+9t$.

Ta có $v(3)=\dfrac{27}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y=\dfrac{27}{4}$. Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$s=\int\limits_0^3\left(\dfrac{-9}{4}t^2+9t\right)dt+\int\limits_3^4\dfrac{27}{4}dt=27.$ **Chọn C**

Câu 59: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $s = 23,25$ (km) **B.** $s = 21,58$ (km)
C. $s = 15,50$ (km) **D.** $s = 13,83$ (km)

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c \ (km/h)$.

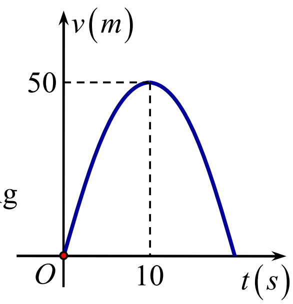
Ta có: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 5 \\ a = \dfrac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-5}{4}t^2 + 5t + 4$.

Ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$s = \displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{-5}{4}t^2 + 5t + 4\right)dt + \int_1^3 \dfrac{31}{4}dt = \dfrac{259}{12} \approx 21,58.$ **Chọn B**

Câu 60: Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc.

Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. 300 m. **B.** $\dfrac{1400}{3}$ m.
C. $\dfrac{1100}{3}$ m. **D.** $\dfrac{1000}{3}$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Giả sử vận tốc của vật biểu diễn bởi hàm số $(P): v(t) = at^2 + bt + c \ \ (a \neq 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có (P) đi qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(10;50)$.

$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 50 \\ -\dfrac{b}{2a} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow (P): v(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t$. Lúc bắt đầu: $t = 0$ s;

lúc đạt vận tốc cao nhất: $t = 10$ s.

Vậy quãng đường vận đó đi được kể từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$s=\int\limits_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{10}\left(-\frac{1}{2}t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\frac{1000}{3}$.

Câu 61: Đám vi khuẩn ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x)=\frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

A. 10130. **B.** 5130. **C.** 5154. **D.** 10132.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int N'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2000}{1+x}\,\mathrm{d}x=2000\ln|1+x|+C\Rightarrow N(x)=2000\ln|1+x|+C$.

Khi $x=0 \Rightarrow N(0)=2000\ln|1+0|+C=5000\Rightarrow C=5000$.

Khi $x=12 \Rightarrow N(12)=2000\ln|1+12|+5000=1030$.

Câu 62: . Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t)=\frac{10000}{1+2t}$ với $\forall t>0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là

A. 17094. **B.** 9047. **C.** 8047. **D.** 32118.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $F(t)=\int F'(t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{10000}{1+2t}\mathrm{d}t=5000\ln(1+2t)+C$.

Ban đầu có 1000 con vi khuẩn $\Rightarrow F(0)=C=1000\Rightarrow F(t)=5000\ln(1+2t)+1000$.

Suy ra số vi khuẩn sau 2 giờ là $F(2)=5000\ln 5+1000\simeq 9047$.

Câu 63: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch dao động LC lí tưởng có phương trình $i=I_0\sin\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)$. Ngoài ra $i=q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2w}$ là

A. $\frac{\pi I_0}{w\sqrt{2}}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{w}$. **D.** $\frac{I_0}{w}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2w}$

là: $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2w}} I_0\sin\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)dt=-\frac{I_0}{w}\cos\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2w}}$

$$=-\frac{I_0}{w}\left[\cos\left(w.\frac{\pi}{2w}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(w.0+\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{I_0}{w}\left[\cos(\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{I_0}{w}.$$

ĐỀ KIỂM TRA 168 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Cho $\int f(x)dx = e^x \cos x + C$, C là hằng số. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $e^x(\cos x - \sin x)$ B. $e^x(\cos x + \sin x)$ C. $e^x - \sin x$ D. $-e^x.\sin x$

Câu 2. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{x}$ là

A. $\dfrac{\ln^3 x}{x}$ B. $\dfrac{3\ln^2 x}{x^2}$ C. $\dfrac{\ln^2 x}{2}$ D. $\dfrac{\ln^4 x}{4}$

Câu 3. $F(x) = (ax^2 + c)\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(2\ln x + 1)$. Khi đó

A. $a = 2, c = 0$ B. $a = -1, c = 2$ C. $a = 1, c = 0$ D. $a = 4, c = 2$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ là

A. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ C. $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + C$ D. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

Câu 5. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$, là

A. $\ln|\sin x| + x.\cot x$ B. $\cot x$ C. $\ln|\sin x| - x.\cot x$ D. $-\cot x$

Câu 6. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ là

A. $2\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x}$ B. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$ C. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right)$ D. $3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)^5$ là

A. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6$ B. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + C$ C. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + C$ D. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + 1$

Câu 8. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sin x\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Khi đó F(0) bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\left(2x^2+1\right)^{10}$ là

A. $\dfrac{1}{44}\left(2x^2+1\right)^{11}$ B. $\dfrac{1}{44}\left(2x^2+1\right)^{11} + C$ C. $\dfrac{5}{2}\left(2x^2+1\right)^9 + C$ D. $\dfrac{5}{2}\left(2x^2+1\right)^9$

Câu 10. Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbf{R}$. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Ta nói $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu như:

A. $F(x) = f'(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý B. $F(x) = f'(x)$

C. $F'(x) = f(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý D. $F'(x) = f(x)$

Câu 11. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**

A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, với mọi hàm f(x), g(x) liên tục trên **R**.

B. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, với mọi hàm f(x), g(x) liên tục trên **R**.

C. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm f(x) liên tục trên **R**.

D. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm f(x) có đạo hàm trên **R**.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua $M\left(\frac{\pi}{3};0\right)$ thì F(x) là

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}-\cot x$ B. $\sqrt{3}-\cot x$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\cot x$ D. $-\cot x+C$

Câu 13. Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x+1}$

A. $F(x)=\frac{1}{3}\sin x\sqrt{\sin x+1}+C$ **B.** $F(x)=\frac{1}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}+C$

C. $F(x)=\frac{2}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}+C$ **D.** $F(x)=\frac{1-2\sin x-3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x+1}}$

Câu 14. Tính $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx.$

A. $\ln x.\ln(\ln x)+C.$ **B.** $\ln x.\ln(\ln x)+\ln x+C.$

C. $\ln x.\ln(\ln x)-\ln x+C.$ **D.** $\ln(\ln x)+\ln x+C.$

Câu 15. Giả sử rằng $\int(x-2)\sin 3x dx=-\frac{(x-m)\cos 3x}{n}+\frac{1}{p}\sin 3x+C$. Tính giá trị của $m+n+p$.

A. 14 **B.** 10 **C.** 9 **D.** –2

Câu 16. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x(x^2+1)^4$ thỏa mãn $F(0)=\frac{6}{5}$ là:

A. $\frac{(x^2+1)^4.2x+(x^2+1)^3}{2}+\frac{7}{10}.$ **B.** $\frac{(x^2+1)^5}{5}+1.$

C. $x(x^2+1)^5+\frac{x}{5}+\frac{6}{5}.$ **D.** Đáp án khác.

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{3x+1}+(3x+1)^5$ là

A. $\frac{e^{3x+1}}{3}+\frac{1}{18}(3x+1)^6$ B. $3e^{3x+1}+\frac{1}{2}(3x+1)^6$ C. $e^{3x+1}+\frac{(3x+1)^6}{6}$ D. $\frac{e^{3x+1}}{3}+\frac{1}{6}(3x+1)^6$

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là

A. $2\sin\sqrt{x}+C$ B. $-2\sin\sqrt{x}+C$ C. $2\cos\sqrt{x}+C$ D. $-2\cos\sqrt{x}+C$

Câu 19. Hàm số $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên miền nào dưới đây

A. $(0\,;\pi)$ B. $(\pi\,;2\pi)$ C. $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ D. $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Câu 20. Cho $\int f(x)dx=\ln x-x^2+C$ (C là hằng số). Khi đó $f(x)$ bằng

A. $-\frac{x^3}{3}+x\ln x-x$ B. $e^x+\frac{1}{3}x^3$ C. $-2x+\frac{1}{x}$ D. $2x+\frac{1}{x^2}$.

ĐỀ KIỂM TRA 279 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và $F(0)=-2$. Tính $F(2)$?

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=3x^2+\cos x$. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của $f(x)$

A. $\dfrac{x^3}{3}+\sin x$ B. $6x-\sin x$ C. $x^3-\sin x$ D. $x^3+\sin x$

Câu 3. Cho $\int f(x)dx=\ln\left(x^2+1\right)+C$, C là hằng số. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $\dfrac{2x}{x^2+1}$ B. $\dfrac{1}{x^2+1}$ C. $\ln\left(x^2+1\right)$ D. $\dfrac{x}{x^2+1}$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$ là

A. $\ln(3x^2+1)+C$ B. $\ln|x^3+x|+C$ C. $\dfrac{6x}{3x^2+1}+C$ D. $\dfrac{-2}{(x^3+x)^2}+C$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ là

A. $e^{\sin^2 x}+C$ B. $e^{\cos^2 x}+C$ C. $e^{\sin 2x}+C$ D. $e^{\cos 2x}+C$

Câu 6. Giá trị m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ là:

A. $m=3$ B. $m=0$ C. $m=1$ D. $m=2$

Câu 7. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\sqrt[3]{x^2+9}$ là

A. $\dfrac{-3\sqrt[3]{x^2+9}}{2}$ B. $\dfrac{3\left(x^2+9\right)\sqrt[3]{x^2+9}}{8}$ C. $\sqrt[3]{x^2+9}$ D. $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$

Câu 8. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ với $x\neq 0$, là

A. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{|x|}$ B. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ C. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$ D. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$

Câu 9. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\sqrt{2x}$, là

A. $x\ln 2-\dfrac{1}{2x}$ B. $x\ln 2+x$ C. $x\ln 2+\dfrac{1}{x}$ D. $\dfrac{x\ln 2x-x}{2}$

Câu 10. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{\cos x}{f(x)}$. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $\cos^2 x+C$ B. $\sin 2x+C$ C. $\sqrt{2\sin x}+C$ D. $\sqrt{2\sin x+C}$

Câu 11. Tìm $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx$

A. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$ B. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$

C. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$ D. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$

Câu 12. Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3x dx=e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+c$, trong đó a, b, c là các hằng số, khi đó tổng a + b có giá trị là

A. $-\frac{1}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{13}$

Câu 13. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1;\ f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1},\forall x>0$. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề dưới đây

A. $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x)>3$ **B.** $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x)<1$ **C.** $2<\max\limits_{x\in[2;4]} f(x)>3$ **D.** $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x)=\frac{3}{2}$

Câu 14. Thời gian và vận tốc của một vật khi nó đang trược xuống mặt phẳng nghiêng được xác định bởi công thức $\int\frac{2}{20-3v}dv$ (giây). Chọn gốc thời gian là lúc vật bắt đầu chuyển động. Hãy tìm phương trình vận tốc.

A. $\frac{20}{3}-\frac{20}{3}e^{-\frac{3t}{2}}$

B. $\frac{20}{3}+\frac{20}{3}e^{-\frac{3t}{2}}$

C. $\frac{20}{3}-\frac{20}{3}e^{-\frac{3t}{2}}$ hoặc $\frac{20}{3}+\frac{20}{3}e^{-\frac{3t}{2}}$

D. $4+4e^{-\frac{3t}{2}}$

Câu 15. Họ nguyên hàm của $f(x)=x^2-\frac{1}{x(x+1)}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

B. $\frac{x^3}{3}-\ln|x(x+1)|+C$

C. $\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

D. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $g(t)=\cos t.f(\sin t)$, với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\{0\}$ là

A. $F(t)=-\tan t+C.$ **B.** $F(t)=-\cot t+C.$ **C.** $F(t)=\tan t+C.$ **D.** $F(t)=\cot t+C.$

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$, là

A. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ B. $\frac{e^x\cos x}{1+\cos x}$ C. $\frac{e^x}{(1+\cos x)^2}$ D. $\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, là

A. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$ B. $x+\sqrt{1+x^2}$ C. $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ D. $x-\sqrt{1+x^2}$

Câu 19. Hàm số $F(x)=\tan^3 2x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $3\tan^2 2x$ B. $\frac{6\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$ C. $6\tan 2x$ D. $\frac{3\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$

Câu 20. $F(x)=\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $2\cos x$ B. $-2\cos x$ C. $\sin 2x$ D. $-\sin 2x$.

ĐỀ KIỂM TRA 368 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+2}$ là

A. $\dfrac{\ln(e^x+2)}{e}$ B. $\ln(e^x+2)$ C. $\dfrac{\ln(e^x+2)}{e^x}$ D. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}\right)$

Câu 2. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)^3}$ và $F(0)=1$. Khi đó $F(x)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{2x+1}$ B. $\dfrac{1}{3(2x+1)}-\dfrac{1}{2x+1}$ C. $\dfrac{1}{4(2x+1)}-\dfrac{1}{8(2x+1)^2}+\dfrac{7}{8}$ D. $\dfrac{-1}{4(2x+1)}+\dfrac{1}{8(2x+1)^2}+\dfrac{9}{8}$

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$, là

A. $\ln\left|\sqrt{x^2-9}-x\right|+C$ B. $\ln\left|\sqrt{x^2-9}+x\right|+C$ C. $2\sqrt{x^2-9}+C$ D. $\sqrt{x^2-9}+C$

Câu 4. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x-x^2+C$ (C là hằng số). Khi đó $f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{x^3}{3}+x\ln x-x$ B. $e^x+\dfrac{1}{3}x^3$ C. $-2x+\dfrac{1}{x}$ D. $2x+\dfrac{1}{x^2}$

Câu 5. Hàm số $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+a})+C$, $(a>0,\ C\in\mathbf{R})$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ B. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}$ C. $x+\sqrt{x^2+a}$ D. $\sqrt{x^2+a}$

Câu 6. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(\ln x)$, là

A. $\dfrac{e^{\ln x}.\cos(\ln x)}{x}$ B. $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ C. $\dfrac{x\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]}{2}$ D. $\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$. Nguyên hàm của hàm số đó là

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+C$ B. $\dfrac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}+C$ C. $\dfrac{3\sqrt{(x+1)^3}}{2}+C$ D. $\sqrt{(x+1)^3}+C$

Câu 8. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^5 x$, là

A. $\sin x.\cos^4 x+4\left(\dfrac{\sin^3 x}{3}-\dfrac{\sin^5 x}{5}\right)$ B. $-5\cos^4 x.\sin x$ C. $\dfrac{\cos^4 x}{4}$ D. $\dfrac{\cos^6 x}{5}$

Câu 9. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, là

A. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}$ B. $\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}$ C. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}$ D. $e^{\sqrt{x}}$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, là

A. $\ln\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+C$ B. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C$ C. $\ln\sqrt{x^2+3}+C$ D. $\sqrt{x^2+3}+C$

Câu 11. Biết $F(x)=(ax+b).e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y=(2x+3).e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 12. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ bằng:

A. $-(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

B. $(x^2+1)\sqrt{1-x^2}+C$

C. $-(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+C$

D. $(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng:

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$

A. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$

B. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

C. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$

D. $F(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4\cos^2 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ biết $F(0)=1$:

A. $-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x+1$. **C.** $-\cos^3 x+2$. **D.** Đáp án khác.

Câu 16. Nguyên hàm của hàm $y=\frac{2e^{\tan x}}{1+\cos 2x}$ là

A. $e^{\tan x}+C$ **B.** $e^{\cos x}+C$ **C.** $\ln|\tan x|+C$ **D.** $e^{\sin x}+C$

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^{5x-1}}$ là

A. $e^{5x-1}+C$ B. $\frac{1}{e^{5x-1}}+C$ C. $\frac{-5}{e^{5x-1}}+C$ D. $\frac{-1}{5e^{5x-1}}+C$

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cot^2 x$ là

A. $\frac{1}{\sin^2 x}+C$ B. $\frac{-2\cot x}{\sin^2 x}+C$ C. $-x-\cot x+C$ D. $-x+\cot x+C$

Câu 19. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, là

A. $\frac{x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}$ B. $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ D. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\ln^2 x$, là

A. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$ B. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\frac{1}{4}\right)+C$ C. $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+C$ D. $\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

ĐỀ KIỂM TRA 569 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^{5x-1}}$ là

A. $e^{5x-1}+C$ B. $\dfrac{1}{e^{5x-1}}+C$ C. $\dfrac{-5}{e^{5x-1}}+C$ D. $\dfrac{-1}{5e^{5x-1}}+C$

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cot^2 x$ là

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x}+C$ B. $\dfrac{-2\cot x}{\sin^2 x}+C$ C. $-x-\cot x+C$ D. $-x+\cot x+C$

Câu 3. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, là

A. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ C. $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ D. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\ln^2 x$, là

A. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\dfrac{1}{2}\right)+C$ B. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\dfrac{1}{4}\right)+C$ C. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{4}\right)+C$ D. $\dfrac{\ln^3 x}{3}+C$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2^x\left(x\ln 2-1\right)}{x^2}$ là

A. $2^x\left(x-1\right)+C$ B. $\dfrac{2^x}{x}+C$ C. $\dfrac{2^x\ln 2+1}{x^2}+C$ D. $\dfrac{2^x\ln 2}{x^2}+C$

Câu 6. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $y=xe^{x^2}$.

A. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+2$ B. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{x^2}+5\right)$ C. $F\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$ D. $F\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}\left(2-e^{x^2}\right)$

Câu 7. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$, là

A. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ B. $\dfrac{e^x\cos x}{1+\cos x}$ C. $\dfrac{e^x}{(1+\cos x)^2}$ D. $\dfrac{e^x\sin x}{1+\cos x}$

Câu 8. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, là

A. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$ B. $x+\sqrt{1+x^2}$ C. $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ D. $x-\sqrt{1+x^2}$

Câu 9. Hàm số $F(x)=\tan^3 2x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $3\tan^2 2x$ B. $\dfrac{6\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$ C. $6\tan 2x$ D. $\dfrac{3\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$

Câu 10. $F(x)=\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $2\cos x$ B. $-2\cos x$ C. $\sin 2x$ D. $-\sin 2x$

Câu 11. Biết hàm số $F\left(x\right)=ax^3+\left(a+b\right)x^2+\left(2a-b+c\right)x+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3x^2+6x+2$. Tổng $a+b+c$ là:

A. 5. B. 4. C. 3. D. 2

Câu 12. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 13. Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=ax+\frac{b}{x^2}\left(x\neq 0\right)$,biết rằng $F\left(-1\right)=1$, $F\left(1\right)=4$, $f\left(1\right)=0$.

A. $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$.

B. $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{7}{4}$.

C. $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4x}-\frac{7}{4}$.

D. $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}$

Câu 14. Cho hàm số $f\left(x\right)$ biết $f\left(0\right)=1$ và $f'\left(x\right)=\frac{4x^2+4x+3}{2x+1}$. Biết nguyên hàm của $f\left(x\right)$ có dạng $F\left(x\right)=ax^2+bx+\ln\left|2x+1\right|+c$. Tính tỉ lệ $a:b:c$.

A. $a:b:c=1:2:1$. **B.** $a:b:c=1:1:1$. **C.** $a:b:c=2:2:1$. **D.** $a:b:c=1:2:2$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $y=\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$ có dạng $a\ln\left|x-1\right|+b\ln\left|x-2\right|+C$. Giá trị của $a+2b$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)=\cos^3 x$

A. $\int f\left(x\right)dx=\frac{\cos^4 x}{x}+C$

B. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right)+C$

C. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{12}\sin 3x-\frac{3}{4}\sin x+C$

D. $\int f\left(x\right)dx=\frac{\cos^4 x.\sin x}{4}+C$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f\left(x\right)=\sqrt{x}\ln x$

A. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x-2\right)+C$

B. $\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x-2\right)+C$

C. $\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x-1\right)+C$

D. $\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x-2\right)+C$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$, là

A. $\ln\left|\sin x\right|+x.\cot x$ B. $\cot x$ C. $\ln\left|\sin x\right|-x.\cot x$ D. $-\cot x$

Câu 19. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ là

A. $2\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}$ B. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}$ C. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)$ D. $3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}$

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x+1\right)^5$ là

A. $\frac{1}{12}\left(2x+1\right)^6$ B. $\frac{1}{12}\left(2x+1\right)^6+C$ C. $\frac{1}{6}\left(2x+1\right)^6+C$ D. $\frac{1}{6}\left(2x+1\right)^6+1$.

ĐỀ KIỂM TRA 639 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$ là

A. $\dfrac{e^x(\cos x - \sin x)}{2}$ B. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ C. $e^x \cos x$ D. $\dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^5 x}$ là

A. $\dfrac{1}{4\cos^4 x} + C$ B. $\dfrac{1}{6\cos^6 x} + C$ C. $\ln\left|\cos^5 x\right| + C$ D. $\dfrac{-1}{4\cos^4 x} + C$

Câu 3. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin 2x$, là

A. $\dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{x\cos 2x}{2}$ B. $\dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{x\cos 2x}{2}$ C. $\dfrac{\cos 2x}{4} - \dfrac{x\sin 2x}{2}$ D. $1 + 2\cos 2x$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x.\sin x}$, với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, là

A. $\ln|\cot x| + C$ B. $\sin x + C$ C. $\cos 2x + C$ D. $\ln|\tan x| + C$

Câu 5. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sin x\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Khi đó F(0) bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ B. $\dfrac{1}{2}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ C. $\dfrac{1}{2}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ D. $\dfrac{1}{2}\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + C$

Câu 7. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1} + (3x+1)^5$ là

A. $\dfrac{e^{3x+1}}{3} + \dfrac{1}{18}(3x+1)^6$ B. $3e^{3x+1} + \dfrac{1}{2}(3x+1)^6$ C. $e^{3x+1} + \dfrac{(3x+1)^6}{6}$ D. $\dfrac{e^{3x+1}}{3} + \dfrac{1}{6}(3x+1)^6$

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là

A. $2\sin\sqrt{x} + C$ B. $-2\sin\sqrt{x} + C$ C. $2\cos\sqrt{x} + C$ D. $-2\cos\sqrt{x} + C$

Câu 9. Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên miền nào dưới đây

A. $(0 ; \pi)$ B. $(\pi ; 2\pi)$ C. $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ D. $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Câu 10. Cho $\int f(x)dx = \ln x - x^2 + C$ (C là hằng số). Khi đó $f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{x^3}{3} + x\ln x - x$ B. $e^x + \dfrac{1}{3}x^3$ C. $-2x + \dfrac{1}{x}$ D. $2x + \dfrac{1}{x^2}$

Câu 11. Tìm nguyên hàm $I = \int \dfrac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$

A. $I = \ln\left(x^2+1\right) + C$ B. $I = \dfrac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right) + C$

C. $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$ D. $I = \ln^2\left(x^2+1\right) + C$

Câu 12. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-\dfrac{1}{x^2}+3x$ và thỏa mãn $5F(1)+F(2)=43$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=\dfrac{151}{4}$. **B.** $F(2)=23$. **C.** $F(2)=\dfrac{45}{2}$. **D.** $F(2)=\dfrac{86}{7}$.

Câu 13. Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C.$ **B.** $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C.$ **D.** $\int f'(x)\ln x dx=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C.$

Câu 14. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$?

A. $y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$. **B.** $y=\tan x-\cot x.$ **C.** $y=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$. **D.** $y=\tan x+\cot x.$

Câu 15. Cho $F(x)=\dfrac{a}{x}(\ln x+b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-2.$ **B.** $S=1.$ **C.** $S=2.$ **D.** $S=0.$

Câu 16. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. 10 m/s. **B.** 11 m/s. **C.** 12 m/s. **D.** 13 m/s.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có một nguyên hàm là đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x$?

A. $y=\sin 2x.$ **B.** $y=\cos 2x.$ **C.** $y=-4\sin 2x.$ **D.** $y=4\cos 2x.$

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.e^{2x}$ là

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$ **B.** $F(x)=2e^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$

C. $F(x)=2e^{2x}(x-2)+C$ **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Câu 19. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, là

A. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}$ B. $\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}$ C. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}$ D. $e^{\sqrt{x}}$

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, là

A. $\ln\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+C$ B. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C$ C. $\ln\sqrt{x^2+3}+C$ D. $\sqrt{x^2+3}+C$.

ĐỀ KIỂM TRA 789 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Cho tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_2^3\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$. Ta có

A. $\mathrm{I}=\left(x^2+x+1\right)\Big|_2^3$

B. $\mathrm{I}=\left(2x+1\right)\Big|_2^3$

C. $\mathrm{I}=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_2^3$

D. $\mathrm{I}=\left(x^3+x^2+x\right)\Big|_2^3$

Câu 2. Cho tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_1^{\mathrm{e}}(x\ln x)^2\mathrm{d}x$ và $\mathrm{J}=\int\limits_1^{\mathrm{e}}x^2\ln x\mathrm{d}x$. Ta có

A. $3\mathrm{I}+\mathrm{J}=\mathrm{e}^3$

B. $2\mathrm{I}+3\mathrm{J}=\mathrm{e}^3$

C. $\mathrm{I}+3\mathrm{J}=\mathrm{e}^3$

D. $3\mathrm{I}+2\mathrm{J}=\mathrm{e}^3$

Câu 3. Cho $\int\limits_0^5 f(t)dt=3$, $\int\limits_0^7 f(u)du=10$.

Tính $\int\limits_5^7 f(x)dx$

A. 3 B. 13 C. 7 D. 10

Câu 4. Biết $\int\limits_0^1\dfrac{x}{2x^2-3x-2}dx=a\ln 2+b\ln 3$, trị của $(b-a)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{5}$ C. $-\dfrac{1}{5}$ D. $\dfrac{3}{5}$

Câu 5. Đổi biến $t=\ln x$ thì tích phân $\int\limits_1^e\dfrac{1-\ln x}{x}dx$ thành

A. $\int\limits_0^1(1-t)dt$

B. $\int\limits_0^1(1-t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$

C. $\int\limits_1^0(1-t)\mathrm{e}^{t}\,dt$

D. $\int\limits_0^1(t-1)dt$

Câu 6. Gọi F là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{e^x}{x}$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$. Đặt $I=\int\limits_1^2\dfrac{e^{3x}}{x}dx$, khi đó ta có

A. $I=\dfrac{F(6)-F(3)}{3}$

B. $I=F(6)-F(3)$

C. $I=3\left[F(6)-F(3)\right]$

D. $I=\dfrac{F(6)-F(3)}{2}$

Câu 7. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ là hình chữ nhật có hai kích thước là x và $\sqrt{9-x^2}$

A. 3 B. 9 C. 18 D. 36

Câu 8. Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{4}{x}$ và $y=-x+5$ là

A. 33π B. 12π C. 10π D. 9π

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3$ có đồ thị (C). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là

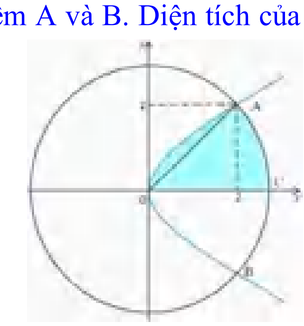
A. $\int\limits_0^1\left(\dfrac{y+2}{3}-\sqrt[3]{y}\right)dy$

B. $\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{y}-\dfrac{y+2}{3}\right)dy$

C. $\int\limits_{-2}^1\left[x^3-(3x-2)\right]dx$

D. $\int\limits_{-2}^1(3x-2-x^3)dx$

Câu 10. Parabol (P): $y^2=2x$ cắt đường tròn (C): $x^2+y^2=8$ tại hai điểm A và B. Diện tích của hình phẳng tô đậm màu ở hình bên được tính theo công thức nào



A. $\int\limits_0^2(\sqrt{2x}-x)dx+\mathrm{S}_{\text{quạt trònOAB}}$

B. $\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2}\right)dx$

C. $\int\limits_0^2\left(\dfrac{y^2}{2}-\sqrt{8-y^2}\right)dy$

D. $\dfrac{8\pi}{4}-\int\limits_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\sqrt{2x}\right)dx$.

Câu 11. Cho $\int f(x)dx = e^x \cos x + C$, C là hằng số. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $e^x(\cos x - \sin x)$ B. $e^x(\cos x + \sin x)$ C. $e^x - \sin x$ D. $-e^x.\sin x$

Câu 12. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{x}$ là

A. $\dfrac{\ln^3 x}{x}$ B. $\dfrac{3\ln^2 x}{x^2}$ C. $\dfrac{\ln^2 x}{2}$ D. $\dfrac{\ln^4 x}{4}$

Câu 13. $F(x) = (ax^2 + c)\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(2\ln x + 1)$. Khi đó

A. $a = 2, c = 0$ B. $a = -1, c = 2$ C. $a = 1, c = 0$ D. $a = 4, c = 2$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ là

A. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ C. $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + C$ D. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

Câu 15. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$, là

A. $\ln|\sin x| + x.\cot x$ B. $\cot x$ C. $\ln|\sin x| - x.\cot x$ D. $-\cot x$

Câu 16. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ là

A. $2\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x}$ B. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$ C. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right)$ D. $3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)^5$ là

A. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6$ B. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + C$ C. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + C$ D. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + 1$

Câu 18. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sin x\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Khi đó F(0) bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(2x^2+1)^{10}$ là

A. $\dfrac{1}{44}(2x^2+1)^{11}$ B. $\dfrac{1}{44}(2x^2+1)^{11} + C$ C. $\dfrac{5}{2}(2x^2+1)^9 + C$ D. $\dfrac{5}{2}(2x^2+1)^9$

Câu 20. Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbf{R}$. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Ta nói $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu như:

A. $F(x) = f'(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý B. $F(x) = f'(x)$

C. $F'(x) = f(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý D. $F'(x) = f(x)$.

ĐỀ KIỂM TRA 892 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Tích phân $\int\limits_0^{\pi/2}(x-\sin x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2}{8}-1$ B. $\frac{\pi^2}{4}+1$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}-1$

Câu 2. Biết tích phân $\int\limits_2^6 f(x)\,dx=2$, khi đó tích phân $\int\limits_1^3 f(2x)\,dx$ bằng

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

Câu 3. Đặt $I=\int\limits_0^{\pi/2}x\sin x\,dx$ và $J=\int\limits_0^{\pi/2}x^2\cos x\,dx$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần để tính J ta được

A. $J=\frac{\pi^2}{4}-2I$ B. $J=\frac{\pi^2}{4}+2I$

C. $J=2I-\frac{\pi^2}{4}$ D. $J=-\frac{\pi^2}{4}-2I$

Câu 4. Tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2+\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2+\frac{\pi}{6}$

Câu 5. Khi tính tích phân $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{1}{x^2-2x}dx$ bằng phương pháp đổi biến số $x-1=\sin t$, với $\frac{-\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ ta được tích phân nào dưới đây

A. $\int\limits_0^{-\pi/6}\frac{1}{\sin t}dt$ B. $\int\limits_0^{-\pi/6}\frac{1}{\cos t}dt$

C. $\int\limits_{-\pi/6}^{0}\frac{1}{\sin t}dt$ D. $\int\limits_{-\pi/6}^{0}\frac{1}{\cos t}dt$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-4x$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox là

A. $\int\limits_{-1}^{4}f(x)\,dx$ B. $\int\limits_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int\limits_0^4 f(x)\,dx$

C. $\left|\int\limits_{-1}^{4}f(x)\,dx\right|$ D. $\int\limits_{-1}^{0}f(x)\,dx-\int\limits_0^4 f(x)\,dx$

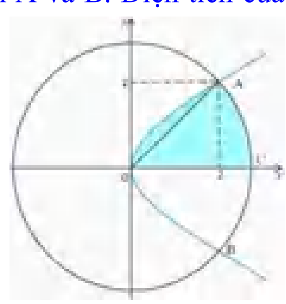
Câu 7. Tìm a để $\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\ln 3$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

Câu 8. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}$ m/s^2. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30m/s. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)

A. 47m B. 48m C. 49m D. 50m

Câu 9. Parabol (P): $y^2=2x$ cắt đường tròn (C): $x^2+y^2=8$ tại hai điểm A và B. Diện tích của hình phẳng tô đậm màu ở hình bên được tính theo công thức nào



A. $\int\limits_0^2(\sqrt{2x}-x)dx$ + $S_{\text{quạt trònOAB}}$

B. $\int\limits_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$

C. $\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2}\right)dx$

D. $\frac{2\pi}{4}-\int\limits_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\sqrt{2x}\right)dx$

Câu 10. Thể tích vật thể tạo thành khi cho hình (H) giới hạn bởi $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$ quay quanh trục Oy là

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{3\pi}{10}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{3}{10}$.

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và $F(0)=-2$. Tính $F(2)$?

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=3x^2+\cos x$. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của $f(x)$

A. $\dfrac{x^3}{3}+\sin x$ B. $6x-\sin x$ C. $x^3-\sin x$ D. $x^3+\sin x$

Câu 13. Cho $\int f(x)dx=\ln\left(x^2+1\right)+C$, C là hằng số. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $\dfrac{2x}{x^2+1}$ B. $\dfrac{1}{x^2+1}$ C. $\ln\left(x^2+1\right)$ D. $\dfrac{x}{x^2+1}$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$ là

A. $\ln(3x^2+1)+C$ B. $\ln|x^3+x|+C$ C. $\dfrac{6x}{3x^2+1}+C$ D. $\dfrac{-2}{(x^3+x)^2}+C$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ là

A. $e^{\sin^2 x}+C$ B. $e^{\cos^2 x}+C$ C. $e^{\sin 2x}+C$ D. $e^{\cos 2x}+C$

Câu 16. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ là:

A. $m=3$ B. $m=0$ C. $m=1$ D. $m=2$

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\sqrt[3]{x^2+9}$ là

A. $\dfrac{-3\sqrt[3]{x^2+9}}{2}$ B. $\dfrac{3\left(x^2+9\right)\sqrt[3]{x^2+9}}{8}$ C. $\sqrt[3]{x^2+9}$ D. $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ với $x\neq 0$, là

A. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{|x|}$ B. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ C. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$ D. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$

Câu 19. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\sqrt{2x}$, là

A. $x\ln 2-\dfrac{1}{2x}$ B. $x\ln 2+x$ C. $x\ln 2+\dfrac{1}{x}$ D. $\dfrac{x\ln 2x-x}{2}$

Câu 20. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{\cos x}{f(x)}$. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $\cos^2 x+C$ B. $\sin 2x+C$ C. $\sqrt{2\sin x}+C$ D. $\sqrt{2\sin x+C}$.

ĐỀ KIỂM TRA 913 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Cho $y = \sqrt{x^4+1}$ tìm $\int_0^2 y'.y.dx$

A. $\sqrt{17}-1$ B. $\frac{17}{2}$ C. $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ D. 8

Câu 3. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $y=x$ và $y=x^2$ bằng giá trị của

A. $\int_0^1 (x-x^2)dx$ B. $\int_0^1 (x^2-x)dx$

C. $\int_0^1 (x+x^2)dx$ D. $\pi\int_0^1 \left|x-x^2\right|dx$

Câu 5. Tích phân $\int_{-1}^1 \frac{x^3-x}{|x|+1}dx$ bằng

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 7. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s. Sau đó viên đạn tiếp tục chuyển động với vận tốc $v(t) = 25 - gt$ ($t \ge 0$, t tính bằng giây, g là gia tốc trọng trường và $g = 9,8\ m/s^2$) cho đến khi rớt lại xuống mặt đất. Hỏi sau bao lâu giây viên đạn đạt đến độ cao lớn nhất ?

A. $\frac{75}{24}$ B. $\frac{100}{39}$ C. $\frac{125}{49}$ D. $\frac{265}{49}$

Câu 2. Tìm $a>0$ để $\int_0^a \frac{x^2+x+1}{2x+1}dx = \frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{3}{4}\ln 3$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4. Đổi biến $x = 2\sin t, \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ thành

A. $\int_0^{\pi/6} dt$ B. $\int_0^{\pi/6} t dt$ C. $\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{t}$ D. $\int_0^{\pi/3} dt$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2-2x-8$ và $y = 2x-3$ là

A. 63 B. 32 C. 23 D. 36

Câu 8. Biểu thức của phép tính tích phân của $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin 2x}$ khi lấy ra khỏi dấu tích phân là

A. $\left.(\cos x-\sin x)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ B. $\left.(\cos x+\sin x)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

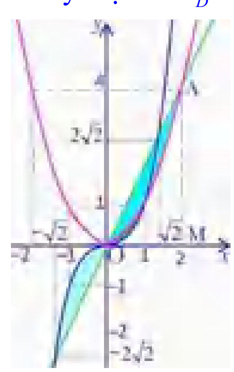
C. $\left.(\cos x+\sin x)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \left.(\cos x+\sin x)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

D. $\left.(\cos x-\sin x)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \left.(\cos x-\sin x)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

Câu 9. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x$ quay xung quanh trục Ox có thể tích là

A. $\frac{\pi}{36}$ B. $\frac{\pi}{30}$ C. $\frac{2\pi}{15}$ D. $\frac{\pi}{6}$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x$, $y = x^2$, $y = x^3$ ký hiệu là S_D. Khẳng định nào dưới đây **sai**



A. $S_D = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)dx + \int_0^1 (x^2-x^3)dx + \int_0^2 (2x-x^2)dx$

B. $S_D = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2x-x^3)dx + \int_1^{\sqrt{2}} (x^3-x^2)dx + \int_1^2 (2x-x^2)dx$

C. $S_D = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)dx + \int_0^1 (2x-x^3)dx + \int_1^2 (2x-x^2)dx$

D. $S_D = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)dx + S_{\Delta OAM} - \left(\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2 dx\right)$ (với $S_{\Delta OAM}$ là diện tích tam giác OAM).

Câu 11. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+2}$ là

A. $\dfrac{\ln(e^x+2)}{e}$ B. $\ln(e^x+2)$ C. $\dfrac{\ln(e^x+2)}{e^x}$ D. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}\right)$

Câu 12. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)^3}$ và $F(0)=1$. Khi đó $F(x)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{2x+1}$ B. $\dfrac{1}{3(2x+1)}-\dfrac{1}{2x+1}$ C. $\dfrac{1}{4(2x+1)}-\dfrac{1}{8(2x+1)^2}+\dfrac{7}{8}$ D. $\dfrac{-1}{4(2x+1)}+\dfrac{1}{8(2x+1)^2}+\dfrac{9}{8}$

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$, là

A. $\ln\left|\sqrt{x^2-9}-x\right|+C$ B. $\ln\left|\sqrt{x^2-9}+x\right|+C$ C. $2\sqrt{x^2-9}+C$ D. $\sqrt{x^2-9}+C$

Câu 14. Cho $\int f(x)dx=\ln x-x^2+C$ (C là hằng số). Khi đó $f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{x^3}{3}+x\ln x-x$ B. $e^x+\dfrac{1}{3}x^3$ C. $-2x+\dfrac{1}{x}$ D. $2x+\dfrac{1}{x^2}$

Câu 15. Hàm số $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+a})+C$, $(a>0,\ C\in\mathbf{R})$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ B. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}$ C. $x+\sqrt{x^2+a}$ D. $\sqrt{x^2+a}$

Câu 16. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(\ln x)$, là

A. $\dfrac{e^{\ln x}.\cos(\ln x)}{x}$ B. $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ C. $\dfrac{x\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]}{2}$ D. $\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$. Nguyên hàm của hàm số đó là

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+C$ B. $\dfrac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}+C$ C. $\dfrac{3\sqrt{(x+1)^3}}{2}+C$ D. $\sqrt{(x+1)^3}+C$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^5 x$, là

A. $\sin x.\cos^4 x+4\left(\dfrac{\sin^3 x}{3}-\dfrac{\sin^5 x}{5}\right)$ B. $-5\cos^4 x.\sin x$ C. $\dfrac{\cos^4 x}{4}$ D. $\dfrac{\cos^6 x}{5}$

Câu 19. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, là

A. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}$ B. $\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}$ C. $2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}$ D. $e^{\sqrt{x}}$

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, là

A. $\ln\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+C$ B. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C$ C. $\ln\sqrt{x^2+3}+C$ D. $\sqrt{x^2+3}+C$.

ĐỀ KIỂM TRA 102 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Cho $\int_0^x \left(3t^2+4t-5\right)dt = x^3+2x^2-4x-1$. Khi đó giá trị của x là

A. $x=-1$ B. $x=1$ C. $x=2$ D. $x=3$

Câu 2. Tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-5|x|+6}dx$ bằng

A. 2 B. 1 C. 0 D. −1

Câu 3. Cho $f(x)$ liên tục trên [0 ; 10] thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$ có giá trị bằng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Diện tích hình phẳng (H) bằng

A. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ B. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

C. $\pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ D. $\int_0^{\pi/2} (-\cos x)dx$

Câu 5. Cho a khác 0, kí hiệu $b=\int_{-a}^{a} \frac{e^x}{x+2a}dx$.

Tính $I=\int_0^{2a} \frac{1}{(3a-x).e^x}dx$ theo a và b

A. $I=\frac{b}{e^a}$ B. $I=\frac{b}{a}$ C. $I=ab$ D. $I=b.e^a$

Câu 6. Cho hai tích phân $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}dx$ và $J=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}dx$. Tìm mệnh đề đúng

A. $J=0$ B. $I=0$ C. $I=J$ D. $I\neq J$

Câu 7. (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục *Ox* là

A. $4-2\mathrm{e}$ B. $(4-2\mathrm{e})\pi$

C. $\left(\mathrm{e}^2-5\right)\pi$ D. $\left(\mathrm{e}^2-1\right)\pi$

Câu 8. Biết $\int_{1/e}^{1} \frac{\ln x}{x\left(\ln x+2\right)^2}dx = a\ln 2+b$ với $a, b\in \mathbf{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $2a+b=1$ B. $a^2+b^2=4$

C. $a-b=1$ D. $ab=2$

Câu 9. Thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi hình phẳng (*H*) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2$ và $y=1$ khi quay quanh trục *Ox* là

A. $\pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2\right)^2dx+\pi\int_{-1}^{1}dx$ B. $\pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}dx$

C. $\pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2\right)^2dx$ D. $\pi\left[\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2\right)dx-\int_{-1}^{1}dx\right]^2$

Câu 10. Parabol (P): $y^2 = 2x$ cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ tại hai điểm A và B. Diện tích *S* của hình phẳng tô đậm màu ở hình bên được tính theo công thức nào

A. $\int_0^2 \sqrt{2x}dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}dx$ B. $\int_0^2 (\sqrt{2x}-x)dx + \mathrm{S}_{\text{quạt trònOAB}}$

C. $\int_0^2\left(\frac{y^2}{2}-\sqrt{8-y^2}\right)dy$ D. $\frac{\pi}{4}-\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\sqrt{2x}\right)dx$.

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^{5x-1}}$ là

A. $e^{5x-1}+C$ B. $\dfrac{1}{e^{5x-1}}+C$ C. $\dfrac{-5}{e^{5x-1}}+C$ D. $\dfrac{-1}{5e^{5x-1}}+C$

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cot^2 x$ là

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x}+C$ B. $\dfrac{-2\cot x}{\sin^2 x}+C$ C. $-x-\cot x+C$ D. $-x+\cot x+C$

Câu 13. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, là

A. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ C. $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ D. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\ln^2 x$, là

A. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\dfrac{1}{2}\right)+C$ B. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\dfrac{1}{4}\right)+C$ C. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{4}\right)+C$ D. $\dfrac{\ln^3 x}{3}+C$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}$ là

A. $2^x(x-1)+C$ B. $\dfrac{2^x}{x}+C$ C. $\dfrac{2^x\ln 2+1}{x^2}+C$ D. $\dfrac{2^x\ln 2}{x^2}+C$

Câu 16. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $y=xe^{x^2}$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+2$ B. $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{x^2}+5\right)$ C. $F(x)=-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$ D. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\left(2-e^{x^2}\right)$

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$, là

A. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ B. $\dfrac{e^x\cos x}{1+\cos x}$ C. $\dfrac{e^x}{(1+\cos x)^2}$ D. $\dfrac{e^x\sin x}{1+\cos x}$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, là

A. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$ B. $x+\sqrt{1+x^2}$ C. $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ D. $x-\sqrt{1+x^2}$

Câu 19. Hàm số $F(x)=\tan^3 2x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $3\tan^2 2x$ B. $\dfrac{6\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$ C. $6\tan 2x$ D. $\dfrac{3\tan^2 2x}{\cos^2 2x}$

Câu 20. $F(x)=\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $2\cos x$ B. $-2\cos x$ C. $\sin 2x$ D. $-\sin 2x$.

ĐỀ KIỂM TRA 104 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Tìm số b âm để tích phân $\int_b^0 \left(x^2+x\right)dx$ có giá trị nhỏ nhất

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

Câu 2. Cho $I=\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$. Khi đó

A. $2 \le I \le \sqrt{5}$ B. $-\sqrt{5} \le I \le -2$

C. $I \le 2$ D. $I \ge \sqrt{5}$

Câu 3. Nếu $\int_1^m (2x-3)\mathrm{d}x=6$ thì giá trị của m là

A. -3 B. 6

C. -3 hoặc 6 D. -1 hoặc 4

Câu 4. Tích phân $\int_{-2}^{2} \sqrt{4x^4-8x^2+4}\,dx$ bằng

A. 10 B. 8 C. 4 D. 2

Câu 5. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=2x+1$ và đường cong $y=x^2+x+1$ bằng giá trị của

A. $\int_0^1 (x^2-x)dx$ B. $\int_0^1 (x-x^2)dx$

C. $\int_0^1 (x+x^2)dx$ D. $\pi\int_0^1 \left|x-x^2\right|dx$

Câu 6. Tốc độ thay đổi doanh thu (bằng đô la Mỹ trên một máy tính) cho việc bán x máy tính là $f(x)$, biết $f'(x)=12x^5+3x^2+2x+12$. Tìm doanh thu khi bán được mười hai máy tính đầu tiên

A. 1244234 đô la B. 622117 đô la

C. 5973984 đô la D. 2986992 đô la

Câu 7. Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^3$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$ bằng

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{17}{4}$

Câu 8. Cho tích phân $\mathrm{I}=\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x^4)\mathrm{d}x$. Ta có

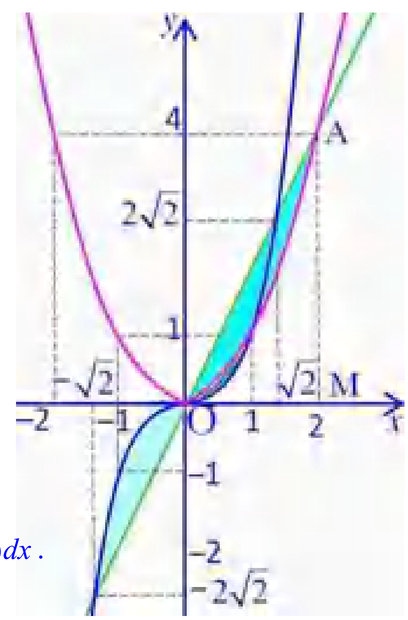
A. $\mathrm{I}=\left(x\ln(x^4)-4x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}$ B. $\mathrm{I}=\frac{4}{x^5}\Big|_1^{\mathrm{e}}$

C. $\mathrm{I}=\left(x\ln(x^4)-x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}$ D. $\mathrm{I}=\left(\ln(x^4)+4x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}$

Câu 9. Cho hai tích phân $I=\int_0^{\pi/2} \frac{5\cos x-4\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$ và $J=\int_0^{\pi/2} \frac{5\sin x-4\cos x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$. Mệnh đề đúng là

A. $I+J=2\pi$ B. $I=1$ C. $I \ne J$ D. $I=J$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=2x$, $y=x^2$, $y=x^3$ ký hiệu là S_D. Khẳng định nào dưới đây **sai**



A. $S_D=\int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3-2x)dx+\int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}-\frac{y}{2}\right)dy+\int_1^4 \left(\sqrt{y}-\frac{y}{2}\right)dy$

B. $S_D=\int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3-2x)dx+S_{\Delta OAM}-\left(\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2dx\right)$

($S_{\Delta OAM}$ là diện tích tam giác OAM)

C. $S_D=\int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3-2x)dx+\int_0^1 (2x-x^3)dx+\int_1^2 (2x-x^3)dx$

D. $S_D=\int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3-2x)dx+\int_0^{\sqrt{2}} (2x-x^3)dx+\int_1^{\sqrt{2}} (x^3-x^2)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2} (2x-x^2)dx$.

Câu 11. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$ là

A. $\dfrac{e^x(\cos x - \sin x)}{2}$ B. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ C. $e^x \cos x$ D. $\dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^5 x}$ là

A. $\dfrac{1}{4\cos^4 x} + C$ B. $\dfrac{1}{6\cos^6 x} + C$ C. $\ln\left|\cos^5 x\right| + C$ D. $\dfrac{-1}{4\cos^4 x} + C$

Câu 13. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin 2x$, là

A. $\dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{x\cos 2x}{2}$ B. $\dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{x\cos 2x}{2}$ C. $\dfrac{\cos 2x}{4} - \dfrac{x\sin 2x}{2}$ D. $1 + 2\cos 2x$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x.\sin x}$, với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, là

A. $\ln|\cot x| + C$ B. $\sin x + C$ C. $\cos 2x + C$ D. $\ln|\tan x| + C$

Câu 15. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sin x\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Khi đó F(0) bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ B. $\dfrac{1}{2}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ C. $\dfrac{1}{2}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + C$ D. $\dfrac{1}{2}\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + C$

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1} + (3x+1)^5$ là

A. $\dfrac{e^{3x+1}}{3} + \dfrac{1}{18}(3x+1)^6$ B. $3e^{3x+1} + \dfrac{1}{2}(3x+1)^6$ C. $e^{3x+1} + \dfrac{(3x+1)^6}{6}$ D. $\dfrac{e^{3x+1}}{3} + \dfrac{1}{6}(3x+1)^6$

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là

A. $2\sin\sqrt{x} + C$ B. $-2\sin\sqrt{x} + C$ C. $2\cos\sqrt{x} + C$ D. $-2\cos\sqrt{x} + C$

Câu 19. Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên miền nào dưới đây

A. $(0\,;\,\pi)$ B. $(\pi\,;\,2\pi)$ C. $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ D. $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Câu 20. Cho $\int f(x)dx = \ln x - x^2 + C$ (C là hằng số). Khi đó $f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{x^3}{3} + x\ln x - x$ B. $e^x + \dfrac{1}{3}x^3$ C. $-2x + \dfrac{1}{x}$ D. $2x + \dfrac{1}{x^2}$.

ĐỀ KIỂM TRA 107 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Tìm $f(9)$, biết $\int_0^{x^2} f(t)dt = x.\cos(\pi x)$

A. $-\frac{1}{9}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 2. Tích phân $\int_0^2 \min(x^2; x)dx$ bằng

A. $\frac{11}{6}$ B. -2 C. $\frac{11}{3}$ D. 0

Câu 3. Đặt $\mathrm{I} = \int_1^e x\ln^2 x dx$ và $\mathrm{J} = \int_1^e x\ln x dx$. Ta có:

A. $\mathrm{I} + \mathrm{J} = e^2$ B. $\mathrm{I} + 2\mathrm{J} = e^2$

C. $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \frac{e^2}{2}$ D. $\mathrm{I} + 2\mathrm{J} = \frac{e^2}{2}$

Câu 4. Cho tích phân $\mathrm{I} = \int_1^e \ln(x^3)dx$. Ta có

A. $\mathrm{I} = \left.\frac{3}{x^4}\right|_1^e$ B. $\mathrm{I} = \left.\left(x\ln(x^3) - x\right)\right|_1^e$

C. $\mathrm{I} = \left.\left(\ln(x^3) + 3x\right)\right|_1^e$ D. $\mathrm{I} = \left.\left(x\ln(x^3) - 3x\right)\right|_1^e$

Câu 5. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. Diện tích (H) được tính theo công thức

A. $\int_0^{\pi} \cos x dx$ B. $\left|\int_0^{\pi} \cos x dx\right|$

C. $\pi\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ D. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$

Câu 6. Một ôtô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

A. 10m B. 7m C. 5m D. 3m

Câu 7 Cho tích phân $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x dx$. Dùng phương pháp tích phân từng phần đặt $u = x^{n+1}$ và $dv = e^x dx$, hệ thức liên hệ giữa I_{n+1} và I_n là

A. $I_{n+1} + I_n = e$ B. $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$

C. $I_{n+1} + nI_n = e$ D. $I_{n+1} - nI_n = e$

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị (C). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $\int_{-8}^{1}\left(\frac{y+2}{3} - \sqrt[3]{y}\right)dy$ B. $\int_{-8}^{1}\left(\sqrt[3]{y} - \frac{y+2}{3}\right)dy$

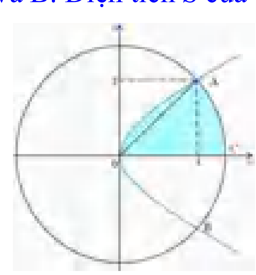
C. $\int_0^1\left[x^3 - (3x-2)\right]dx$ D. $\int_0^1 (3x - 2 - x^3)dx$

Câu 9. Bằng phương pháp tính tích phân từng phần, tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x}dx$ bằng

A. $\left.(x\tan x)\right|_0^1 - \int_0^1 \tan x\, dx$ B. $\left.(x\tan x)\right|_0^1 + \int_0^1 \tan x\, dx$

C. $\left.(x\cot x)\right|_0^1 - \int_0^1 \cot x\, dx$ D. $\left.(x\cot x)\right|_0^1 + \int_0^1 \cot x\, dx$

Câu 10. Parabol (P): $y^2 = 2x$ cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ tại hai điểm A và B. Diện tích *S* của hình phẳng tô đậm màu ở hình bên được tính theo công thức nào



A. $\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x} - \sqrt{8 - x^2}\right)dx$ B. $\int_0^2 (\sqrt{2x} - x)dx + \mathrm{S}_{\text{quạt tròn OAC}}$

C. $\int_0^2\left(\frac{y^2}{2} - \sqrt{8 - y^2}\right)dy$ D. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{4} - \int_0^2\left(\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{2x}\right)dx$.

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{e^{5x-1}}$ là

A. $e^{5x-1} + C$ B. $\dfrac{1}{e^{5x-1}} + C$ C. $\dfrac{-5}{e^{5x-1}} + C$ D. $\dfrac{-1}{5e^{5x-1}} + C$

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot^2 x$ là

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x} + C$ B. $\dfrac{-2\cot x}{\sin^2 x} + C$ C. $-x - \cot x + C$ D. $-x + \cot x + C$

Câu 13. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, là

A. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ C. $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ D. $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.\ln^2 x$, là

A. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \dfrac{1}{2}\right) + C$ B. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \dfrac{1}{4}\right) + C$ C. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{4}\right) + C$ D. $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2^x(x\ln 2 - 1)}{x^2}$ là

A. $2^x(x-1) + C$ B. $\dfrac{2^x}{x} + C$ C. $\dfrac{2^x\ln 2 + 1}{x^2} + C$ D. $\dfrac{2^x\ln 2}{x^2} + C$

Câu 16. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ là

A. $2\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x}$ B. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$ C. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right)$ D. $3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)^5$ là

A. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6$ B. $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + C$ C. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + C$ D. $\dfrac{1}{6}(2x+1)^6 + 1$

Câu 18. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sin x\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Khi đó F(0) bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(2x^2+1)^{10}$ là

A. $\dfrac{1}{44}(2x^2+1)^{11}$ B. $\dfrac{1}{44}(2x^2+1)^{11} + C$ C. $\dfrac{5}{2}(2x^2+1)^9 + C$ D. $\dfrac{5}{2}(2x^2+1)^9$

Câu 20. Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbf{R}$. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Ta nói $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu như:

A. $F(x) = f'(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý B. $F(x) = f'(x)$

C. $F'(x) = f(x) + C$, C là hằng số tuỳ ý D. $F'(x) = f(x)$.

ĐỀ KIỂM TRA 285 *(đề gồm 02 trang)*

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên **R** và các số thực $a<b<c$. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$ B. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

C. $\int_b^c f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$ D. $\int_b^c a.f(x)\,dx = -a.\int_c^b f(x)\,dx$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

A. $2\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$ B. $\sqrt{x}\left(\dfrac{2x}{3}+1\right)+C$ C. $\sqrt{x}\left(\dfrac{3x}{2}+2\right)+C$ D. $2\sqrt{x}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)+C$

Câu 3. Cho tích phân $I=\int_0^1 x(1-x)^{11}dx$. Khẳng định nào dưới đây đúng

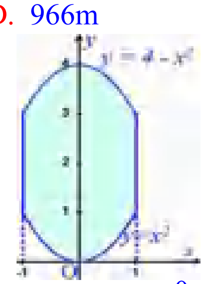
A. $I=-\int_0^1 t^{11}(1-t)dt$ B. $I=\int_0^1 t^{11}(1-t)dt$ C. $I=\int_{-1}^0 t^{11}(1-t)dt$ D. $I=\int_0^1 t^{11}(1-t)dx$

Câu 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$ A. $\sqrt{2}$ B. $2+\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}-2$ D. 1

Câu 5. Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới, biết vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5(\mathrm{m/s})$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 36m B. 252m C. 1134m D. 966m

Câu 6. Sơ đồ ở bên phải phác thảo của một khung cửa sổ. Diện tích của cửa sổ được tính bằng công thức nào sau đây



A. $\int_{-1}^1 x^2\,dx$ B. $\int_{-1}^1 \left(4-2x^2\right)dx$

C. $\int_{-1}^1 \left(4-x^2\right)dx$ D. $\int_{-1}^1 \left(2x^2-4\right)dx$

Câu 7. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ quay một vòng quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{6}$ B. $\dfrac{\pi^2}{4}$ C. $\dfrac{\pi^2}{3}$ D. $\dfrac{\pi^2}{2}$

Câu 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2+m$, với $m\in$ **R**. Tìm m biết rằng $F(0)=1$ và $F(3)=10$ A. $m=3$ B. $m=1$ C. $m=-1$ D. $m=-3$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $y=(5x-1)^5$ có hệ số của x^6 là

A. 3125 B. $\dfrac{15625}{6}$ C. $\dfrac{3125}{30}$ D. $\dfrac{3125}{6}$

Câu 10. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+2$ và $y=|x-2|$ bằng

A. $\dfrac{33}{5}$ B. $\dfrac{73}{11}$ C. $\dfrac{3333}{500}$ D. $\dfrac{20}{3}$

Câu 11. Cho $\int_1^3 \dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = a(\ln 3+1)+\ln b$, với a, b ∈ **R**. Tính giá trị biểu thức $P=4a+2b$

A. 4 B. 7 C. 5 D. 6

Câu 12. Tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi $y = x^2 + 1;\ x = 0$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ tại điểm $A(1;2)$ quanh trục Ox

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{8\pi}{5}$ D. $\frac{8\pi}{15}$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị (C). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $\int_{-8}^{1}\left(\sqrt[3]{y} - \frac{y+2}{3}\right)dy$ B. $\int_{0}^{1}\left[x^3 - (3x-2)\right]dx$ C. $\int_{0}^{1}(3x - 2 - x^3)dx$ D. $\int_{-8}^{1}\left(\frac{y+2}{3} - \sqrt[3]{y}\right)dy$

Câu 14. Khi tính tích phân $\int_{1/2}^{1}\frac{1}{x^2 - 2x}dx$ bằng phương pháp đổi biến số $x - 1 = \sin t$, với $\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ta được tích phân nào dưới đây

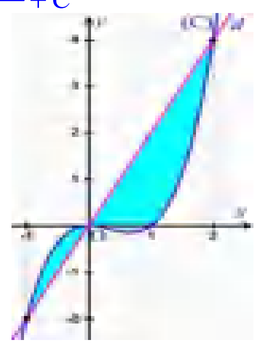
A. $\int_{0}^{-\pi/6}\frac{1}{\sin t}dt$ B. $\int_{0}^{-\pi/6}\frac{1}{\cos t}dt$ C. $\int_{-\pi/6}^{0}\frac{1}{\sin t}dt$ D. $\int_{-\pi/6}^{0}\frac{1}{\cos t}dt$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

A. $\int f(x)dx = \sin x + 2\sqrt{1-x} + C$ B. $\int f(x)dx = \sin x - 2\sqrt{1-x} + C$

C. $\int f(x)dx = \sin x + \frac{\sqrt{1-x}}{2} + C$ D. $\int f(x)dx = \sin x - \frac{\sqrt{1-x}}{2} + C$

Câu 16. Hình phẳng (H) (miền tô đậm trên hình) giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số: $y = x^3 - x^2$ và đường thẳng d: $y = ax + b$ có diện tích là



A. $\frac{117}{38}$ B. $\frac{40}{13}$

C. $\frac{1249}{405}$ D. $\frac{37}{12}$

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = 2 + \cos x$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $I = \int_{0}^{\pi}\frac{du}{u}$ B. $I = -\int_{0}^{\pi}\frac{du}{u}$ C. $I = \int_{1}^{3}\frac{du}{u}$ D. $I = -\int_{1}^{3}\frac{du}{u}$

Câu 18. Cho $\int_{1}^{e}\left(x + \frac{1}{x(1+\ln x)}\right)dx = a + b\ln 2$ với $a,\ b$ là các số hữu tỉ. Tính $S = 2a + b$

A. $S = e^2 + 2e$ B. $S = e^2$ C. $S = e^2 + 1$ D. $S = e^2 - 1$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{0}^{1}(x+1)f(x)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f^2(1) - f^2(0) = 2$. Tính $I = \int_{0}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x$

A. $I = -8$ B. $I = -18$ C. $I = 9$ D. $I = 12$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn $f(x) + f(-x) = \frac{\cos x}{1 + 2^x},\ \forall x \in \mathbf{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\mathrm{d}x$

A. $I = \sqrt{3}$ B. $I = \frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $I = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $I = \frac{1}{4}$.