

NGUYỄN QUỐC HOÀN

0913 661 886

Tuyển chọn và giới thiệu



HÌNH HỌC KHÔNG GIAN LỚP 12

Quyển 1

Dành cho học sinh lớp 12 ôn thi THPT QG



Hà Nội, 9 – 2018

LỜI NÓI ĐẦU

Hình học không gian là môn học khó với rất nhiều học sinh, học sinh phải mất khá nhiều thời gian mới có thể làm được một câu hình, từ đó nhiều học sinh có cảm giác sợ học hình học không gian. Kỳ thi THPT QG lại thi trắc nghiệm môn Toán và có khá nhiều câu hỏi về hình học, nên yêu cầu người học không chỉ học tốt mà còn phải giải nhanh các bài toán. Với mong muốn giúp các em học sinh học tốt hơn môn toán hình học không gian, tôi đã tập hợp các tài liệu hay của hình học không gian từ các nguồn khác nhau vào cuốn sách này. Hi vọng các em học sinh sẽ học tốt hơn hình học không gian, không còn sợ hình học không gian và yêu thích môn toán hơn.

Quyển 1 tập trung vào hai chương đầu môn Toán Hình học 12 và hoàn toàn phù hợp chương trình lớp 12 hiện hành. Tuy nhiên thiếu sót khó tránh khỏi, rất mong nhận được góp ý tích cực của mọi người để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Trân trọng cảm ơn !

Hà Nội, 9 / 2018

Nguyễn Quốc Hoàn

MỤC LỤC

<u>Tên bài học</u>	<u>Trang</u>
Bài 01. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN (26 câu)	1
Bài 02. KHỐI ĐA DIỆN LÒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU (18 câu)	10
Bài 03. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (vấn đề 1: câu 1 đến câu 50)	15
Bài 03. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (vấn đề 2: câu 51 đến câu 65)	32
Bài 03. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (vấn đề 3: câu 66 đến câu 80)	35
Bài 03. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (vấn đề 4: câu 81 đến câu 112)	40
Bài 04. HÌNH NÓN - KHỐI NÓN (16 câu)	51
Bài 05. HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ (18 câu)	58
Bài 06. MẶT CẦU – KHỐI CẦU (30 câu)	65
Bài 07. QUAN HỆ NỘI – NGOẠI TIẾP CÁC KHỐI TRÒN XOAY (14 câu)	77
Bài 08. BÀI TẬP THỰC TẾ (81 câu)	81
Bài 09. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN ÔN LUYỆN THI THPT QG 2019 (430 câu)	118
Bài 10. MỘT SỐ CÂU HỎI MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO (73 câu)	275

KHỐI ĐA DIỆN

Bài 01. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

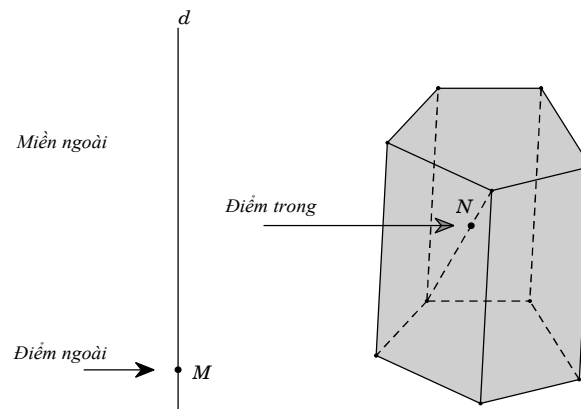
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

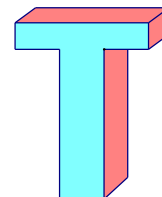
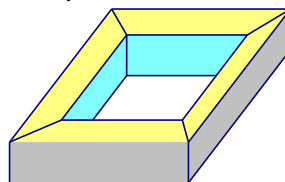
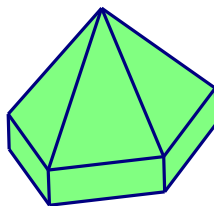
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

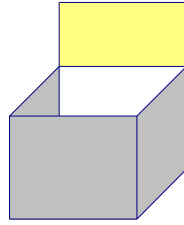


Ví dụ

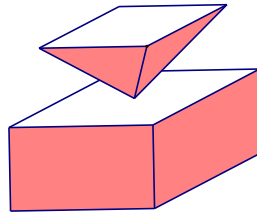
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



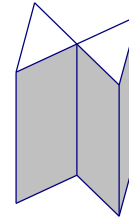
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vector \vec{v} , là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{MM'} = \vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H) .

c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H) .

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' .

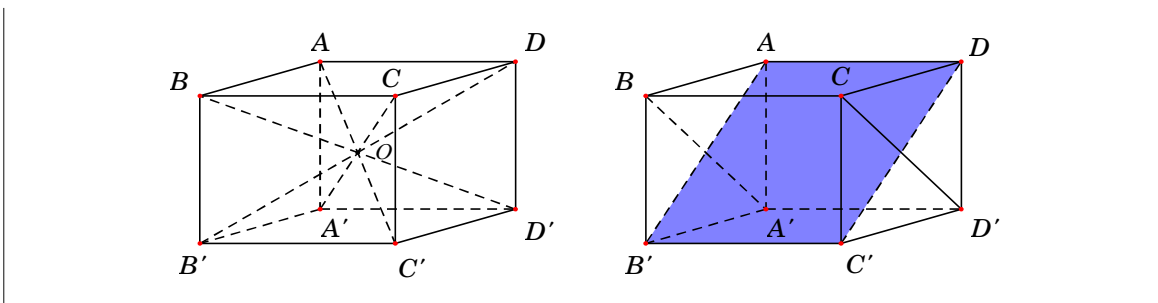
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H) .

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') , biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H') .

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

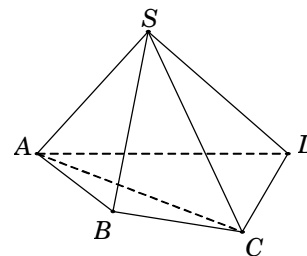
Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) và (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) . Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) để được khối đa diện (H) .

Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$. Ta thấy rằng:

- Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).
- Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$.

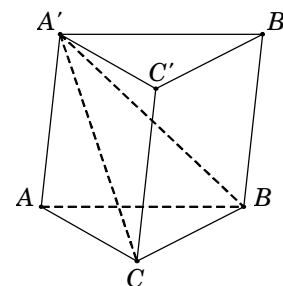


Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.

Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$. Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.



MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

Kết quả 1: Một khối đa diện bất kỳ có ít nhất 4 mặt.

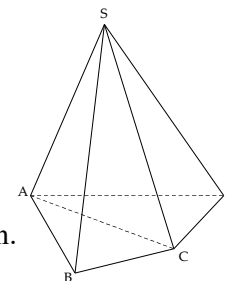
Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Kết quả 3: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

Kết quả 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Kết quả 5: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

Kết quả 6: Cho (H) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là l thì p phải là số chẵn.



Chứng minh: Gọi M là số các mặt của khối đa diện (H). Vì mỗi mặt của (H) có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của (H) bằng $C = \frac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.

Kết quả 7 (Suy ra từ chứng minh kết quả 6): Cho (H) là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là $C = \frac{pM}{2}$.

Kết quả 8: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

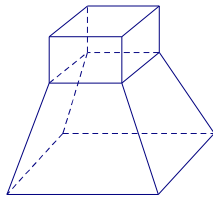
Chứng minh: Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M . Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C = \frac{3M}{2} \xrightarrow{C \in \mathbb{Z}} M$ chẵn.

Kết quả 9: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

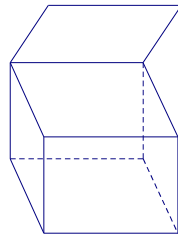
Kết quả 10: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn. (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

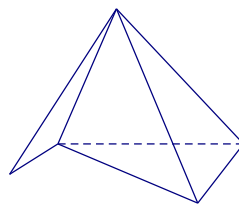
Câu 1. Cho các hình khối sau:



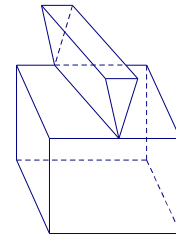
Hình 1



Hình 2



Hình 3



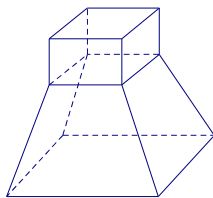
Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là:

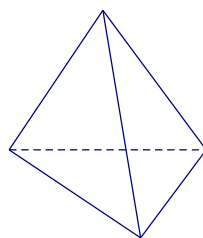
- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Lời giải. Chọn A.

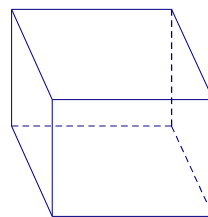
Câu 2. Cho các hình khối sau:



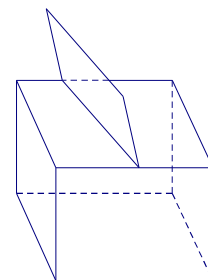
Hình 1



Hình 2



Hình 3



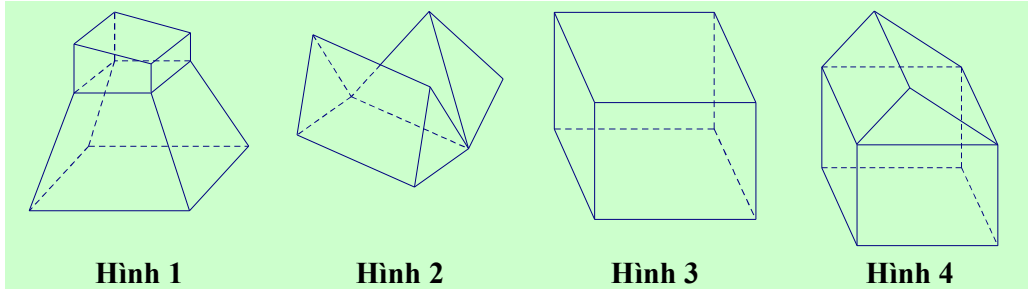
Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện là:

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Lời giải. Chọn D.

Câu 3. Cho các hình khối sau:

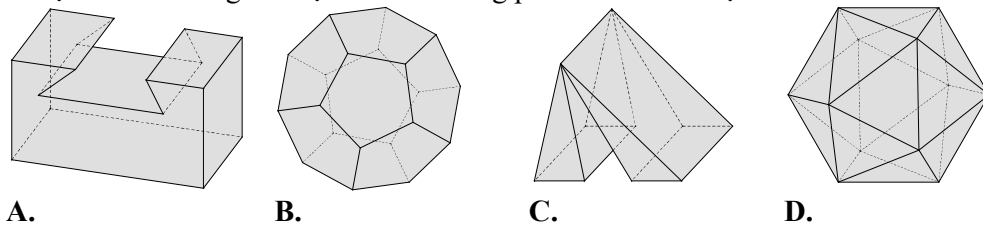


Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số hình đa diện là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Các hình đa diện là: Hình 1; Hình 3; Hình 4. **Chọn C.**

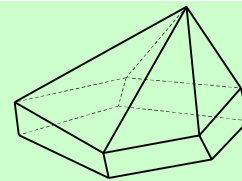
Câu 4. Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?



Lời giải. Chọn C. Vì hình C vi phạm tính chất "Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác".

Câu 5. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

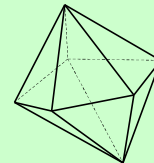
- A. 6. B. 10.
C. 11. D. 12.



Lời giải. Chọn C.

Câu 6. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

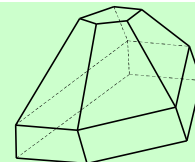
- A. 8. B. 10.
C. 11. D. 12.



Lời giải. Chọn B.

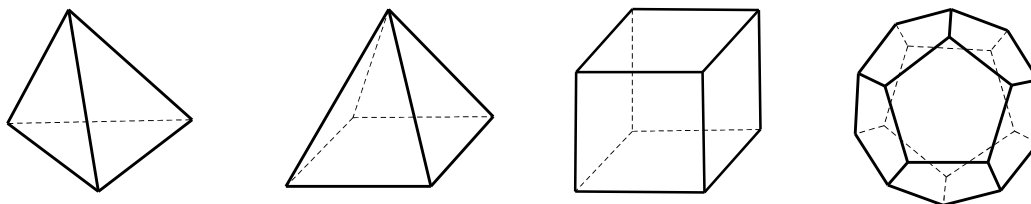
Câu 7. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

- A. 11. B. 12.
C. 13. D. 14.



Lời giải. Chọn B.

Câu 8. Khối đa diện nào sau đây có số mặt nhỏ nhất?

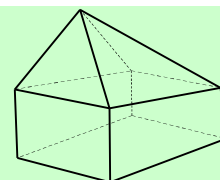


- A. Khối tứ diện đều. B. Khối chóp tứ giác. C. Khối lập phương. D. Khối 12 mặt đều.

Lời giải. Chọn A.

Câu 9. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh?

- A. 8. B. 9.
C. 12. D. 16.



Lời giải. Chọn D.

Câu 10. Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.
B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.
D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải. Ta thấy các đáp án A, B, D đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện.

Chọn C.

Câu 11. Gọi D là số các đỉnh, M là số các mặt, C là số các cạnh của một hình đa diện bất kỳ. mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $D > 4, M > 4, C > 6$. B. $D > 5, M > 5, C > 7$.
C. $D \geq 4, M \geq 4, C \geq 6$. D. $D \geq 5, M \geq 5, C \geq 7$.

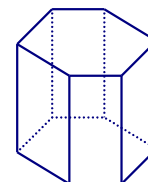
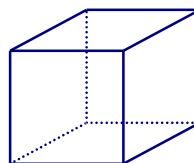
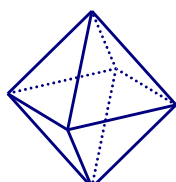
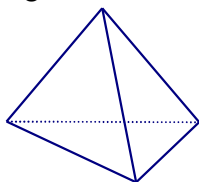
Lời giải. Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án C. Chọn C.

Câu 12. Một hình đa diện có các mặt là những tam giác thì số mặt M và số cạnh C của đa diện đó thỏa mãn

- A. $3C = 2M$. B. $C = M + 2$. C. $M \geq C$. D. $3M = 2C$.

Lời giải. Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Tổng số mặt của hình đa diện là M và mỗi mặt đều là tam giác nên có tổng số cạnh $3M$. Vậy ta có $3M = 2C$. Chọn D.

Câu 13. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?



- A. Tứ diện đều. B. Bát diện đều. C. Hình lập phương. D. Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải. Chọn A.

Câu 14. Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

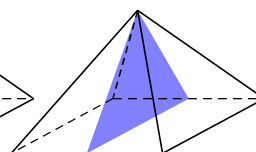
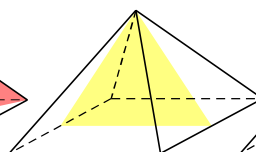
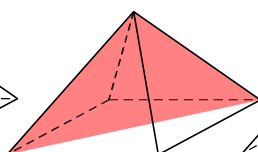
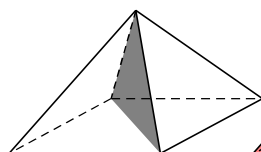
- A. $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 6$. B. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 9$.
C. $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 9$. D. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 3$.

Lời giải. Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện). Chọn C.

Câu 15. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng. B. 1 mặt phẳng. C. 2 mặt phẳng. D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



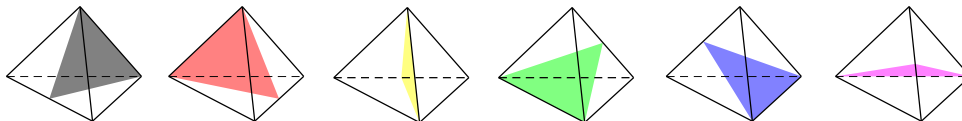
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

Chọn A.

Câu 16. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

- A. 4 mặt phẳng. B. 6 mặt phẳng. C. 8 mặt phẳng. D. 10 mặt phẳng.

Lời giải. Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.

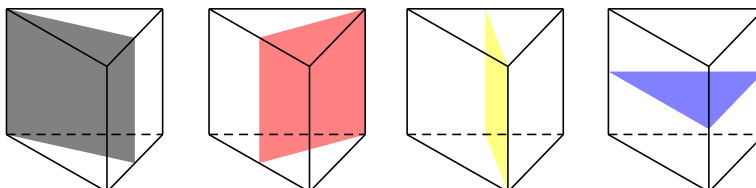


Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng. **Chọn B.**

Câu 17. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

- A. 4 mặt phẳng. B. 1 mặt phẳng. C. 2 mặt phẳng. D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (hình vẽ bên dưới).

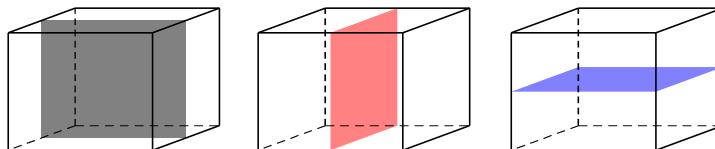


Chọn A.

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng. B. 6 mặt phẳng. C. 9 mặt phẳng. D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình hộp chữ nhật (không phải là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.

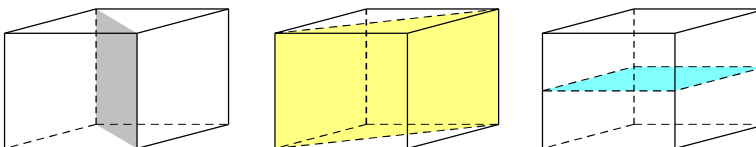


Chọn D.

Câu 19. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng. B. 1 mặt phẳng. C. 2 mặt phẳng. D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



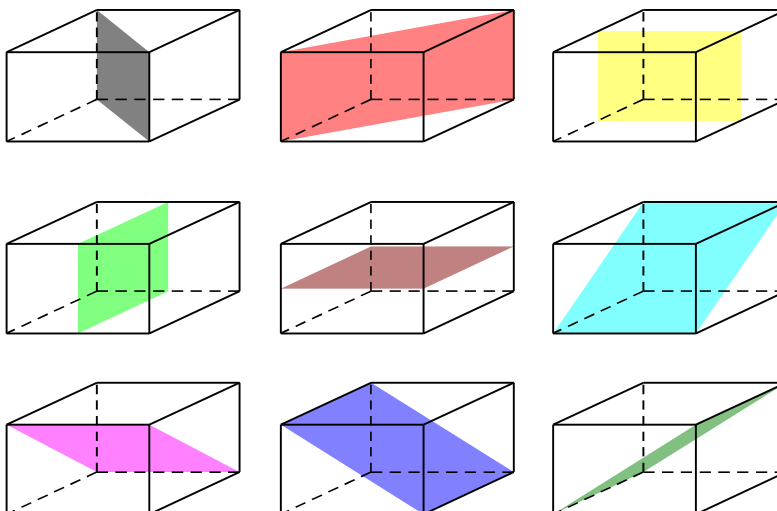
- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Chọn D.

Câu 20. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 8 mặt phẳng. B. 9 mặt phẳng.
C. 10 mặt phẳng. D. 12 mặt phẳng.

Lời giải. Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau). **Chọn B.**

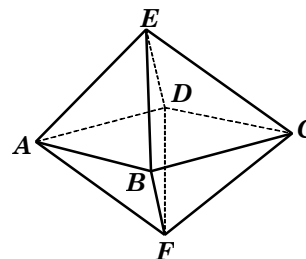


Câu 21. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

- A. 4 mặt phẳng. B. 9 mặt phẳng.
C. 6 mặt phẳng. D. 12 mặt phẳng.

Lời giải.

Gọi bát diện đều $ABCDEF$. Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



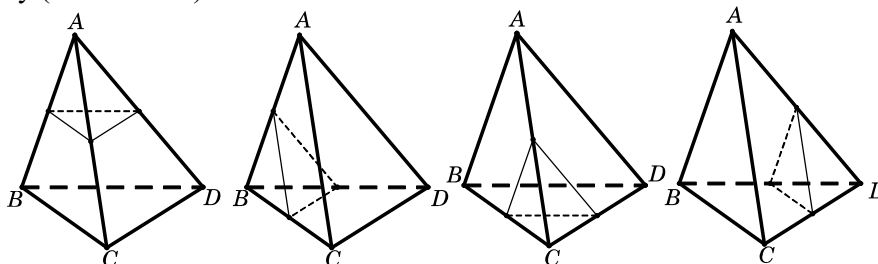
Chọn B.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của một tứ diện?

- A. 1 mặt phẳng. B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

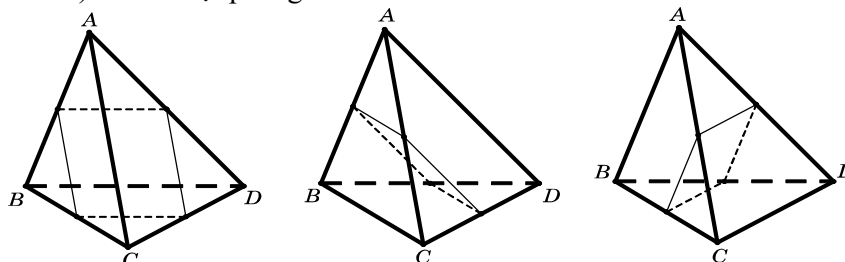
Lời giải. Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:

● Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh. Có 4 mặt phẳng thỏa mãn loại này (vì có 4 đỉnh)



Nhận xét. Loại này ta thấy có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại.

● Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh (4 cạnh này thuộc 2 cặp cạnh, mỗi cặp cạnh là chéo nhau). Có 3 mặt phẳng như thế.



Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

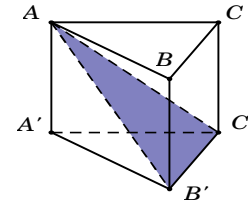
Chọn C.

Câu 23. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào ?

- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
- B. Hai khối chóp tam giác.
- C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
- D. Hai khối chóp tứ giác.

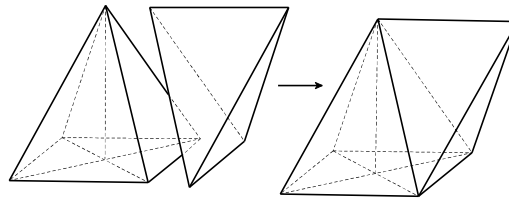
Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $AA'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Chọn A.

Câu 24. Lắp ghép hai khối đa diện (H_1) , (H_2) để tạo thành khối đa diện (H) , trong đó (H_1) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a , (H_2) là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của (H_1) trùng với một mặt của (H_2) như hình vẽ. Hỏi khối đa diện (H) có tất cả bao nhiêu mặt?



- A. 5.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 9.

Lời giải. Khối đa diện (H) có đúng 5 mặt. **Chọn A.**

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.

Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện (H) có 8 mặt.

Câu 25. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

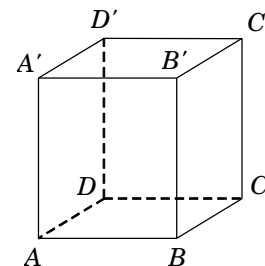
- A. 2.
- B. 4.
- C. 6.
- D. 8.

Lời giải. Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

● Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.

● Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau. **Chọn C.**



Câu 26. Hãy phân chia:

- a) Một khối hộp thành năm khối tứ diện.
- b) Một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

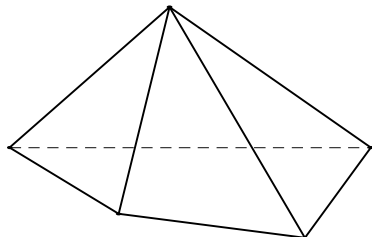
a) Có thể phân chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện sau đây: $ABDA'$, $CBDC'$, $B'A'C'B$, $D'A'C'D$, $BDA'C'$.

b) Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B , điểm N nằm giữa C và D . Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB) , ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện: $AMCN$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$.

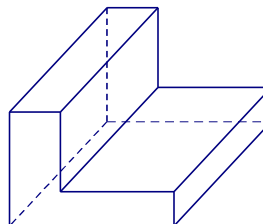
Bài 02. KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I – KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện giới hạn (H) được gọi là đa diện lồi.

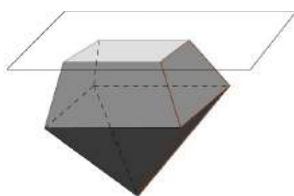


Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.



II – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

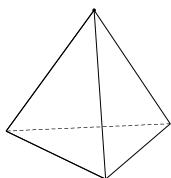
- Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

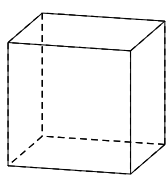
Định lí

Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

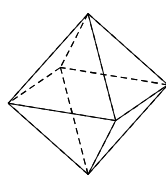
- ✓ Loại $\{3;3\}$: khối tứ diện đều.
- ✓ Loại $\{4;3\}$: khối lập phương.
- ✓ Loại $\{3;4\}$: khối bát diện đều.
- ✓ Loại $\{5;3\}$: khối 12 mặt đều.
- ✓ Loại $\{3;5\}$: khối 20 mặt đều.



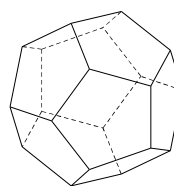
Khối tứ diện đều



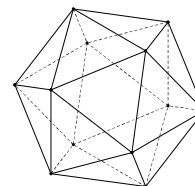
Khối lập phương



Bát diện đều



Hình 12 mặt đều



Hình 20 mặt đều

Chú ý. Gọi D là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n; p\}$. Ta có

$$pD = 2C = nM$$

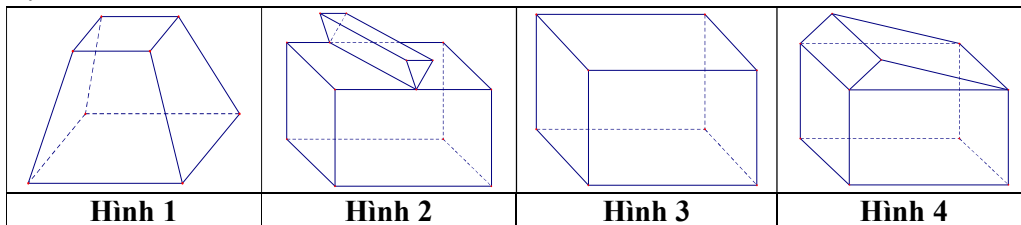
- Xét tứ diện đều $\{3;3\} \rightarrow \begin{cases} n=3, p=3 \\ M=4 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 6 \quad \& \quad D = \frac{nM}{p} = 4.$

- Xét khối lập phương $\{4;3\} \rightarrow \begin{cases} n=4, p=3 \\ M=6 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 8.$
- Xét bát diện đều $\{3;4\} \leftrightarrow \begin{cases} n=3, p=4 \\ M=8 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 6.$
- Xét khối mười hai mặt đều $\{5;3\} \rightarrow \begin{cases} n=5, p=3 \\ M=12 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 30 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 20.$
- Xét khối hai mươi mặt đều $\{3;5\} \rightarrow \begin{cases} n=3, p=5 \\ M=20 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 30 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 12.$

Khối đa diện đều	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại
Tứ diện đều	4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương	8	12	6	$\{4;3\}$
Bát diện đều	6	12	8	$\{3;4\}$
Mười hai mặt đều	20	30	12	$\{5;3\}$
Hai mươi mặt đều	12	30	20	$\{3;5\}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho các hình khối sau:

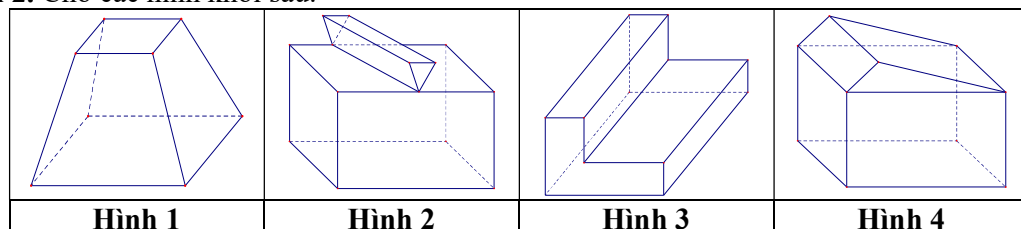


Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện lồi là

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Lời giải. Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (H): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)". **Chọn B.**

Câu 2. Cho các hình khối sau:



Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

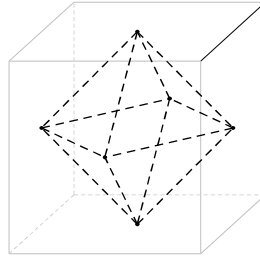
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Có hai khối đa diện lồi là: Hình 1 & Hình 4. **Chọn B.**

Câu 3. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của hình nào trong các hình sau đây?

- A. Bát diện đều. B. Tứ diện đều. C. Lục bát đều. D. Ngũ giác đều.

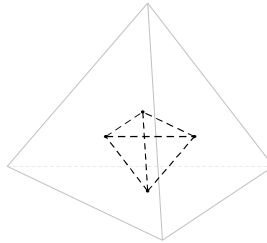
Lời giải. **Chọn A.**



Câu 4. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình lập phương.
B. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.
C. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.
D. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

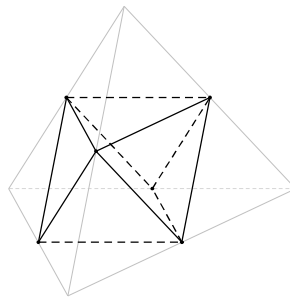
Lời giải. **Chọn B.**



Câu 5. Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều tạo thành

- A. các đỉnh của một hình tứ diện đều.
B. các đỉnh của một hình bát diện đều.
C. các đỉnh của một hình mười hai mặt đều.
D. các đỉnh của một hình hai mươi mặt đều.

Lời giải. **Chọn B.**



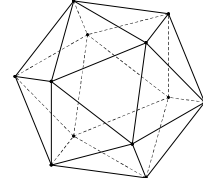
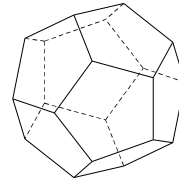
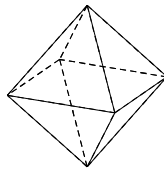
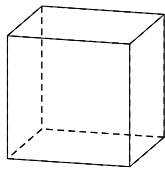
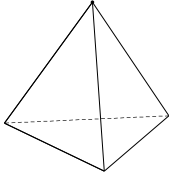
Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.
B. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.
C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.
D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

Lời giải. Trong 5 loại khối đa diện đều không tồn tại khối chóp có đáy là tứ giác.

Chọn D.

Câu 7. Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ



Khối tứ diện đều Khối lập phương Bát diện đều Hình 12 mặt đều Hình 20 mặt đều
Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.
B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.
C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.
D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Lời giải. ● Khối lập phương có 6 mặt. Do đó A sai.

- Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh là 12. **Chọn B.**
- Khối tứ diện đều không có tâm đối xứng. Do đó C sai.
- Khối 12 mặt đều có 20 đỉnh. Khối 20 mặt đều có 12 đỉnh. Do đó D sai.

Câu 8. Các khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh D và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

- A. $D = C - 2$. B. $D \geq C$. C. $3D = 2C$. D. $3C = 2D$.

Lời giải. Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba mặt nên suy ra các cạnh của hình đa diện là $3D$. Vậy ta có $3D = 2C$. **Chọn C.**

Câu 9. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

- A. 4π . B. 8π . C. 12π . D. 10π .

Lời giải. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, gồm 6 mặt là các hình vuông nên tổng các góc bằng $6 \cdot 2\pi = 12\pi$. **Chọn C.**

Câu 10. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là:

- A. 12π . B. 16π . C. 20π . D. 24π .

Lời giải. Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, gồm 20 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $20 \cdot \pi = 20\pi$. **Chọn C.**

Câu 11. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của một tứ diện đều cạnh a .

- A. $l = 4a$. B. $l = 6a$. C. $l = 6$. D. $l = 4$.

Lời giải. Tứ diện đều có tất cả 6 cạnh nên có tổng độ dài các cạnh là $6a$. **Chọn B.**

Câu 12. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của khối mười hai mặt đều cạnh bằng 2.

- A. $l = 8$. B. $l = 16$. C. $l = 24$. D. $l = 60$.

Lời giải. Khối mười hai mặt đều có 30 cạnh nên có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng $l = 30 \cdot 2 = 60$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 4a^2$. B. $S = 6a^2$. C. $S = 8a^2$. D. $S = 10a^2$.

Lời giải. Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a . Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2$. **Chọn B.**

Câu 14. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. B. $S = \sqrt{3}a^2$. C. $S = 2\sqrt{3}a^2$. D. $S = 8a^2$.

Lời giải. Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$. **Chọn C.**

Câu 15. Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 10\sqrt{3}$. B. $S = 20\sqrt{3}$. C. $S = 20$. D. $S = 10$.

Lời giải. Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng 2 $\longrightarrow S_0 = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 16. Cho khối đa diện lồi. Chứng minh rằng:

- Số góc của tất cả các mặt là số chẵn.
- Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Hướng dẫn giải

a) Gọi số góc là G và số cạnh khối đa diện là C . Trong mỗi mặt là đa giác thì số góc bằng số cạnh, mà số cạnh được tính 2 lần nên $G = 2C$, do đó G chẵn.

b) Ta dùng phản chứng. Nếu xuất phát từ một đỉnh nào đó chỉ có hai cạnh thì mỗi cạnh như thế là cạnh của chỉ một đa giác, trái với điều kiện trong định nghĩa của hình đa diện.

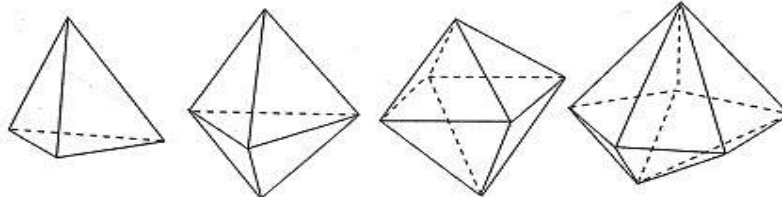
Vậy mỗi đỉnh phải là đỉnh chung của ít nhất là ba cạnh, và vì vậy nó cũng phải là đỉnh chung của ba mặt.

Câu 17. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

Hướng dẫn giải

Gọi số cạnh của khối đa diện là C , số mặt là M . Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $3M = 2C$. Suy ra M là số chẵn.

Sau đây là một số khối đa diện số các mặt tam giác là 4, 6, 8, 10.



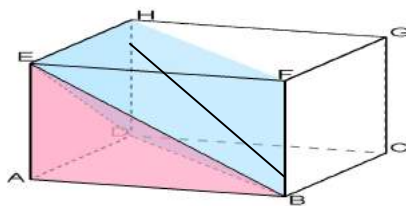
Câu 18. Phân chia một khối lập phương thành 4 khối chóp.

Hướng dẫn giải

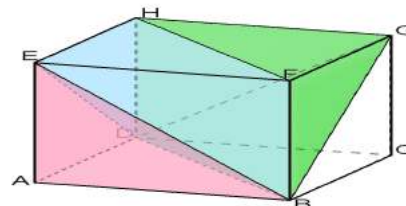
Bước 1: Chia khối lập phương dọc theo mặt đối xứng của nó là (HFBD), ta được 2 nửa của khối lập phương là 2 khối lăng trụ tam giác bằng nhau. Ở đây ta sẽ xử lý khối ABD.EFH.

Bước 2: Chia khối lăng trụ ABD.EFH thành khối tứ diện EABD và khối chóp tứ giác E.BDHF. (Hình 3.3.5.a)

Bước 3: Làm tương tự với khối lăng trụ BCD.HGF. (Hình 3.3.5.b)



Hình 3.3.5.a



Hình 3.3.5.b

Bài 03. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I – NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

I – THỂ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} S.h$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B.h$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao khối lăng trụ

• **Thể tích khối hộp chữ nhật:** $V = a.b.c$

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

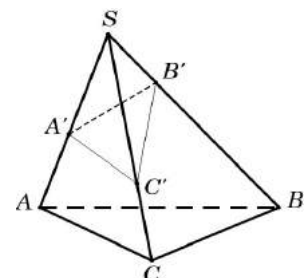
• **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

III – TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

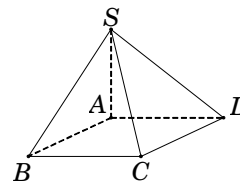
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải. Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn D.



Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S , $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = 4a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 12a^3$.

Lời giải. Ta chọn (SBC) làm mặt đáy \rightarrow chiều cao khối chóp là $d[A, (SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.d[A, (SBC)] = 2a^3$. **Chọn A.**

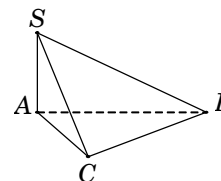
Câu 3. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 40$. B. $V = 192$. C. $V = 32$. D. $V = 24$.

Lời giải. Tam giác ABC , có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$

\rightarrow tam giác ABC vuông tại $A \rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 24$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = 32$. **Chọn C.**



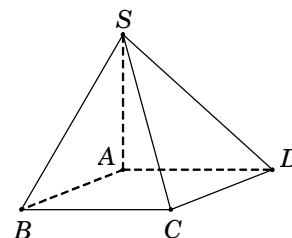
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{15}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải. Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **Chọn B.**



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy ($ABCD$) và $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

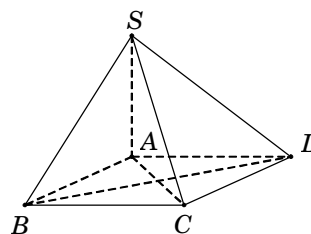
Lời giải. Đường chéo hình vuông $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC , ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn A.

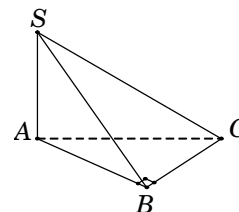
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2a$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$.



Chọn C.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

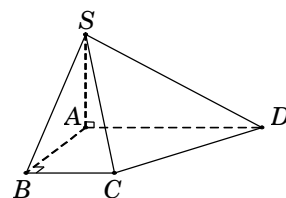
- A. $V = 1$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = 2$.

Lời giải. Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \left(\frac{AD + BC}{2} \right) \cdot AB = \frac{3}{2}.$$

Chiều cao khối chóp là $SA = 2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = 1$. **Chọn A.**



Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $SH \perp AB$.

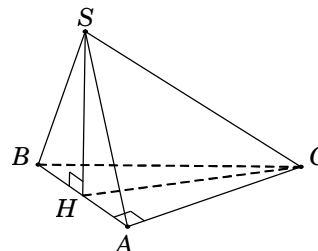
Do $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC , có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn A.**



Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $V = 2a^3$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

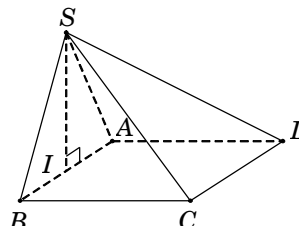
Lời giải. Gọi I là trung điểm của AB . Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **Chọn B.**



Câu 10. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

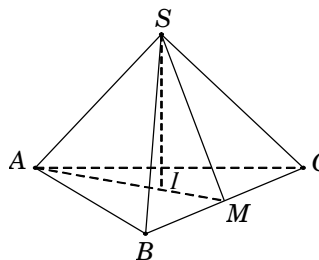
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{33}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **Chọn B.**



Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

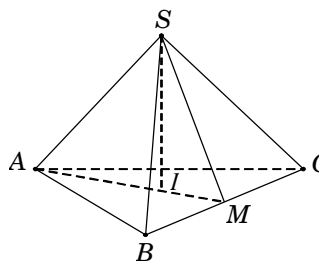
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn C.**



Câu 12. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải. Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot h \rightarrow h = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm AC . Theo giả thiết, ta có $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

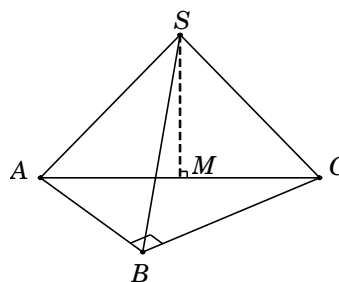
Tam giác vuông ABC , có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA , có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SM = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn A.**



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên $SD = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD thỏa $HD = 3HB$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{5}}{24}$. B. $V = \frac{\sqrt{15}}{24}$. C. $V = \frac{\sqrt{15}}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải. Vì $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều.

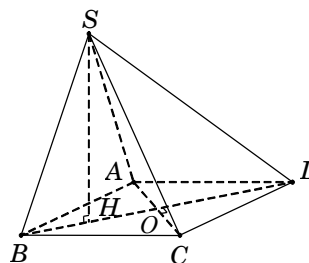
Suy ra

$$BO = \frac{\sqrt{3}}{2}; BD = 2BO = \sqrt{3}; HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác vuông SHD , có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{24}$. **Chọn B.**



Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

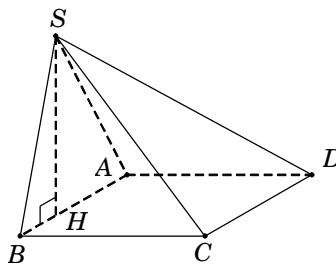
Lời giải. Trong tam giác vuông SAB , ta có

$$SA^2 = AH \cdot AB = \frac{2}{3} AB \cdot AB = \frac{2}{3} a^2;$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$. **Chọn D.**



Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD \rightarrow SB = SD$.

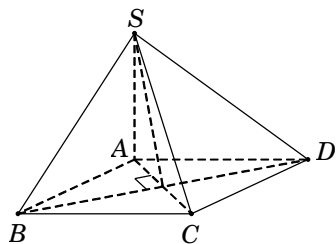
Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD} = 60^\circ$.

Do đó $\triangle SBD$ đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt). **Chọn C.**



Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

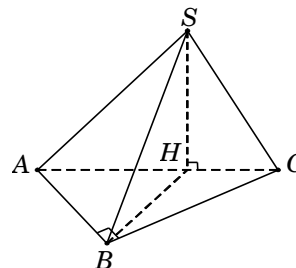
Trong tam giác vuông SAC , ta có

$$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}, \quad SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**



Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy; diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$ (đvdt). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $BC \perp AB$ (do $ABCD$ là hình vuông). (1)

Lại có $BC \perp SA$ (do SA vuông góc với đáy $(ABCD)$). (2)

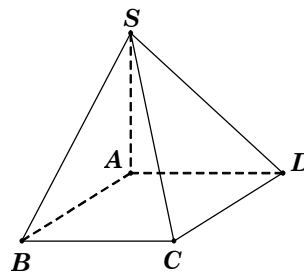
Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Do đó tam giác SBC vuông tại B . Đặt cạnh hình vuông là $x > 0$.

Tam giác SAB vuông tại A nên

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Theo chứng minh trên, ta có tam giác SBC vuông tại B nên



$$\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}SB \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2} \cdot a \longrightarrow x = a.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh huyền AB bằng 3. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABC và $SB = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{3}{2}$. B. $V = \frac{1}{4}$. C. $V = \frac{3}{4}$. D. $V = 1$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC . Suy ra $G = CM \cap BN$ là trọng tâm tam giác ABC . Theo giả thiết, ta có $SG \perp (ABC)$.

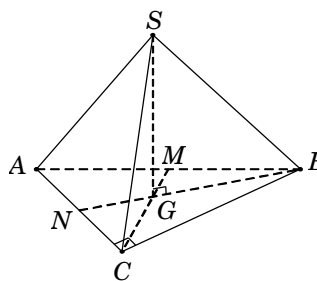
Tam giác ABC vuông cân tại C , suy ra $CA = CB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ và $CM \perp AB$.

Ta có $CM = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}$, suy ra $GM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{2}$;

$$BG = \sqrt{BM^2 + GM^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}; \quad SG = \sqrt{SB^2 - GB^2} = 1.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA \cdot CB = \frac{9}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SG = \frac{3}{4}$. **Chọn C.**



Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

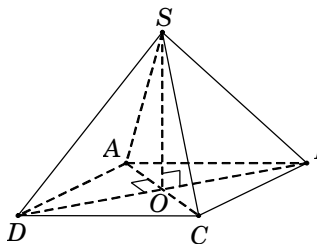
Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB , có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **Chọn A.**



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. B. $V = 4\sqrt{2}a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Trong tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

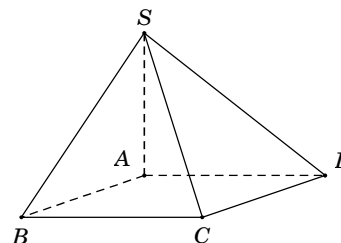
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB .

Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2\sqrt{6}a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = 2\sqrt{2}a^3$. **Chọn C.**



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

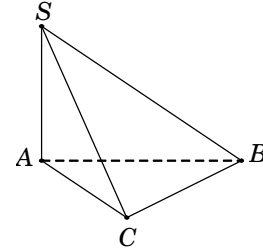
Lời giải. Do $SA \perp (ABC)$ nên ta có

$$60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}.$$

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều SAB là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**



Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

Tam giác vuông SAD , có $SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình thoi

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle BAD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{2}$.

Chọn C.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB , góc giữa SC và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{15}}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{15}}{18}$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

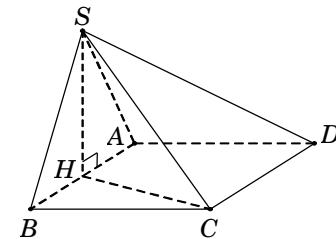
Lời giải. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC . Do đó $30^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH , có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHC , có $SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 1$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{18}$. **Chọn B.**



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a$, $BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

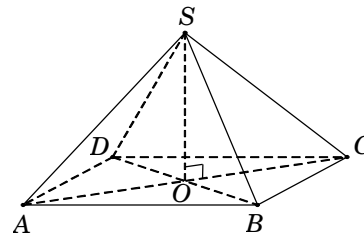
Lời giải. Gọi O là trung điểm AC , suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo giả thiết đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên hình chiếu của S xuống đáy là điểm $O \rightarrow SO \perp (ABCD) \rightarrow$ hình chiếu vuông góc của SB trên mặt đáy $(ABCD)$ là OB . Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB , có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = a\sqrt{3}$.

Tam giác vuông ABC , có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = a^3$. **Chọn D.**



Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi I là trung điểm của BC , SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

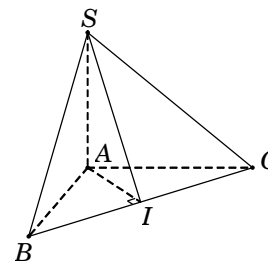
Lời giải. Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI . Do đó $60^\circ = \widehat{SI, (ABC)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A , suy ra trung tuyến $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI , có $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn D.**



Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

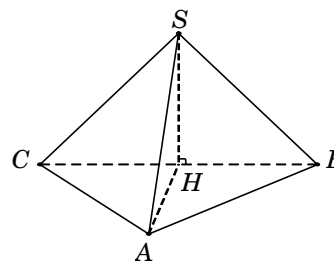
Lời giải. Vì $SH \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA . Do đó $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SHA , có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn A.**



Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B ; đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết $AC = 2a$, $BC = a$; góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm AC . Do tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn

ngoại tiếp tam giác ABC . Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên hình chiếu của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra $SH \perp (ABC)$. Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, BH} = \widehat{SBH}$.

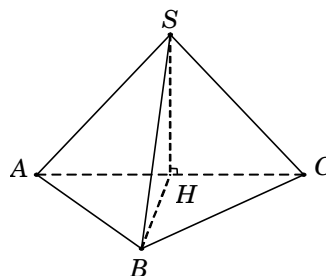
Tam giác vuông SHB , có

$$SH = BH \cdot \tan \widehat{SBH} = \frac{AC}{2} \cdot \tan \widehat{SBH} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác vuông ABC , có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{2}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $BD=1$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy ($ABCD$) là trung điểm OD . Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{1}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

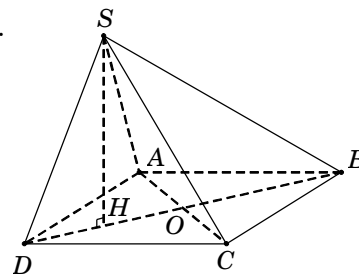
Lời giải. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy ($ABCD$) là HD . Do đó $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

$$\text{Tam giác vuông } SHD, \text{ có } SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{BD}{4} \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Trong hình vuông } ABCD, \text{ có } AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Diện tích hình vuông } ABCD \text{ là } S_{ABCD} = AB^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{3}}{24}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng ($ABCD$) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng ($ABCD$) góc 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{2a^3 \sqrt{3}}{9}$.

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm AB . Suy ra $H = BO \cap CM$.

Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy ($ABCD$) là HD .

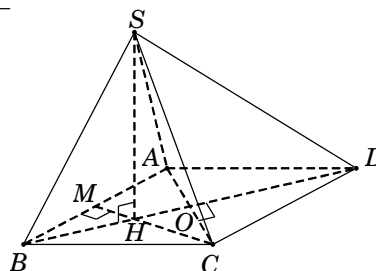
$$\text{Do đó } 30^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ và } ADC \text{ đều cạnh } a, \text{ suy ra } \begin{cases} OD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ OH = \frac{1}{3} BO = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow HD = OD + OH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tam giác vuông } SHD, \text{ có } SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Diện tích hình thoi } S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh đáy AD và BC ; $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 45° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $45^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

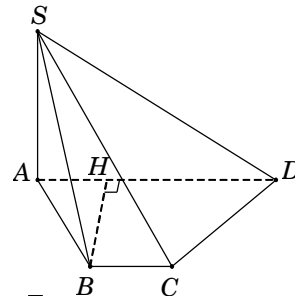
Suy ra tam giác SAD vuông cân tại A nên $SA = AD = 2a$.

Trong hình thang $ABCD$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$).

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác AHB , có $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $V = 8\sqrt{2}a^3$. C. $V = 8\sqrt{6}a^3$. D. $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải. Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt đáy là HC nên

$$30^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}.$$

Tam giác vuông SAD , có $SA^2 = AH \cdot AD$

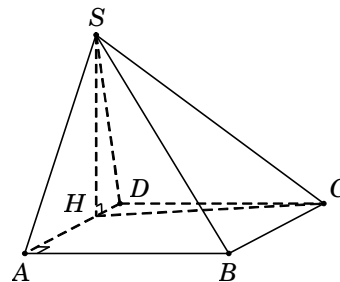
$$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4}AD \cdot AD = \frac{3}{4}AD^2.$$

Suy ra $AD = 4a$, $HA = 3a$, $HD = a$, $SH = \sqrt{HA \cdot HD} = a\sqrt{3}$,

$$HC = SH \cdot \cot \widehat{SCH} = 3a, \quad CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AD \cdot CD = 8\sqrt{2}a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **Chọn D.**



Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = AB = a$. Gọi N là trung điểm SD , đường thẳng AN hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải. Tam giác SAD vuông tại A , có AN là trung tuyến nên $AN = \frac{1}{2}SD$.

Gọi M là trung điểm AD , suy ra $MN \parallel SA$ nên $MN \perp (ABCD)$.

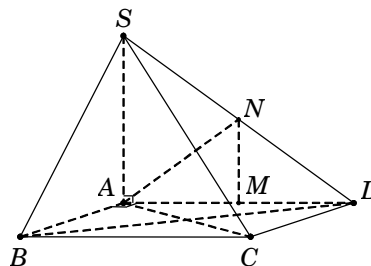
Do đó $30^\circ = \widehat{AN, (ABCD)} = \widehat{AN, AM} = \widehat{NAM}$.

Tam giác vuông NMA , có $AM = AN \cdot \cos \widehat{NAM} = \frac{SD\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAD , có $SD^2 = SA^2 + AD^2 \Leftrightarrow SD^2 = a^2 + \left(\frac{SD\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Suy ra $SD = 2a$ nên $AD = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 34. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° .

Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $V = \sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải. $ABCD$ là hình vuông suy ra $AB \perp AD$. (1)

Vì $SA \perp (ABCD) \rightarrow SA \perp AD$. (2)

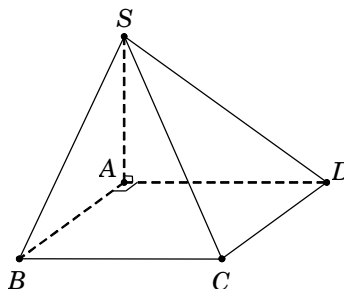
Từ (1) và (2), suy ra $AD \perp (SAB)$.

Khi đó SA là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAB) .

Do đó $30^\circ = \widehat{SD; (SAB)} = \widehat{SD; SA} = \widehat{DSA}$.

Tam giác SAD vuông tại A , có $SA = \frac{AD}{\tan \widehat{DSA}} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $V = \sqrt{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải. Kẻ $SH \perp BC$. Vì $(SBC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$. Do đó $60^\circ = \widehat{SD; (SBC)} = \widehat{SD; SC} = \widehat{DSC}$.

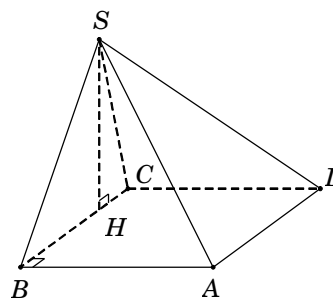
Từ $DC \perp (SBC) \rightarrow DC \perp SC$.

Tam giác vuông SCD , có $SC = \frac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.

Tam giác vuông SBC , có $SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2}.SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**



Câu 36. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

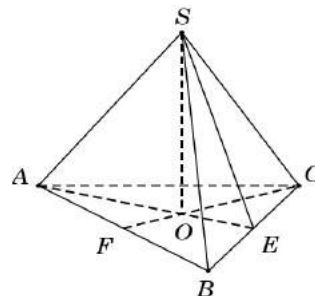
Lời giải. Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O = AE \cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

Khi đó $60^\circ = \widehat{(SBC); (ABC)} = \widehat{SE; OE} = \widehat{SEO}$.

$\triangle SOE$ vuông, có $SO = OE \cdot \tan \widehat{SEO} = \frac{AE}{3} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn A.**



Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc đáy và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ nên có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

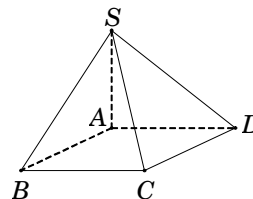
Do $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SD \perp CD; AD \perp CD \end{cases}$, suy ra $60^\circ = \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

Tam giác vuông SAD , có $SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn D.



Câu 38. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 3a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SB \perp BC; AB \perp BC \end{cases}$, suy ra $60^\circ = \widehat{(SBC), (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

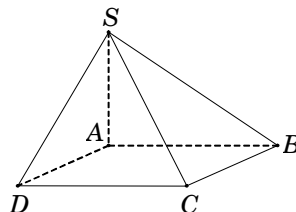
Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = a^3$.

Chọn D.



Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải. Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra $BD \perp AO$. (2)

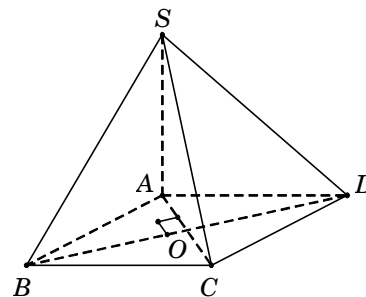
Từ (1) và (2), suy ra $BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp SO$.

Do $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD, AO \perp BD \end{cases}$, suy ra

$$60^\circ = \widehat{(SBD), (ABCD)} = \widehat{SO, AO} = \widehat{SOA}.$$

Tam giác vuông SAO , ta có $SA = AO \cdot \tan \widehat{SOA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **Chọn C.**



Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , đường chéo $AC = a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa (SCD) và đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{12}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $\begin{cases} CH \perp AB \longrightarrow CH \perp CD \\ CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

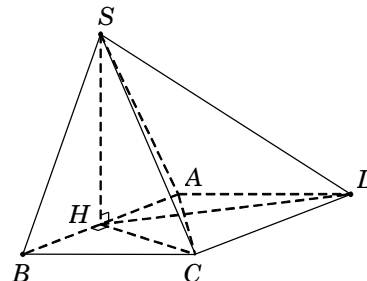
Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SC \subset (SCD), SC \perp CD \\ HC \subset (ABCD), HC \perp CD \end{cases}$

suy ra $45^\circ = \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}$.

Tam giác vuông SHC , có $SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**



Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = 1$, $AB = 2$; cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \sqrt{2}$. B. $V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm AB , suy ra $CI = AD = 1 = \frac{1}{2}AB$.

Do đó tam giác ABC vuông tại C . Suy ra $BC \perp AC$ nên $45^\circ = \widehat{(SBC), (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAC , có $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thang $S_{ABCD} = \frac{(AB + DC)AD}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $S_{\triangle ABC} = 4\text{cm}^2$, $S_{\triangle ABD} = 6\text{cm}^2$, $AB = 3\text{cm}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng 60° . Tính thể tích V của khối tứ diện đã cho.

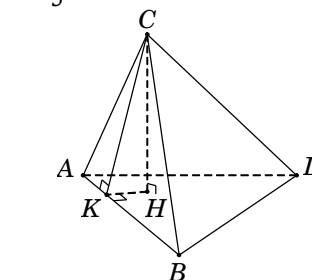
- A. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$. C. $V = 2\sqrt{3}\text{cm}^3$. D. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải. Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CK \longrightarrow CK = \frac{8}{3}\text{cm}$.

Gọi H là chân đường cao của hình chóp hạ từ đỉnh C .

Xét tam giác vuông CHK , ta có

$CH = CK \cdot \sin \widehat{CKH} = CK \cdot \sin \widehat{(ABC), (ABD)} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Vậy thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot CH = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{cm}^3$. **Chọn D.**

Câu 43. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

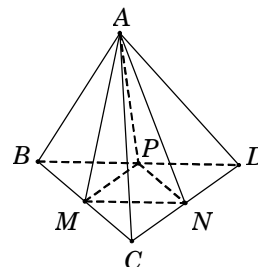
- A. $V = \frac{7}{2}a^3$. B. $V = 14a^3$. C. $V = \frac{28}{3}a^3$. D. $V = 7a^3$.

Lời giải. Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3.$$

Để thấy $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$. **Chọn D.**



Câu 44. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

- A. $V = 3$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 5$.

Lời giải. Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$. **Chọn B.**

Câu 45. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

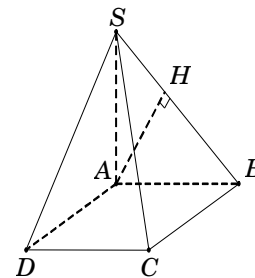
Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A trên $SB \Rightarrow AH \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A, (SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$. **Chọn D.**



Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và vuông góc với đáy (ABC) . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

- A. $V = \frac{2a^3}{27}$. B. $V = \frac{2a^3}{29}$. C. $V = \frac{a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{27}$.

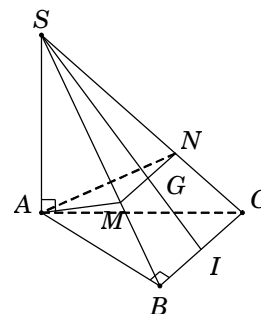
Lời giải. Từ giả thiết suy ra $AB = BC = a$.

Diện tích tam giác $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{6}$.

Gọi I là trung điểm BC .

Do G là trọng tâm $\triangle SBC$ nên $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$.

Vì $BC \parallel (\alpha) \rightarrow BC$ song song với giao tuyến MN



$$\longrightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \text{ theo tỉ số } \frac{2}{3} \longrightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{4}{9} S_{\Delta SBC}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{27}$. **Chọn A.**

Nhận xét.

1) Các em thử giải cách khác bằng tỉ số thể tích

2) Hai tam giác đồng dạng theo tỉ số k thì tỉ số thể tích bằng k^3 .

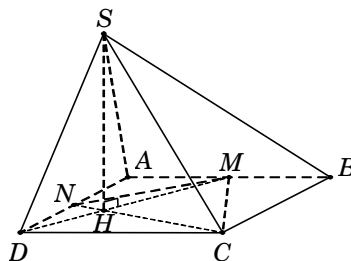
Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$.

A. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $V = \frac{5a^3}{8}$. D. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Diện tích tứ giác $S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta BMC}$
 $= AB^2 - \frac{1}{2} AM \cdot AN - \frac{1}{2} BM \cdot BC = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Vậy $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} S_{CDNM} \cdot SH = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn B.**



Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD . Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $DKAC$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. B. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. C. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm CD , suy ra $OM \perp CD$ nên

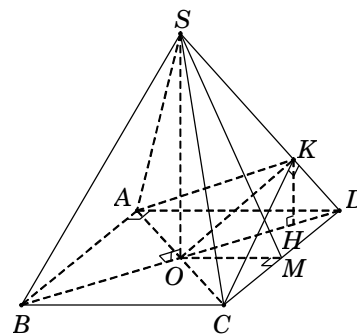
$$60^\circ = (\widehat{SCD}), (\widehat{ABCD}) = \widehat{SM}, OM = \widehat{SMO}.$$

Tam giác vuông SOM , có $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = a\sqrt{3}$.

Kẻ $KH \perp OD \Rightarrow KH \parallel SO$ nên $KH \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SOD , ta có $\frac{KH}{SO} = \frac{DK}{DS} = \frac{DO^2}{DS^2}$
 $= \frac{OD^2}{SO^2 + OD^2} = \frac{2}{5} \longrightarrow KH = \frac{2}{5} SO = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = 2a^2$. Vậy $V_{DKAC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ADC} \cdot KH = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **Chọn C.**



Câu 49*. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$ và $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

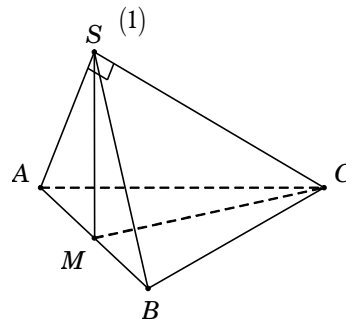
Lời giải. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow SM \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} SA = SB \\ \widehat{ASB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB \text{ đều} \longrightarrow \begin{cases} AB = a \\ SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Tam giác SAC , có $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{10}$.

Tam giác SBC , có $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \widehat{BSC}} = a\sqrt{7}$.

Tam giác SBC , có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



$$\longrightarrow CM = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2AM.AC.\cos \widehat{BAC}} = \frac{a\sqrt{33}}{2}.$$

Ta có $SM^2 + MC^2 = AC^2 = 9a^2 \longrightarrow \Delta SMC$ vuông tại $M \longrightarrow SM \perp MC$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $SM \perp (ABC)$.

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SM = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **Chọn D.**

Cách 2. (Dùng phương pháp tỉ số thể tích)

Trên cạnh SC lấy điểm D sao cho $SD = a$ nên $\begin{cases} AB = CD = a, AD = a\sqrt{2} \\ SA = SD = a, AD = a\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \Delta ABD \text{ vuông cân} \\ \Delta SAD \text{ vuông cân} \end{cases}$.

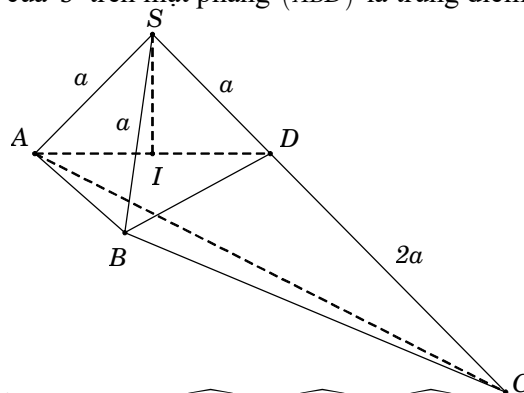
Lại có $SA = SB = SD = a$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABD) là trung điểm I của AD .

Ta tính được $SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}a^2$.

$$\text{Suy ra } V_{S.ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SI = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SC} = \frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$



Cách 3. Phương pháp trắc nghiệm. " Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$ và $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$." Khi đó ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}, \text{ ta được } V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = SB$, $SC = SD$, $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{5}$.

B. $V = \frac{4a^3}{15}$.

C. $V = \frac{4a^3}{25}$.

D. $V = \frac{12a^3}{25}$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Tam giác SAB cân tại S suy ra $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp d$,

với $d = (SAB) \cap (SCD)$. Vì $(SAB) \perp (SCD)$ suy ra $SM \perp (SCD)$

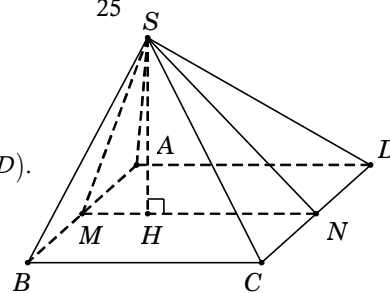
$\Rightarrow SM \perp SN$ và $(SMN) \perp (ABCD)$. Kẻ $SH \perp MN \longrightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} = \frac{7a^2}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.SM + \frac{1}{2}CD.SN = \frac{7a^2}{10}$$

$$\longrightarrow SM + SN = \frac{7a}{5}. \text{ Tam giác } SMN \text{ vuông tại } S \text{ nên}$$

$$SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2. \text{ Giải hệ } \begin{cases} SM + SN = \frac{7a}{5} \\ SM^2 + SN^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow SM = \frac{3a}{5} \text{ \& } SN = \frac{4a}{5}$$

$$\longrightarrow SH = \frac{SM.SN}{MN} = \frac{12a}{25}. \text{ Vậy thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{4a^3}{25}. \text{ **Chọn C.**}$$



Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Câu 51. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

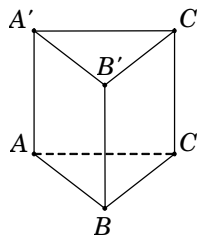
Lời giải. Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a .

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn D.



Câu 52. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

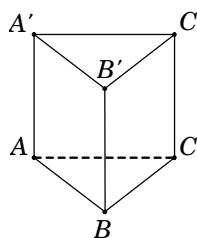
Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq} = 3.S_{ABB'A'}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.AB) \Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.a) \Rightarrow AA' = a.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn D.



Câu 53. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

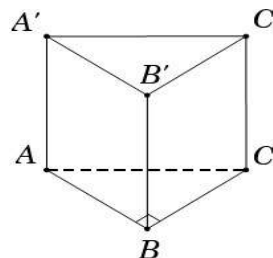
- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Tam giác ABC vuông cân tại B ,

suy ra $BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{a^3}{2}$.

Chọn C.



Câu 54. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = 4a^3\sqrt{5}$. B. $V = a^3\sqrt{15}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải. Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^3\sqrt{15}$. **Chọn B.**

Câu 55. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

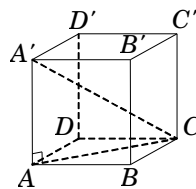
Lời giải. Đặt cạnh của khối lập phương là x ($x > 0$).

Suy ra $CC' = x$; $AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC' , có

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$$

Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$. **Chọn A.**



Câu 56. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a , biết $A'B = 3a$.

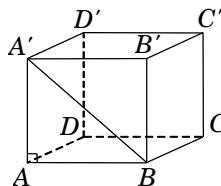
A. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $V = 4\sqrt{5}a^3$. C. $V = 2\sqrt{5}a^3$. D. $V = 12a^3$.

Lời giải. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp AB$.

Xét tam giác vuông $A'AB$, ta có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 4\sqrt{5}a^3$. **Chọn B.**



Câu 57. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V = a^3\sqrt{10}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải. Trong tam giác vuông ABB' , có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2a^3\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 58. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2 , 20cm^2 , 32cm^2 . Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

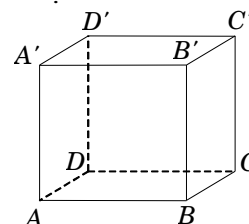
A. $V = 80\text{cm}^3$. B. $V = 160\text{cm}^3$. C. $V = 40\text{cm}^3$. D. $V = 64\text{cm}^3$.

Lời giải. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có
$$\begin{cases} S_{ABCD} = 10\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \cdot AD = 10 \\ AB \cdot AA' = 20 \\ AA' \cdot AD = 32 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế, ta được $(AA' \cdot AB \cdot AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA' \cdot AB \cdot AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = 80\text{cm}^3$. **Chọn A.**



Câu 59. Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật là

A. $V = 8$. B. $V = \frac{8}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 6$.

Lời giải. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài kích thước ba cạnh lần lượt là $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$ và có đường chéo AC' .

Theo bài ra, ta có a, b, c lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $\begin{cases} b = 2a \\ c = 4a \end{cases}$.

Mặt khác, độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{21} \Rightarrow AA'^2 + AB^2 + AD^2 = 21 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 21$.

Ta có hệ
$$\begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + (2a)^2 + (4a)^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ 21a^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = abc = 8$. **Chọn A.**

Câu 60. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với mặt đáy (ABC) góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{1}{2}$.

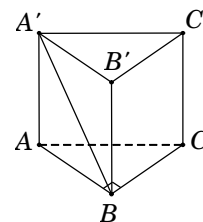
Lời giải. Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt đáy (ABC) là AB .

Do đó $60^\circ = \widehat{A'B, (ABC)} = \widehat{A'B, AB} = \widehat{A'BA}$.

Tam giác vuông $A'AB$, ta có $AA' = AB \cdot \tan \widehat{A'BA} = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \sqrt{5}a^3$. D. $V = \frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải. Ta có $AA' \perp (ABCD)$ nên

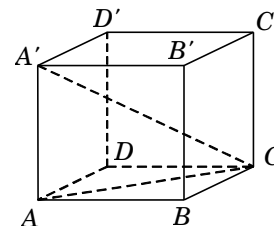
$$\widehat{A'C, (ABCD)} = \widehat{A'C, AC} = \widehat{A'CA}.$$

Tam giác vuông $A'AC$, ta có $AC = AA' \cdot \cot \alpha = a\sqrt{5}$.

Tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3$. **Chọn A.**



Câu 62. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $B'C'$. Tam giác ABC cân tại $A \rightarrow$ tam giác $A'B'C'$ cân tại $A' \rightarrow A'M \perp B'C'$.

Do đó $60^\circ = \widehat{(A'B'C'), (A'B'C')} = \widehat{(AM; A'M)} = \widehat{AMA'}$.

Tam giác vuông $A'B'M$, có

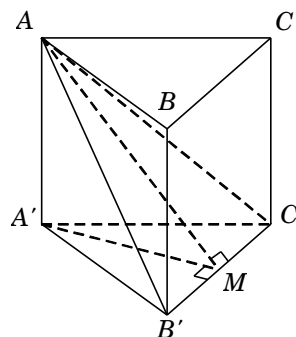
$$A'M = A'B' \cdot \cos \widehat{MA'B'} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông $AA'M$, có

$$AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3}{8}$. **Chọn A.**



Câu 63. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ.

- A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{3a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{24}$.

Lời giải. Tương tự như bài 62. **Chọn B.**

Câu 64. Tính theo a thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° , $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = 2a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Ta có $30^\circ = \widehat{A'C, (ABCD)} = \widehat{A'C, AC} = \widehat{A'CA}$;

$60^\circ = \widehat{(A'BC), (ABCD)} = \widehat{A'B, AB} = \widehat{A'BA}$.

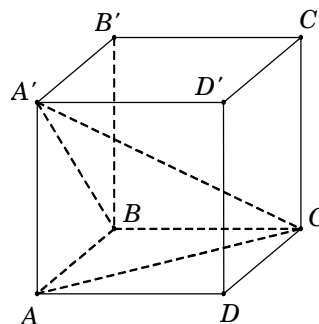
Tam giác vuông $A'AB$, có $AB = \frac{AA'}{\tan \widehat{A'BA}} = a$.

Tam giác vuông $A'AC$, có $AC = \frac{AA'}{\tan \widehat{A'CA}} = 3a$.

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3\sqrt{6}$. **Chọn A.**



Câu 65. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

- A. $V = \sqrt{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Do đó tam giác ABC và ADC là

các tam giác đều. Vì N là trung điểm $A'D'$ nên $\begin{cases} C'N \perp A'D' \\ C'N = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

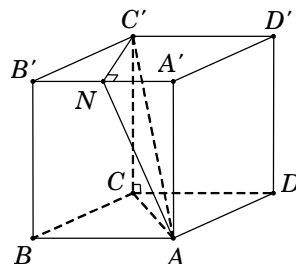
Suy ra $30^\circ = \widehat{AC', (ADD'A')} = \widehat{AC', AN} = \widehat{C'AN}$.

Tam giác vuông $C'NA$, có $AN = \frac{C'N}{\tan \widehat{C'AN}} = \frac{3}{2}$.

Tam giác vuông $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**



Vấn đề 3. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

- A. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{8a^3}{3}$. C. $V = 8a^3$. D. $V = 4a^3\sqrt{2}$.

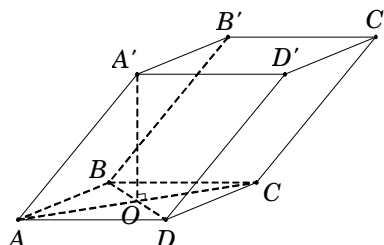
Lời giải. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông $A'OA$, có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\Delta ABCD} \cdot A'O = 4a^3\sqrt{2}$. **Chọn D.**



Câu 67. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

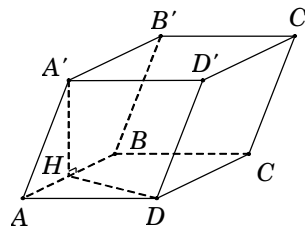
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 68. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

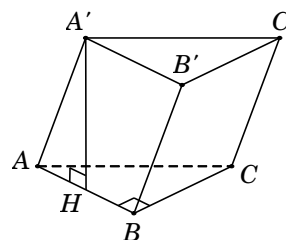
- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = a^2$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 69. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải. Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 70. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{2}$ và $A'A = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC .

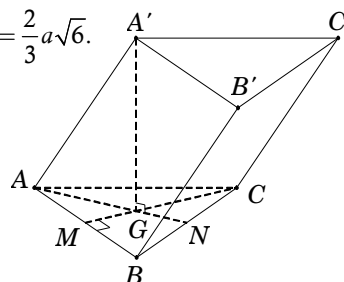
Khi đó $G = AN \cap CM$ là trọng tâm ΔABC . Theo giả thiết, ta có $A'G \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh $2a\sqrt{2}$ suy ra $AN = a\sqrt{6} \rightarrow AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3}a\sqrt{6}$.

Tam giác vuông $A'GA$, có $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'G = 2a^3$. **Chọn D.**



Câu 71. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Biết rằng $A'A = A'B = A'C = a$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm BC . Từ $A'A = A'B = A'C = a$, suy ra hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

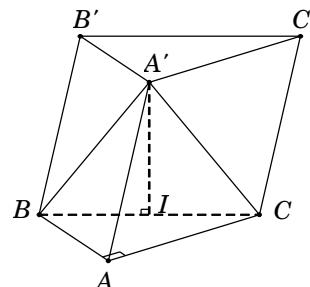
Suy ra $A'I \perp (ABC)$.

Tam giác ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'IB$, có $A'I = \sqrt{A'B^2 - BI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'I = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **Chọn C.**



Câu 72. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 1$, $AC = 2$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{21}}{4}$. B. $V = \frac{\sqrt{21}}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $V = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải. Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong ΔABC .

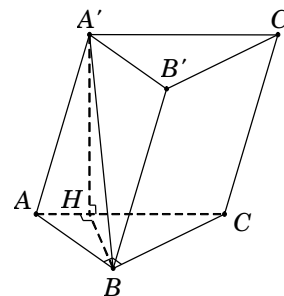
Theo giả thiết, ta có $A'H \perp (ABC)$.

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$; $AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{1}{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \frac{\sqrt{21}}{4}$. **Chọn A.**



Câu 73. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V = 6a^3$. B. $V = \frac{5a^3}{2}$. C. $V = 4a^3$. D. $V = 3a^3$.

Lời giải. Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCB'C'} = \frac{3}{2}.2a^3 = 3a^3$. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12cm^3 . Tính thể tích V của khối tứ diện $AB'CD'$.

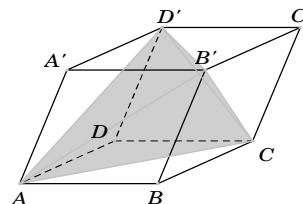
A. $V = 2\text{cm}^3$. B. $V = 3\text{cm}^3$. C. $V = 4\text{cm}^3$. D. $V = 5\text{cm}^3$.

Lời giải. Gọi S là diện tích mặt đáy $ABCD$ và h là chiều cao khối hộp.

Thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S.h = 12\text{cm}^3$.

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành khối tứ diện $AB'CD'$ và 4 khối chóp: $A.A'B'D'$, $C.B'C'D'$, $B'.BAC$, $D'.DAC$ (như hình vẽ). Ta thấy bốn khối chóp này có thể tích bằng nhau và cùng

bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot h$. Suy ra tổng thể tích 4 khối chóp bằng $V' = \frac{2}{3}Sh$.



Vậy thể tích khối tứ diện $V_{AB'CD'} = Sh - \frac{2}{3}Sh = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4\text{cm}^3$. **Chọn C.**

Câu 75. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$; $A'O$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Cạnh bên AA' hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Vì $A'O \perp (ABCD)$ nên

$$45^\circ = \widehat{AA', (ABCD)} = \widehat{AA', AO} = \widehat{A'AO}.$$

Đường chéo hình chữ nhật

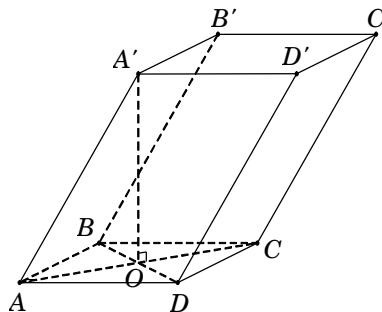
$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a.$$

Suy ra tam giác $A'OA$ vuông cân tại O nên

$$A'O = AO = a.$$

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = a^3\sqrt{3}$. **Chọn D.**



Câu 76. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = 3$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải. Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$.

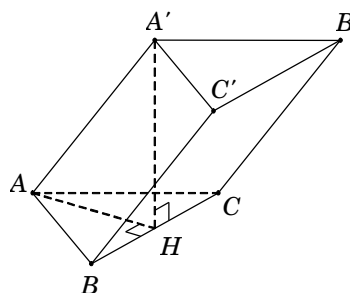
Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH . Do đó

$$45^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}.$$

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = HA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 3$. **Chọn A.**



Câu 77. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình lăng trụ tam giác ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC) .

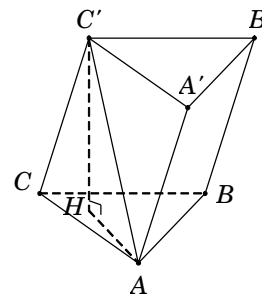
Suy ra AH là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Do đó } 60^\circ = \widehat{AC', (ABC)} = \widehat{(AC', AH)} = \widehat{HAC'}.$$

Tam giác vuông AHC' , có $C'H = AC' \cdot \sin \widehat{HAC'} = 2\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot C'H = 8\sqrt{3}$.

Suy ra thể tích cần tính $V_{ABCB'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 78. Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

- A. $V = 100\text{cm}^3$. B. $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $V = 50\text{cm}^3$. D. $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC .

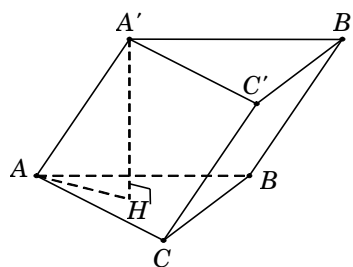
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) . Do đó

$$60^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H , có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = 5\sqrt{3}.$$

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 50\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **Chọn B.**



Câu 79. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra ΔABD đều cạnh a .

Gọi H là tâm tam giác ABD . Vì A' cách đều các điểm A, B, D nên $A'H \perp (ABD)$.

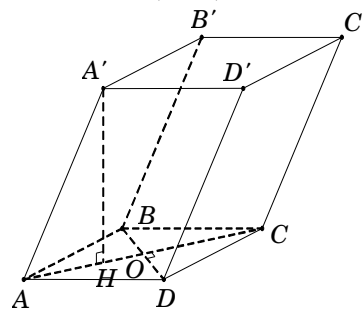
Do đó $60^\circ = \widehat{AA', (ABCD)} = \widehat{AA', HA} = \widehat{A'AH}$.

Ta có $OH = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông $A'AH$, có $A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH} = a$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết rằng $A'O \perp (ABCD)$ và cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $OABC'D'$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

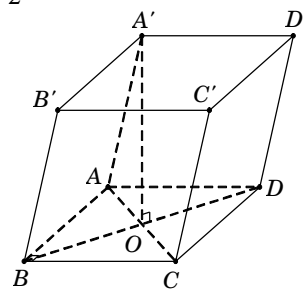
Lời giải. Từ giả thiết, suy ra tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow OA = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Vì $A'O \perp (ABCD)$ nên $60^\circ = \widehat{AA', (ABCD)} = \widehat{AA', AO} = \widehat{A'AO}$.

Tam giác vuông $A'AO$, có $OA' = OA \cdot \tan \widehat{A'AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích khối hộp $V = S_{ABCD} \cdot OA' = \frac{3a^3}{4}$.

Ta có $V = V_{O.ABC'D'} + V_{AA'D'.BB'C'} + V_{C'.BOC} + V_{D'.AOD} + V_{O.CDD'C'}$
 $= V_{O.ABC'D'} + \frac{1}{2}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{6}V \Rightarrow V_{O.ABC'D'} = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{8}$. **Chọn C.**



Vấn đề 4. TỈ SỐ THỂ TÍCH

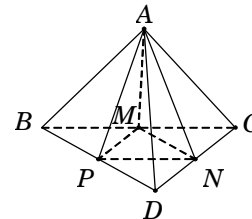
Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD . Biết rằng $AB = 4a$, $AC = 6a$, $AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 7a^3$. B. $V = 28a^3$. C. $V = 14a^3$. D. $V = 21a^3$.

Lời giải. Tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc nên $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 28a^3$.

Ta có $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}$, suy ra $V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3$.

Chọn A.



Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có các đỉnh là trọng tâm của các mặt của khối tứ diện $ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

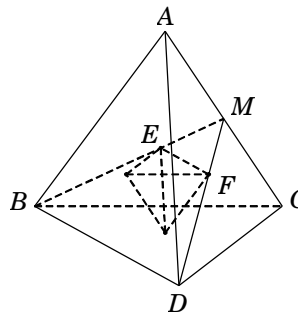
- A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{23}{27}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm AC ; E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD .

Trong tam giác MBD có $EF = \frac{1}{3} BD$.

Tương tự ta có các cạnh còn lại của tứ diện mới sinh ra bằng $\frac{1}{3}$ cạnh của tứ diện ban đầu.

Do đó $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. **Chọn C.**



Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm của cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

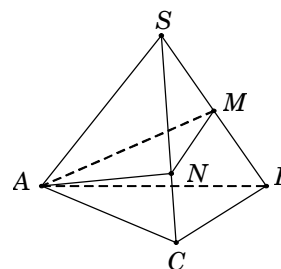
- A. $V = 15$. B. $V = 5$. C. $V = 30$. D. $V = 10$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 5 = 15$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABMNC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = 10$.

Chọn D.



Câu 84. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 16. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 2$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 8$.

Lời giải.

Ta có $d[S, (MNP)] = d[A, (MNP)]$ nên $V_{AMNP} = V_{SMNP}$.

Mà $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{8}$ nên $V_{AMNP} = \frac{1}{8} V_{SABC} = 2$.

Chọn A.

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Xét các điểm P thuộc đoạn AB , điểm Q thuộc đoạn BC và điểm R thuộc đoạn BD sao cho $\frac{PA}{PB} = 2, \frac{QB}{QC} = 3, \frac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$ theo V .

- A. $V_{BPQR} = \frac{V}{5}$. B. $V_{BPQR} = \frac{V}{4}$. C. $V_{BPQR} = \frac{V}{3}$. D. $V_{BPQR} = \frac{V}{6}$.

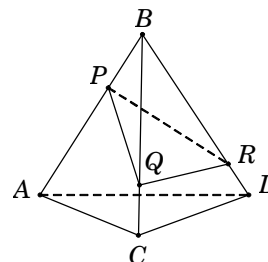
Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$\frac{BP}{BA} = \frac{1}{3}, \frac{BQ}{BC} = \frac{3}{4}, \frac{BR}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Ta có $\frac{V_{BPQR}}{V_{ABCD}} = \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Suy ra $V_{BPQR} = \frac{1}{5} V_{ABCD} = \frac{V}{5}$.

Chọn A.



Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = 6a, AC = 9a, AD = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = 4a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 27a^3$.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .

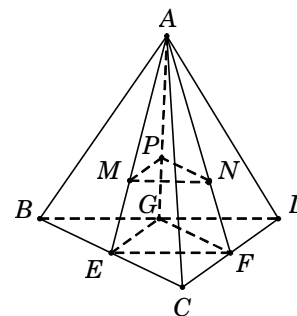
Suy ra $V_{AEFG} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{27}{4} a^3$.

Do M, N, P là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB nên ta

có $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.EFG}} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{AP}{AG} = \frac{8}{27} \implies V_{A.MNP} = \frac{8}{27} V_{A.EFG} = 2a^3$.

Chọn D.



Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = 5\sqrt{2}$. B. $V = 5\sqrt{3}$. C. $V = 10$. D. $V = 15$.

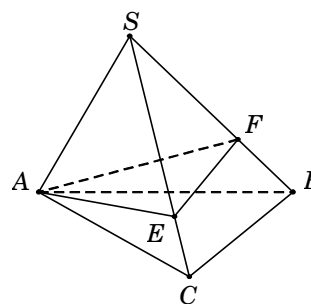
Lời giải. Trên các đoạn SB, SC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $SE = SF = 3$.

Khi đó $S.AEF$ là khối tứ diện đều có cạnh $a = 3$.

Suy ra $V_{S.AEF} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Ta có $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

$\implies V_{S.ABC} = \frac{20}{9} V_{S.AEF} = 5\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Câu 88. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Cho tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

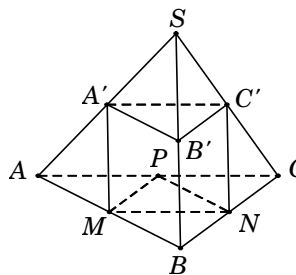
- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải. Kí hiệu tứ diện và các điểm như hình vẽ.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V}{8}.$$

$$\text{Tương tự } V_{A.A'MP} = V_{B.B'MN} = V_{C.C'NP} = \frac{V}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } V' &= V_{S.ABC} - (V_{S.A'B'C'} + V_{A.A'MP} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP}) \\ &= V - \left(\frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} \right) = \frac{V}{2} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}. \quad \text{Chọn A.} \end{aligned}$$



Câu 89. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{36}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{16}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

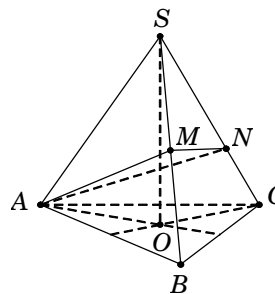
Lời giải. Gọi O là tâm của $\triangle ABC$, suy ra $SO \perp (ABC)$.

$$\text{Tam giác vuông } SOA, \text{ có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{ABCNM}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{ABCNM} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{18}. \quad \text{Chọn D.}$$



Câu 90. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $S_{\triangle MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. B. $S_{\triangle MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. C. $S_{\triangle MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. D. $S_{\triangle MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải. Mặt phẳng $(P) \parallel (ABC)$ và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P .

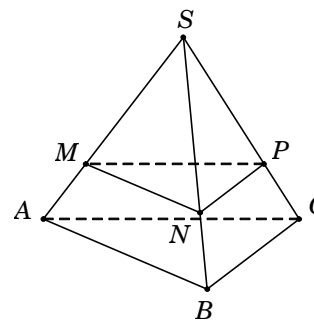
$$\text{Theo Talet, ta có } \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = x^3.$$

$$\text{Theo giả thiết } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều cạnh $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

$$\text{Vậy diện tích } S_{\triangle MNP} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}. \quad \text{Chọn D.}$$



Câu 91. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc với BD , cắt BD tại F và cắt AD tại E . Tính thể tích V của khối tứ diện $CDEF$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{24}$. C. $V = \frac{a^3}{36}$. D. $V = \frac{a^3}{54}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CE. \quad (1)$

Lại có $BD \perp (\alpha) \Rightarrow BD \perp CE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CE \perp (ABD) \Rightarrow CE \perp AD$.

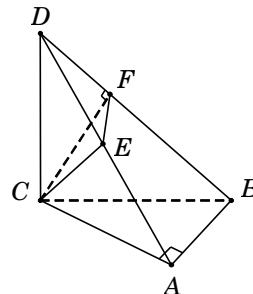
Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông DCB , có $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác vuông DCB , có $CD^2 = DF \cdot DB \Rightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{CD^2}{DB^2} = \frac{1}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $\frac{DE}{DA} = \frac{CD^2}{DA^2} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{V_{D.EFC}}{V_{D.ABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{1}{6} \rightarrow V_{D.EFC} = \frac{1}{6} \cdot V_{D.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a\right) = \frac{a^3}{36}$. **Chọn C.**



Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V và các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $\overline{AN} = 3\overline{AC}$ và $\overline{AP} = 4\overline{AD}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

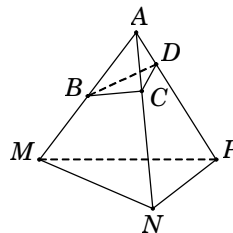
- A. $V_{AMNP} = \frac{V}{24}$. B. $V_{AMNP} = 8V$. C. $V_{AMNP} = 24V$. D. $V_{AMNP} = \frac{V}{8}$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra

$$\frac{AB}{AM} = \frac{1}{2}; \quad \frac{AC}{AN} = \frac{1}{3}; \quad \frac{AD}{AP} = \frac{1}{4}.$$

Ta có $\frac{V_{A.BCD}}{V_{A.MNP}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{AD}{AP} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Suy ra $V_{A.MNP} = 24 \cdot V_{A.BCD} = 24V$. **Chọn C.**



Câu 92. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

- A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Lời giải. Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a là $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi $P = EN \cap CD$ và $Q = EM \cap AD$.

Suy ra P, Q lần lượt là trọng tâm của $\triangle BCE$ và $\triangle ABE$.

Gọi S là diện tích tam giác BCD , suy ra $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BNE} = S$.

Ta có $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} = \frac{S}{3}$.

Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, suy ra

$$d[M, (BCD)] = \frac{h}{2}; \quad d[Q, (BCD)] = \frac{h}{3}.$$

Khi đó $V_{M.BNE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BNE} \cdot d[M, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{6}$; $V_{Q.PDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle PDE} \cdot d[Q, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{27}$.

Suy ra $V_{PQD.NMB} = V_{M.BNE} - V_{Q.PDE} = \frac{S \cdot h}{6} - \frac{S \cdot h}{27} = \frac{7S \cdot h}{54} = \frac{7}{18} \cdot \frac{S \cdot h}{3} = \frac{7}{18} V_{ABCD}$.

Vậy thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là $V = V_{ABCD} - V_{PQD.NMB} = \frac{11}{18} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Chọn B.

Câu 94. Mặt phẳng đi qua trọng tâm của tứ diện, song song với một mặt phẳng của tứ diện và chia khối tứ diện thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của hai phần đó.

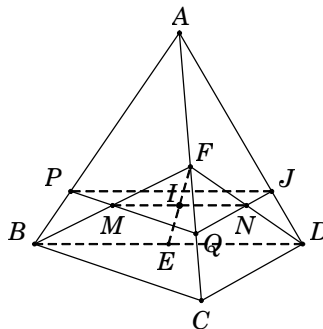
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{27}{37}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, EF khi đó I là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta sẽ dựng mặt phẳng qua I song song với (BCD) .

Trong mặt phẳng (EBD) dựng đường thẳng qua I song song với BD cắt EB, ED lần lượt tại M, N .

Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CD cắt AB, AC, AD lần lượt tại P, Q, J .



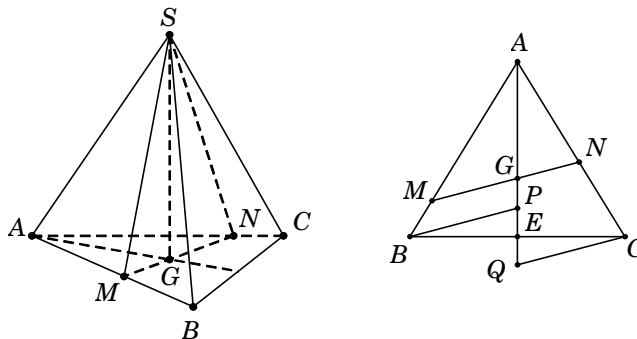
Do Q là trung điểm của $EC \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{4}$, suy ra $\frac{AP}{AB} = \frac{AJ}{AD} = \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{4}$.

Ta có $\frac{V_{A.PQJ}}{V_{A.BCD}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AJ}{AD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{A.PQJ}}{V_{PQJBCD}} = \frac{27}{37}$. **Chọn C.**

Câu 95. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm S và trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Tính thể tích nhỏ nhất V_{\min} của khối tứ diện $SAMN$.

- A. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{18}$. B. $V_{\min} = \frac{4}{9}$. C. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. D. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải. Gọi E là trung điểm của BC . Qua B, C lần lượt kẻ đường thẳng song song với MN và cắt đường thẳng AE tại P, Q .



Theo định lí Talet, ta có $\begin{cases} \frac{AB}{AM} = \frac{AP}{AG} \\ \frac{AC}{AN} = \frac{AQ}{AG} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AP}{AG} + \frac{AQ}{AG} = \frac{AP+AQ}{AG}$.

Mặt khác $\triangle BPE = \triangle CQE \Rightarrow PE = QE \Rightarrow AP + AQ = (AE - PE) + (AE + QE) = 2AE$.

Do đó $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AE}{AG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = 3$. Đặt $\begin{cases} AM = x \\ AN = y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

Vì $SABC$ là tứ diện đều $\Rightarrow SG \perp (ABC)$ và $SG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $V_{SAMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \cdot SG = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AM \cdot AN \sin 60^\circ \right) \cdot SG = \frac{\sqrt{2}}{12} AM \cdot AN = \frac{\sqrt{2}}{12} xy$.

Ta có $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. **Chọn C.**

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc các cạnh AB, CD sao cho $MA = MB, ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

- A. $V = 8$. B. $V = 20$. C. $V = 28$. D. $V = 40$.

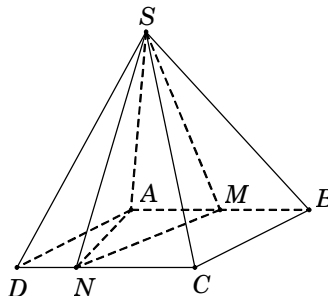
Lời giải. Gọi d là khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD .

Diện tích hình bình hành $S_{ABCD} = AB.d$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{MBCN} &= S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle ADN} \\ &= AB.d - \frac{1}{2}AM.d - \frac{1}{2}DN.d = AB.d - \frac{1}{4}AB.d - \frac{1}{6}AB.d \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{12}AB.d = \frac{7}{12}S_{ABCD}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.MBCN} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.48 = 28. \text{ Chọn C.}$$



Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỷ số k của thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ chia cho thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = \frac{1}{4}$. C. $k = \frac{1}{8}$. D. $k = \frac{1}{16}$.

Lời giải. Lưu ý: Tỷ số thể tích chỉ áp dụng cho khối chóp tam giác nên nếu đáy là tứ giác ta chia đáy thành hai tam giác.

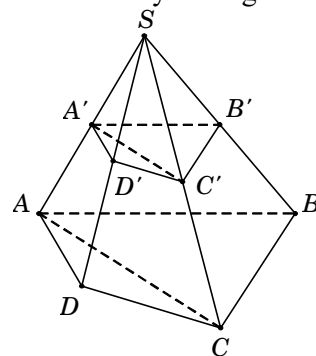
Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}$.

$$\text{Mà } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC}. \text{ Tương tự ta cũng có } V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{8}V_{S.ADC}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} + \frac{1}{8}V_{S.ADC} = \frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 98. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng (α) qua A' và song song với đáy $(ABCD)$ cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính thể tích V' của khối chóp $S.A'B'C'D'$.

- A. $V' = \frac{V}{3}$. B. $V' = \frac{V}{9}$. C. $V' = \frac{V}{27}$. D. $V' = \frac{V}{81}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}$. Tương tự $\frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}$.

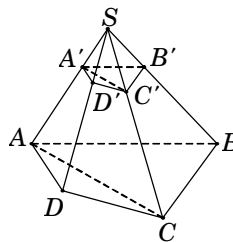
Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}$.

$$\text{Mà } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

$$\longrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{27}V_{S.ABC}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{27}V_{S.ADC}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{27}V_{S.ABC} + \frac{1}{27}V_{S.ADC} = \frac{1}{27}(V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{27}V_{S.ABCD} = \frac{V}{27}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{8}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{8}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Lời giải. Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in CD$), suy ra $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

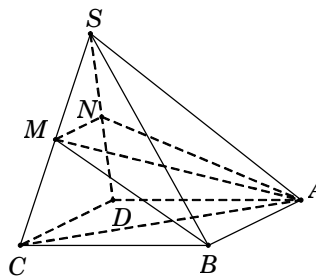
Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$.

• $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

• $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

Do đó $V_{S.ABMN} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} + \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

Suy ra $V_{ABMNDC} = \frac{5}{8}V_{S.ABCD}$ nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$. **Chọn D.**



Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $BA = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính thể tích V của khối chóp $S.AHCD$.

- A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

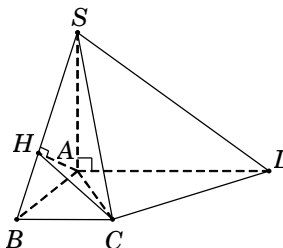
Lời giải. Tam giác vuông SAB , có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3}$.

Ta có $V_{S.AHCD} = V_{S.ACD} + V_{S.AHC}$.

• $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AD \cdot AB \right) SA = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

• $\frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.AHC} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{9}$.

Vậy $V_{S.AHCD} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. **Chọn B.**



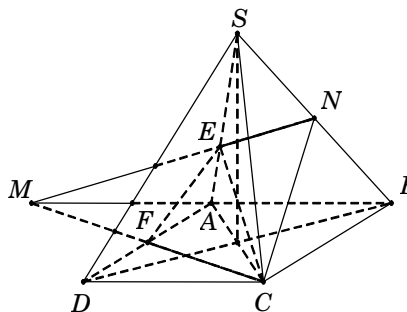
Câu 101. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm SB , M là điểm đối xứng với B qua A . Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{9}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{13}$.

Lời giải. Gọi h, S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S.h$.

Nối MN cắt SA tại E , MC cắt AD tại F . Tam giác SBM có A, N lần lượt là trung điểm của BM và SB suy ra E là trọng tâm tam giác SBM . Tứ giác $ACDM$ là hình vuông nên F là trung điểm MC .



Ta có $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF}$.

$$\bullet \frac{V_{S.ENC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \longrightarrow V_{S.ENC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} \longrightarrow V_{ABCEN} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} V_{S.ABCD} \right) = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}.$$

$$\bullet V_{E.ACF} = \frac{1}{3} S_{\Delta ACF} \cdot d[E, (ACF)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{12} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Do đó } V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} + \frac{1}{12} V_{S.ABCD} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} = V_1.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{7}{12} V_{S.ABCD} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

$$\text{A. } k = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}. \quad \text{B. } k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \quad \text{C. } k = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}. \quad \text{D. } k = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Lời giải. Kẻ $MN \parallel AD$ ($N \in SD$) $\longrightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = k$. Khi đó mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần là $S.MBCN$ và $AMBDNC$.

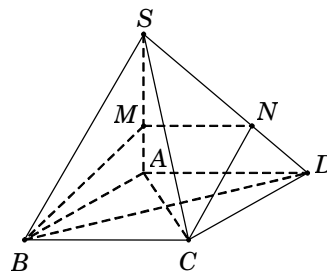
Ta có $V_{S.MBCN} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN}$.

$$\bullet \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.MBC} = k V_{S.ABC}.$$

$$\bullet \frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.MCN} = k^2 V_{S.ACD}.$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } V_{S.MBCN} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow k V_{S.ABC} + k^2 V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\longrightarrow k \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} + k^2 \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \longrightarrow k + k^2 = 1 \rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 103. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

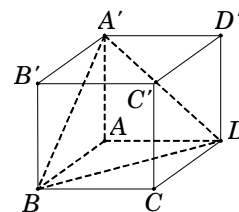
$$\text{A. } V = 6V_1. \quad \text{B. } V = 4V_1. \quad \text{C. } V = 3V_1. \quad \text{D. } V = 2V_1.$$

Lời giải. Ta có $V = S_{ABCD} \cdot AA'$ và $V_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot AA'$.

$$\text{Mà } S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \longrightarrow \frac{V}{V_1} = 6.$$

$$\text{Suy ra } V = 6V_1.$$

Chọn A.



Câu 104. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D là trung điểm AC . Tính tỉ số k của thể tích khối tứ diện $B'BAD$ và thể tích khối lăng trụ đã cho.

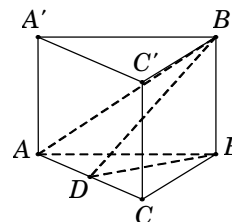
$$\text{A. } k = \frac{1}{4}. \quad \text{B. } k = \frac{1}{12}. \quad \text{C. } k = \frac{1}{3}. \quad \text{D. } k = \frac{1}{6}.$$

Lời giải. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot BB'$ và

$$V_{B'BAD} = \frac{1}{3} S_{\Delta BAD} \cdot BB'.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta BAD} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \longrightarrow k = \frac{V_{B'BAD}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}.$$

Chọn D.



Câu 105. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của chúng.

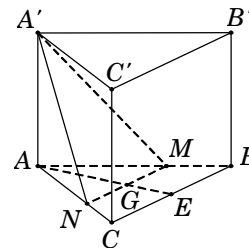
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{23}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Gọi E là trung điểm của $BC \Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua G và song song BC , cắt các cạnh AB, AC

lần lượt tại $M, N. \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$



$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \frac{2}{3} AB \\ AN = \frac{2}{3} AC \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{4}{9} S_{\Delta ABC}. \quad (1)$$

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA'$ và $V_{A'.AMN} = \frac{1}{3} S_{\Delta AMN} \cdot AA'$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $V_{A'.AMN} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{BMNC.A'B'C'} = \frac{23}{27} V_{ABC.A'B'C'}$. Vậy $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{BMNC.A'B'C'}} = \frac{4}{23}$.

Chọn B.

Câu 106. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCC'B'$.

- A. $V = 8\sqrt{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Suy ra HC' là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Do đó $60^\circ = \widehat{AC', (A'B'C')} = \widehat{AC', HC'} = \widehat{AC'H}$.

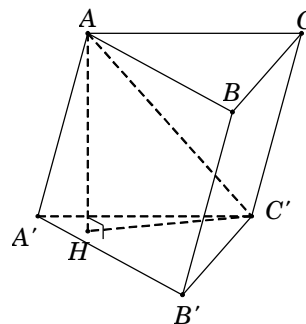
Tam giác AHC' , có $AH = AC' \cdot \sin \widehat{AC'H} = 2\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2}{2} = 4$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AH = 8\sqrt{3}$.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\Delta A'B'C'} \cdot AH = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $V_{ABCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 107. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overline{AM} = 2\overline{AC}$, $\overline{AN} = 3\overline{AB'}$ và $\overline{AP} = 4\overline{AD'}$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$ theo V .

- A. $V_{AMNP} = 8V$. B. $V_{AMNP} = 4V$. C. $V_{AMNP} = 6V$. D. $V_{AMNP} = 12V$.

Lời giải. Ta có $V = V_{AB'D'C} + (V_{AA'B'D'} + V_{CC'B'D'} + V_{D'DAC} + V_{B'BAC})$.

Mà $V_{AA'B'D'} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = V_{B'BAC} = \frac{V}{6}$. Suy ra $V_{AB'D'C} = \frac{V}{3}$.

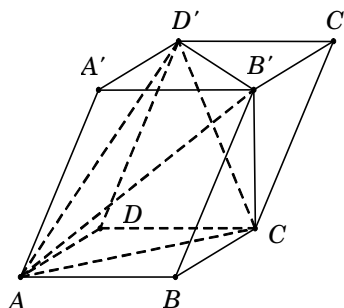
Từ giả thiết, ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{1}{3}$; $\frac{AC}{AM} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD'}{AP} = \frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{V_{A.B'D'C}}{V_{A.NPM}} = \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AD'}{AP} \cdot \frac{AC}{AM} = \frac{1}{24}$

$\longrightarrow V_{A.NPM} = 24V_{A.B'D'C} = 24 \cdot \frac{V}{3} = 8V.$

Chọn A.

Công thức giải nhanh: Thể tích của khối tứ diện (4 đỉnh nằm trên hai đường chéo của hai mặt đối diện) có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ của khối lăng trụ tam giác.



Câu 108. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $V' = \frac{2}{3}V.$

B. $V' = \frac{9}{16}V.$

C. $V' = \frac{20}{27}V.$

D. $V' = \frac{11}{18}V.$

Lời giải. Công thức giải nhanh $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{m+n+p}{3}\right)V$

với $m = \frac{AM}{AA'}, n = \frac{BN}{BB'}, p = \frac{CP}{CC'}.$

Áp dụng: $m = \frac{1}{2}, n = \frac{2}{3}, p = \frac{2}{3}$, ta được $V_{ABC.MNP} = \frac{11}{18}V.$

Chọn D.

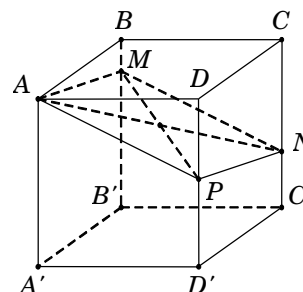
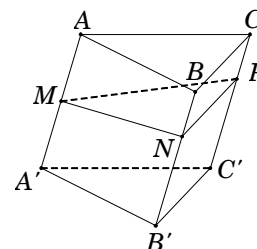
Câu 109. Người ta cần cắt một khối lập phương thành hai khối đa diện bởi một mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa điểm B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{CN}{CC'}.$

A. $k = \frac{1}{3}.$

B. $k = \frac{2}{3}.$

C. $k = \frac{3}{4}.$

D. $k = \frac{1}{2}.$



Lời giải. Công thức giải nhanh $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}}{2}.$

Theo giả thiết, ta có $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{CN}{CC'} = \frac{2}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 110. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Gọi V_1 là phần có chứa điểm B . Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}.$

A. $k = \frac{7}{32}.$

B. $k = \frac{7}{16}.$

C. $k = \frac{7}{25}.$

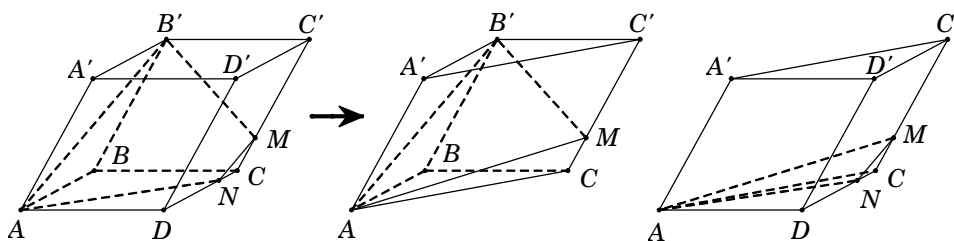
D. $k = \frac{25}{32}.$

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(CDD'C')$, kẻ $MN \parallel C'D'$ với $N \in CD$.

Suy ra $CN = \frac{1}{4}CD$ và V_1 là khối đa diện $ABB'NCM$.

Ta chia khối hộp thành hai phần (như hình vẽ). Khi đó $V_{ABB'.NCM} = V_{ABB'CM} + V_{MACN}.$



$$\bullet V_{ABB'CM} = \frac{0 + \frac{1}{4} + 1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}V\right).$$

$$\bullet V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{3} V_{ADC.A'D'C'}\right) = \frac{1}{96} V.$$

Vậy $V_1 = V_{ABCM} + V_{MACN} = \frac{7}{32} V \longrightarrow V_2 = \frac{25}{32} V \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{25}$. **Chọn C.**

Nhận xét. Ta có $V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC}$ vì diện tích giảm 4 lần và chiều cao giảm 4 lần.

Câu 111. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, mặt phẳng chứa đường thẳng AB đi qua điểm C' của cạnh SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

Lời giải.

Đặt $\frac{SC'}{SC} = x$; ($0 < x < 1$). Ta có

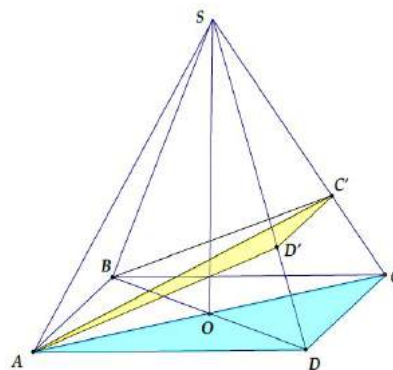
$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = x^2 \Rightarrow V_{S.AD'C'} = x^2 V_{S.ADC} = \frac{x^2}{2} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Và } \frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABC'} = x V_{S.ABC} = \frac{x}{2} V_{S.ABCD}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC'D'} = V_{S.ABC'} + V_{S.AC'D'} = \frac{x^2 + x}{2} \cdot V_{S.ABCD}.$$

Theo đề bài ta suy ra $V_{S.ABC'D'} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$



Câu 112. Cho tứ diện đều $ABCD$. Điểm M là trung điểm AB và N trên cạnh CD sao cho $\overline{CN} = 2\overline{ND}$. Tỉ số thể tích của khối $ABCD$ và khối $MNBC$ bằng

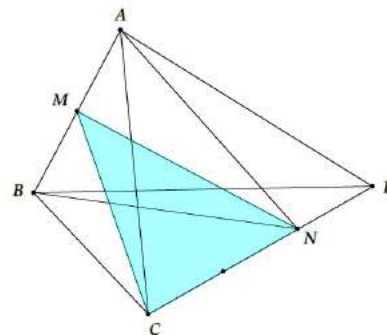
- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Ta có

$$\frac{V_{BMCN}}{V_{BACN}} = \frac{1}{2}; \frac{V_{BACN}}{V_{BACD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{BMCN}}{V_{BACN}} \cdot \frac{V_{BACN}}{V_{BACD}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{BMCN}}{V_{BACD}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{V_{BACD}}{V_{BMCN}} = 3.$$

\Rightarrow **Chọn đáp án A.**

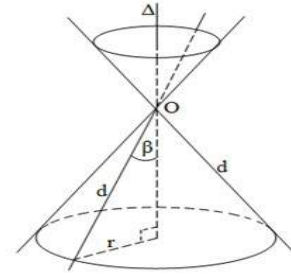


Bài 04. HÌNH NÓN - KHỐI NÓN

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1) Mặt nón tròn xoay

+ Trong mặt phẳng (P), cho 2 đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0 < \beta < 90^\circ$. Khi quay mp(P) xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

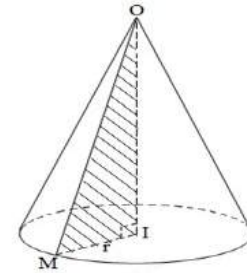


Hình 1

+ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2) Hình nón tròn xoay

+ Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).



Hình 2

+ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

+ Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.

3) Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

+ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$

+ Diện tích đáy (hình tròn): $S_{tr} = \pi \cdot r^2$

+ Diện tích toàn phần hình tròn: $S = S_{tr} + S_{xq}$

+ Thể tích khối nón: $V_{nón} = \frac{1}{3} S_{tr} \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4) Tính chất:

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh \rightarrow Thiết diện là tam giác cân.

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng không đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Nếu mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón \rightarrow giao tuyến là một đường tròn.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón \rightarrow giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón \rightarrow giao tuyến là 1 đường parabol.

5. Thiết diện qua trục:

• Thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh x. Khi đó:

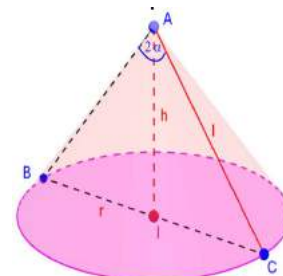
$$l = x; r = \frac{x}{2}; h = \frac{x\sqrt{3}}{2}; S_{xq} = \frac{\pi}{2} x^2; S_{tp} = \frac{3\pi}{4} x^2; V = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} x^3$$

• Thiết diện qua trục là tam giác vuông cân cạnh góc vuông bằng

$$x. \text{ Khi đó: } l = x; r = \frac{x\sqrt{2}}{2}; h = \frac{x\sqrt{2}}{2}; S_{xq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot x^2;$$

$$S_{tp} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \pi \cdot x^2; V = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi \cdot x^3$$

• Góc ở đỉnh 2α , đường sinh l. Khi đó: $h = l \cos \alpha, r = l \sin \alpha$.



6. Khối nón ngoại tiếp khối chóp:

- Khối nón ngoại tiếp khối chóp đều tứ giác có cạnh đáy là x ,

cạnh bên $SA = l$: $r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$; $h = \sqrt{l^2 - \frac{x^2}{2}}$

$S_{xq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot x \cdot l$; $S_{tp} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2}l + x)x$; $V = \frac{\pi}{6} x^2 h$

- Khối nón ngoại tiếp khối chóp đều tứ giác có các cạnh bằng x (giống thiết diện qua trục là tam giác vuông cân): $r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$;

$l = x$; $h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$; $S_{xq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot x^2$; $S_{tp} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \pi \cdot x^2$; $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi \cdot x^3$

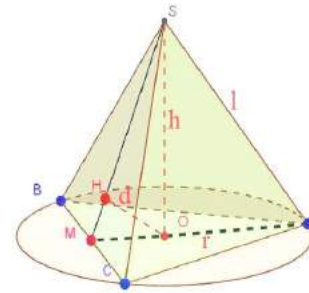
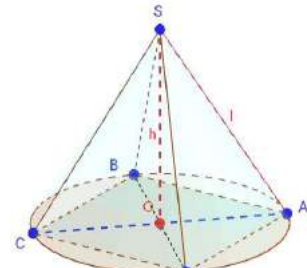
- Khối nón ngoại tiếp khối chóp đều tam giác có cạnh đáy là x ,

cạnh bên $SA = l$: $r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, $h = \sqrt{l^2 - \frac{x^2}{3}}$

$S_{xq} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \cdot x \cdot l$; $S_{tp} = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3}l + x)x$; $V = \frac{\pi}{9} x^2 h$

- Khối nón ngoại tiếp khối tứ diện đều cạnh là x : $l = x$; $r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$,

$h = \frac{x\sqrt{6}}{3}$; $S_{xq} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \cdot x^2$; $S_{tp} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3} \pi \cdot x^2$; $V = \frac{\sqrt{6}}{27} \pi \cdot x^3$



7. Khối nón nội tiếp khối chóp:

- Khối nón nội tiếp khối chóp tam giác đều có cạnh đáy là x , cạnh

bên $SA = y$: $r = \frac{x\sqrt{3}}{6}$; $h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}}$; $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

- Khối nón nội tiếp khối tứ diện đều có cạnh x : $r = \frac{x\sqrt{3}}{6}$;

$h = \frac{x\sqrt{6}}{3}$; $l = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $S_{xq} = \frac{\pi}{4} x^2$; $S_{tp} = \frac{\pi}{3} x^2$; $V = \frac{\sqrt{6}}{108} \pi \cdot x^3$

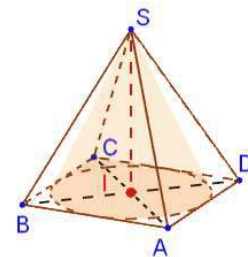
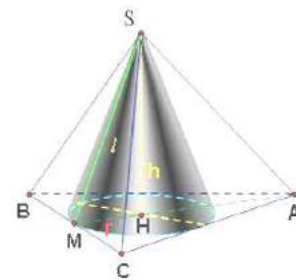
- Khối nón nội tiếp khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy là x , cạnh

bên $SA = y$: $r = \frac{x}{2}$; $h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$; $l = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

- Khối nón nội tiếp khối chóp tứ giác đều có các cạnh bằng x .

$r = \frac{x}{2}$; $h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$; $l = \frac{x\sqrt{3}}{2}$;

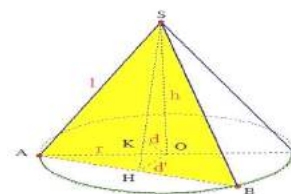
$S_{xq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \cdot x^2$; $S_{tp} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \pi \cdot x^2$; $V = \frac{\sqrt{3}}{24} \pi \cdot x^3$



8. Diện tích thiết diện đi qua đỉnh:

Diện tích thiết diện đi qua đỉnh; biết h, r, d : $AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

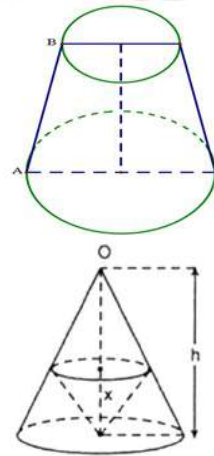
$d' = \frac{hd}{\sqrt{h^2 - d^2}}$; $SH = \frac{hd'}{d} \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SH$



9. Hình nón cụt:

$$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r'^2 + r.r')h$$

$$V_{(N')} \leq \frac{4}{27} V_{(N)} \text{ khi } h' = \frac{h}{3}$$



B – CÂU HỎI TNKQ:

Câu 1. Hình nón có đường sinh $l = 2a$ và hợp với đáy góc $\alpha = 60^\circ$. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

- A. $4\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $2\pi a^2$. D. πa^2 .

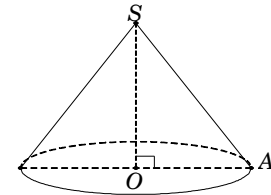
Hướng dẫn:

Theo giả thiết, ta có $SA = l = 2a$ và $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

Suy ra $R = OA = SA \cdot \cos 60^\circ = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng: $S = \pi Rl + \pi R^2 = 3\pi a^2$ (đvdt).

Chọn B.



Câu 2. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

- A. $4\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $2\pi a^2$. D. πa^2 .

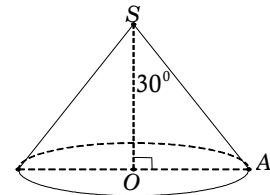
Hướng dẫn:

Theo giả thiết, ta có $OA = a\sqrt{2}$ và $\widehat{OSA} = 30^\circ$.

Suy ra độ dài đường sinh: $l = SA = \frac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích xung quanh bằng: $S_{xq} = \pi Rl = 4\pi a^2$ (đvdt).

Chọn A.



Câu 3. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng:

- A. $l = a$. B. $l = a\sqrt{2}$. C. $l = a\sqrt{3}$. D. $l = 2a$.

Hướng dẫn:

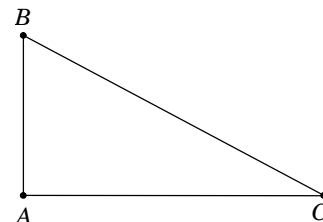
Từ giả thiết suy ra hình nón có đỉnh là B ,

tâm đường tròn đáy là A , bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$

và chiều cao hình nón là $AB = a$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là:

$$l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a. \text{ Chọn D.}$$



Câu 4. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Diện tích toàn phần và thể tích hình nón có giá trị lần lượt là:

A. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

C. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Hướng dẫn:

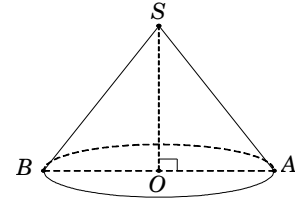
Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB . Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên

$$AB = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}, SO = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$ và $SB\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ (đvdt).

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ (đvtt). **Chọn A.**



Câu 5. Cạnh bên của một hình nón bằng $2a$. Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120° . Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\pi^2(3+\sqrt{3})$.

B. $2\pi a^2(3+\sqrt{3})$.

C. $6\pi a^2$.

D. $\pi a^2(3+2\sqrt{3})$.

Hướng dẫn:

Gọi S là đỉnh, O là tâm của đáy, thiết diện qua trục là SAB .

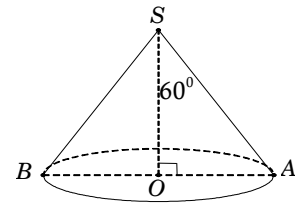
Theo giả thiết, ta có $SA = 2a$ và $\widehat{ASO} = 60^\circ$.

Trong tam giác SAO vuông tại O , ta có

$$OA = SA \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Vậy diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot OA \cdot SA + \pi(OA)^2 = \pi a^2(3+2\sqrt{3}) \text{ (đvdt). Chọn B.}$$



Câu 6. Cho mặt cầu tâm O , bán kính $R = a$. Một hình nón có đỉnh là S ở trên mặt cầu và đáy là đường tròn tương giao của mặt cầu đó với mặt phẳng vuông góc với đường thẳng SO tại H sao cho $SH = \frac{3a}{2}$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng:

A. $l = a$.

B. $l = a\sqrt{2}$.

C. $l = a\sqrt{3}$.

D. $l = 2a$.

Hướng dẫn:

Gọi S' là điểm đối xứng của S qua tâm O và A là một điểm trên đường tròn đáy của hình nón.

Tam giác SAS' vuông tại A và có đường cao AH

nên $SA^2 = SH \cdot SS' \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Chọn C.

Câu 7. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O , bán kính R . Dụng hai đường sinh SA và SB , biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60° , khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng:

A. $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.

B. $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

C. $h = a\sqrt{3}$.

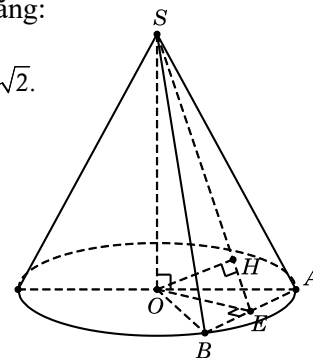
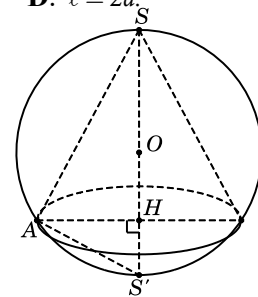
D. $h = a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết ta có tam giác OAB đều cạnh R .

Gọi E là trung điểm AB , suy ra $OE \perp AB$ và $OE = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE , suy ra $OH \perp SE$.



Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH.$

Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên $d[O, (SAB)] = OH = \frac{R}{2}.$

Trong tam giác vuông SOE , ta có $\frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{R\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Dụng hai đường sinh SA và SB , biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Đường cao h của hình nón bằng:

- A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = a\sqrt{3}$. D. $h = a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S .

Gọi E là trung điểm AB , suy ra $\begin{cases} SE \perp AB \\ OE \perp AB \end{cases}$ và $SE = \frac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot SE = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}AB = 4a^2 \Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SE = 2a$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE , suy ra $OH \perp SE$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH.$

Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên $30^\circ = \widehat{SO, (SAB)} = \widehat{SO, SH} = \widehat{OSH} = \widehat{OSE}.$

Trong tam giác vuông SOE , ta có $SO = SE \cdot \cos \widehat{OSE} = a\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng:

- A. $\ell = a$. B. $\ell = a\sqrt{2}$. C. $\ell = a\sqrt{3}$. D. $\ell = 2a$.

Hướng dẫn:

Gọi I là trung điểm AB , suy ra $OI \perp AB$, $SI \perp AB$ và $OI = a$.

Trong tam giác vuông SOA , ta có $OA = SA \cdot \cos \widehat{SAO} = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SIA , ta có $IA = SA \cdot \cos \widehat{SAB} = \frac{SA}{2}$.

Trong tam giác vuông OIA , ta có

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}SA^2 = a^2 + \frac{1}{4}SA^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 10. Một hình nón có bán kính đáy R , góc ở đỉnh là 60° . Một thiết diện qua đỉnh nón chắn trên đáy một cung có số đo 90° . Diện tích của thiết diện là:

- A. $\frac{R^2\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3R^2}{2}$. D. $\frac{R^2\sqrt{6}}{2}$.

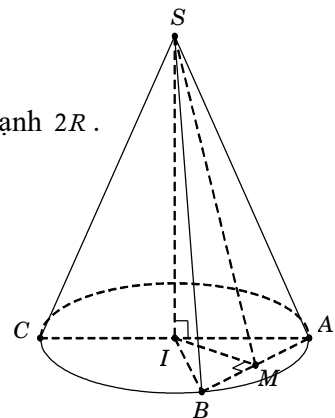
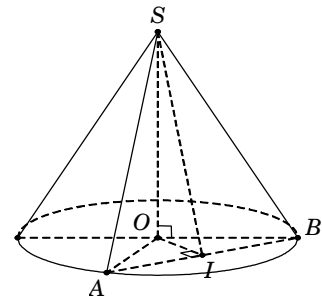
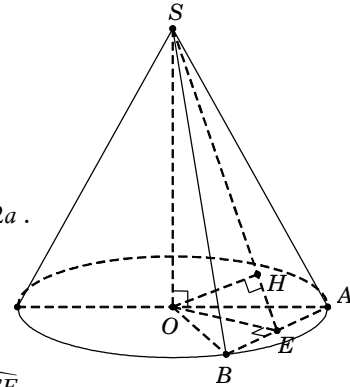
Hướng dẫn:

Vì góc ở đỉnh là 60° nên thiết diện qua trục SAC là tam giác đều cạnh $2R$.

Suy ra đường cao của hình nón là $SI = R\sqrt{3}$.

Tam giác SAB là thiết diện qua đỉnh, chắn trên đáy cung AB có số đo bằng 90° nên IAB là tam giác vuông cân tại I , suy ra $AB = R\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AB thì $\begin{cases} IM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases}$ và $IM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.



Trong tam giác vuông SIM , ta có $SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB.SM = \frac{R^2\sqrt{7}}{2}$ (đvdt). **Chọn A.**

Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3}{9}$. C. $\frac{4\pi a^3}{27}$. D. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn:

Gọi E là trung điểm của BC , dựng $OH \perp SE$ tại H .

Chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $OH = d[O, (SBC)] = \frac{a}{2}$.

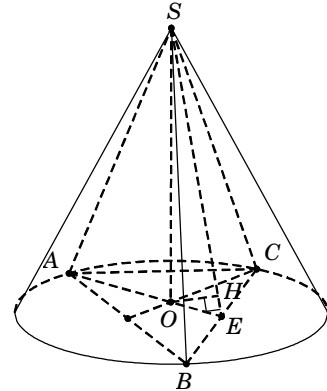
Trong tam giác đều ABC , ta có

$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OA = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SOE , ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a.$$

Vậy thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \frac{4\pi a^3}{9}$ (đvtt). **Chọn B.**



Câu 12. Cho hình nón có đỉnh S , đường cao $SO = h$, đường sinh SA . Nội tiếp hình nón là một hình chóp đỉnh S , đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a . Nửa góc ở đỉnh của hình nón có tan bằng:

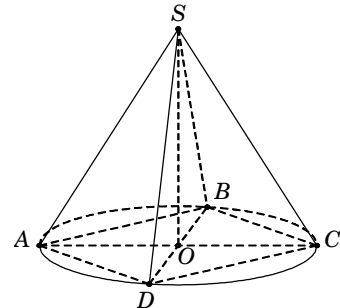
- A. $\frac{h\sqrt{2}}{2a}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2h}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{h}$. D. $\frac{h\sqrt{2}}{a}$.

Hướng dẫn:

Nửa góc ở đỉnh của hình nón là góc \widehat{ASO} .

Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA , ta có $\tan \widehat{ASO} = \frac{OA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2h}$. **Chọn C**



Câu 13. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R . Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn ($O; R$). Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Hướng dẫn:

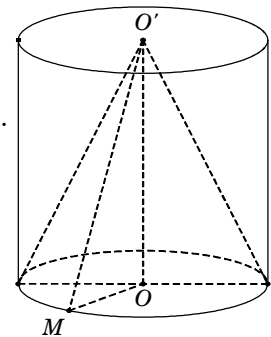
Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq(T)} = 2\pi R.h = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Kẻ đường sinh $O'M$ của hình nón, suy ra

$$\ell = O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq(N)} = \pi R\ell = \pi R.2R = 2\pi R^2$ (đvdt).

Vậy $\frac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \sqrt{3}$. **Chọn C.**



Câu 14. Một hình nón có đường cao bằng 9cm nội tiếp trong một hình cầu bán kính bằng 5cm . Tỷ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là:

- A. $\frac{27}{500}$. B. $\frac{81}{500}$. C. $\frac{27}{125}$. D. $\frac{81}{125}$.

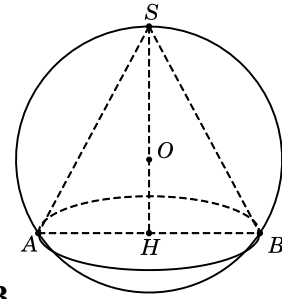
Hướng dẫn:

Hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $SH = 9\text{cm}$, $OS = OA = 5\text{cm}$.

Suy ra $OH = 4\text{cm}$ và $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 3\text{cm}$.

Thể tích khối nón $V_n = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot SH = 27\pi$ (đvtt).

Thể tích khối cầu $V_c = \frac{4}{3}\pi \cdot SO^3 = \frac{500\pi}{3}$ (đvtt). Suy ra $\frac{V_n}{V_c} = \frac{81}{500}$. **Chọn B.**



Câu 15. Cho hình nón có bán kính đáy là $5a$, độ dài đường sinh là $13a$. Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng:

- A. $\frac{4000\pi a^3}{81}$. B. $\frac{4000\pi a^3}{27}$. C. $\frac{40\pi a^3}{9}$. D. $\frac{400\pi a^3}{27}$.

Hướng dẫn:

Xét mặt phẳng qua trục SO của hình nón ta được thiết diện là tam giác cân SAB .

Mặt phẳng đó cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính r (bán kính mặt cầu) và nội tiếp trong tam giác cân SAB .

Trong tam giác vuông SOB , gọi I là giao điểm của đường phân giác trong góc B với đường thẳng SO .

Chứng minh được I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và bán kính $r = IO = IE$ (E là hình chiếu vuông góc của I trên SB).

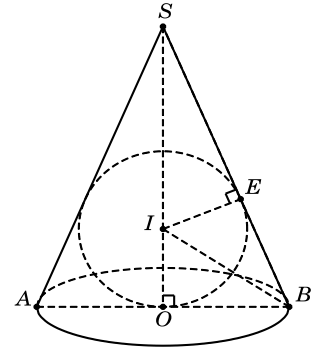
Theo tính chất phân giác, ta có $\frac{IS}{IO} = \frac{BS}{BO} = \frac{13}{5}$.

Lại có $IS + IO = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 12$.

Từ đó suy ra $IS = \frac{26}{3}$, $IO = \frac{10}{3}$.

Ta có $\triangle SEI \sim \triangle SOB$ nên $\frac{IE}{IS} = \frac{BO}{BS} = \frac{5}{13} \Rightarrow IE = \frac{5}{13} IS = \frac{10}{3}$.

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10a}{3}\right)^3 = \frac{4000\pi a^3}{81}$ (đvtt). **Chọn A.**



Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABC, A'B'C'$. Biết góc giữa đường thẳng $O'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón đỉnh O' , đáy là đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{27}$ B. $\frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{9}$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{27}$

Hướng dẫn: Từ giả thiết có $\widehat{(O'B, (ABC))} = \widehat{(O'B, OB)} = \widehat{O'BO} = 30^\circ \Rightarrow \tan \widehat{O'BO} = \frac{OO'}{OB}$

$\Rightarrow h = OO' = \tan 30^\circ \cdot OB = \tan 30^\circ \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}$. Vậy $V_{hn} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{\pi a^3}{27}$.

Gọi M là điểm chính giữa của cung $AB \Rightarrow l = O'M = \sqrt{O'O^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{3}$.

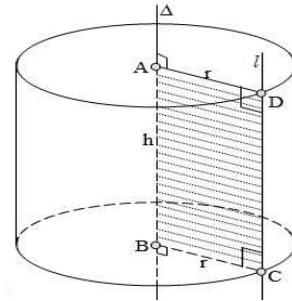
Do đó, diện tích xung quanh của khối nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{9}$. **Chọn A**

Bài 05. HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1) Mặt trụ tròn xoay

- + Trong mp(P) cho hai đường thẳng Δ và ℓ song song nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay mp(P) quanh trục cố định Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.
- + Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- + Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh.
- + Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.



2) Hình trụ tròn xoay

- + Khi quay hình chữ nhật ABCD xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc ABCD tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.
- + Đường thẳng AB được gọi là trục.
- + Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
- + Độ dài đoạn thẳng AB = CD = h được gọi là chiều cao của hình trụ.
- + Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.
- + Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3) Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r , khi đó:

- + Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$
- + Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2\pi rh + 2\pi r^2$
- + Thể tích khối trụ: $V = Bh = \pi r^2 h$

4) Tính chất:

- + Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một mp(α) vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
- + Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một mp(α) không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trục nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin \alpha}$, trong đó α là góc giữa trục Δ và mp(α) với $0 < \alpha < 90^\circ$.

Cho mp(α) song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng k .

- + Nếu $k < r$ thì mp(α) cắt mặt trụ theo hai đường sinh \rightarrow thiết diện là hình chữ nhật.
- + Nếu $k = r$ thì mp(α) tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.
- + Nếu $k > r$ thì mp(α) không cắt mặt trụ.

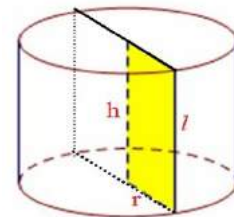
5. Thiết diện qua trục:

- Thiết diện qua trục là hình chữ nhật có các cạnh lần lượt $2r$, h .

- Thiết diện qua trục là hình vuông có cạnh x thì:

$$r = \frac{x}{2}; l = h = x \text{ và có: } S_{xq} = \pi \cdot x^2; S_{tp} = \frac{3}{2} \pi \cdot x^2; V = \frac{\pi}{4} \cdot x^3$$

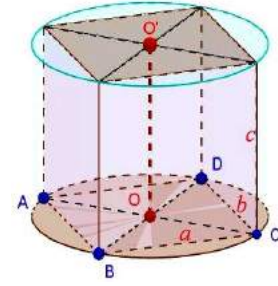
6. Khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật:



- Khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có 3 kích thước lần lượt a, b, c (như hình). Khi đó:

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}; l = h = c; S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot c;$$

$$V = \pi \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot c; S_{tp} = \pi \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} \cdot c + \frac{a^2 + b^2}{2} \right)$$



- Khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có đáy hình vuông cạnh x , cạnh bên bằng l . Khi đó:

$$r = \frac{x\sqrt{2}}{2}; l = h; S_{xq} = \pi\sqrt{2} \cdot xl; S_{tp} = \pi \cdot (\sqrt{2}l + x)x; V = \frac{\pi}{2} \cdot x^2 h$$

- Khối trụ ngoại tiếp khối lập phương cạnh x .

$$r = \frac{x\sqrt{2}}{2}; l = h = x; S_{xq} = \pi\sqrt{2} \cdot x^2; S_{tp} = \pi(\sqrt{2} + 1) \cdot x^2; V = \frac{\pi}{2} \cdot x^3$$

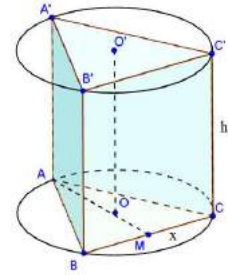
7. Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đều tam giác:

- Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đều tam giác có cạnh bằng x , cạnh bên bằng h . Khi đó:

$$r = \frac{x\sqrt{3}}{3}; l = h; S_{xq} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \cdot xh; V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 h; S_{tp} = \frac{2}{3} \pi \cdot x(x + \sqrt{3}h)$$

- Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đều tam giác có các cạnh bằng x . Khi đó:

$$r = \frac{x\sqrt{3}}{3}; l = h = x; S_{xq} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \cdot x^2; V = \frac{\pi}{3} \cdot x^3; S_{tp} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3} \pi \cdot x^2$$



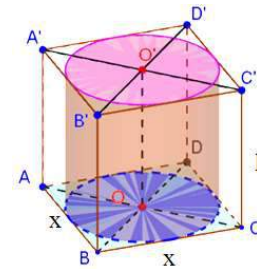
8. Khối trụ nội tiếp khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông:

- Khối trụ nội tiếp khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh x , cạnh bên l . Khi đó:

$$r = \frac{x}{2}; l = h; S_{xq} = \pi \cdot xl; S_{tp} = \frac{\pi}{2} \cdot x(x + 2l); V = \frac{\pi}{4} \cdot x^2 h$$

- Khối trụ nội tiếp khối lập phương cạnh x .

$$r = \frac{x}{2}; l = h = x; S_{xq} = \pi \cdot x^2; S_{tp} = \frac{3\pi}{2} \cdot x^2; V = \frac{\pi}{4} \cdot x^3$$



9. Khối trụ nội tiếp khối lăng trụ tam giác đều:

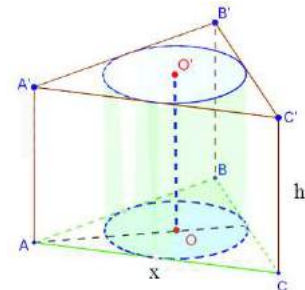
- Khối trụ nội tiếp khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng x , cạnh bên $l = h$. Khi đó:

$$r = \frac{x\sqrt{3}}{6}; l = h; S_{xq} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \cdot xl; S_{tp} = \frac{\pi}{6} \cdot x(x + 2\sqrt{3}l); V = \frac{\pi}{12} \cdot x^2 h$$

- Khối trụ nội tiếp khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh

$$\text{bằng } x. \text{ Khi đó: } r = \frac{x\sqrt{3}}{6}; l = h = x; S_{xq} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \cdot x^2;$$

$$S_{tp} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{6} \pi \cdot x^2; V = \frac{\pi}{12} \cdot x^3$$



10. Thiết diện song song với trục:

- Thiết diện song song với trục và cách trục 1 khoảng d . Khi đó:

$$AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}; S_{ABCD} = 2h\sqrt{r^2 - d^2}$$

- Thiết diện song song với trục là HÌNH VUÔNG có diện tích S và cách trục 1 khoảng d . Khi đó:

$$h = \sqrt{S}; r = \frac{1}{2}\sqrt{S + 4d^2}; V = \frac{\pi}{4}(S + 4d^2)\sqrt{S}.$$

11. Mặt phẳng qua trung điểm trục cắt 2 đáy theo 2 dây:

Mặt phẳng qua trung điểm trục cắt 2 đáy theo 2 dây AB, CD .

Khi đó hình chữ nhật $ABCD$ có:

$$BD = \sqrt{h^2 + 4R^2}$$

12. Dây AB tạo với trục OO' một góc α :

Dây AB tạo với trục OO' một góc α . Khi đó:

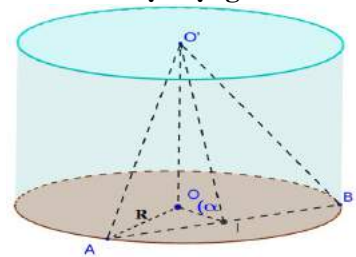
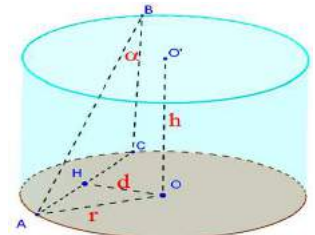
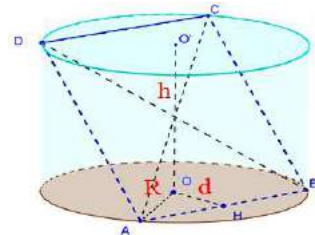
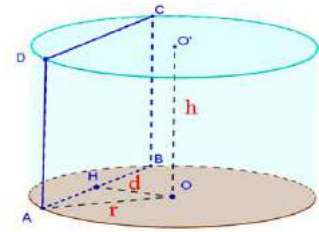
- Khoảng cách giữa OO' và AB :

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - h^2 \tan^2 \alpha}$$

13. Tam giác $O'AB$ đều và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy của hình trụ một góc α :

Tam giác $O'AB$ đều và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy của hình trụ một góc α . Khi đó:

- Cạnh $AB = \frac{2R}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}}$
- $h = OO' = R \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$
- $S_{xq} = 2\pi R^2 \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$
- $V_{(T)} = \pi R^3 \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$



B – CÂU HỎI TNKQ:

Câu 1. Xét các mệnh đề

(I) Tập hợp các đường thẳng d thay đổi nhưng luôn luôn song song và cách đường thẳng Δ cố định một khoảng không đổi là một mặt trụ.

(II) Hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian mà diện tích tam giác MAB không đổi là một mặt trụ.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả (I) và (II). D. Không có mệnh đề đúng.

Hướng dẫn: Hiển nhiên (I) đúng.

Diện tích tam giác MAB không đổi khi và chỉ khi khoảng cách từ M đến đường thẳng AB không đổi (giả sử bằng R).

Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ bán kính R và trục là AB .

Vì vậy Mệnh đề (II) cũng đúng. Chọn C.

Câu 2. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a . Thể tích khối trụ bằng:

- A. πa^3 . B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{4}$.

Hướng dẫn: Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = a$.

Bán kính đáy $R = \frac{a}{2}$. Do đó thể tích khối trụ $V = R^2\pi.h = \frac{\pi a^3}{4}$ (đvtt). Chọn D.

Câu 3. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lần lượt có giá trị là:

A. $2(\sqrt{3}+1)\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2$.

B. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2(\sqrt{3}+1)\pi R^2$.

C. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\pi R^2$.

D. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2 + R^2$.

Hướng dẫn: Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{day} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2(\pi R^2) = 2(\sqrt{3}+1)\pi R^2 \text{ (đvdt)}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 4. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh có cạnh bằng $2R$. Diện tích toàn phần của khối trụ bằng:

A. $4\pi R^2$.

B. $6\pi R^2$.

C. $8\pi R^2$.

D. $2\pi R^2$.

Hướng dẫn: Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = 2R$.

Diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 2\pi R(R+h) = 6\pi R^2$ (đvdt). Chọn B.

Câu 5. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 70\text{cm}$, chiều cao hình trụ $h = 20\text{cm}$. Một hình vuông có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục hình trụ. Khi đó cạnh của hình vuông bằng bao nhiêu?

A. 80cm.

B. 100cm.

C. $100\sqrt{2}\text{cm}$.

D. 140cm.

Hướng dẫn: Xét hình vuông $ABCD$ có AD không song song và không vuông góc với trục OO' của hình trụ.

Dựng đường sinh AA' , ta có $\begin{cases} CD \perp AA' \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AA'D) \Rightarrow CD \perp A'D$.

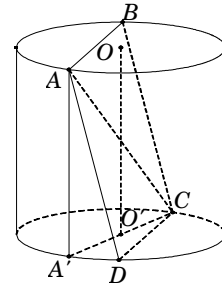
Suy ra $A'C$ là đường kính đáy nên

$$A'C = 2R = 140\text{cm}.$$

Xét tam giác vuông $AA'C$, ta có

$$AC = \sqrt{AA'^2 + A'C^2} = 100\sqrt{2}\text{cm}.$$

Suy ra cạnh hình vuông bằng 100cm. Chọn B.



Câu 6. Bán kính đáy hình trụ bằng 4cm, chiều cao bằng 6cm. Độ dài đường chéo của thiết diện qua trục bằng:

A. 10cm.

B. 6cm.

C. 5cm.

D. 8cm.

Hướng dẫn: Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt bằng đường kính đáy và chiều cao của hình trụ. Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 8cm và 6cm. Do đó độ dài đường chéo: $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{cm}$. Chọn A.

Câu 7. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng:

A. R .

B. $R\sqrt{3}$.

C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn:

Từ hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $OA = O'B = R$.

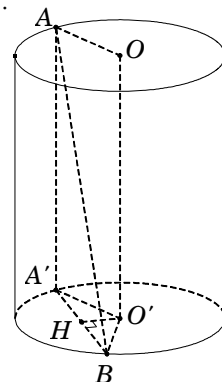
Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì

$$O'A' = R, AA' = R\sqrt{3} \text{ và } \widehat{BAA'} = 30^\circ.$$

Vì $OO' \parallel (ABA')$ nên $d[OO', (AB)] = d[OO', (ABA')] = d[O', (ABA')]$.

Gọi H là trung điểm $A'B$, suy ra

$$\begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \text{ nên } d[O', (ABA')] = O'H.$$



Tam giác ABA' vuông tại A' nên $BA' = AA' \tan 30^\circ = R$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều có cạnh bằng R nên $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Chọn C

Câu 8. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Hướng dẫn:

Kẻ đường sinh AA' , gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên $A'D$.

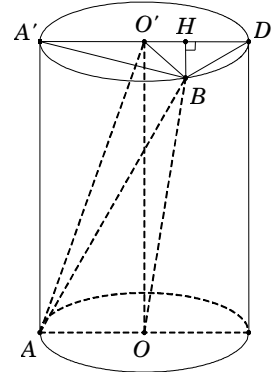
Ta có $BH \perp (AOO'A')$ nên $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} S_{\Delta AOO'} \cdot BH$.

Trong tam giác vuông $A'AB$ có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông $A'BD$ có $BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$.

Do đó suy ra tam giác $BO'D$ nên $BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}a^2\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ (đvtt). Chọn A.



Câu 9. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$

và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{9}$.

Hướng dẫn: Dựng đường sinh BB' , gọi I là trung điểm của AB' , ta có

$$\begin{cases} OI \perp AB' \\ OI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABB').$$

Suy ra $d[AB, OO'] = d[OO', (ABB')] = d[O, (ABB')] = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R .

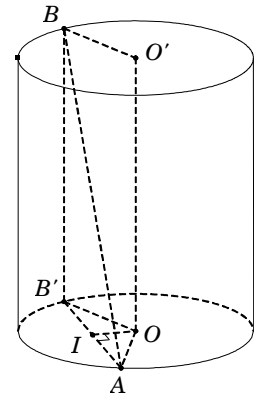
Vì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên $OO' = BB' = 2R$.

Trong tam giác vuông $AB'B$, ta có $AB'^2 = AB^2 - BB'^2 = 4a^2 - 4R^2$.

Trong tam giác vuông OIB' , ta có

$$OB'^2 = OI^2 + IB'^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB'}{2}\right)^2.$$

Suy ra $AB'^2 = 4R^2 - 3a^2$. Từ đó ta có $4a^2 - 4R^2 = 4R^2 - 3a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{4}$. Chọn A.



Câu 10. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

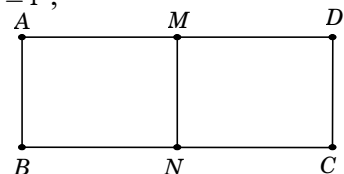
- A. 2π . B. 3π . C. 4π . D. 8π .

Hướng dẫn: Theo giả thiết ta được hình trụ có chiều cao $h = AB = 1$,

bán kính đáy $R = \frac{AD}{2} = 1$.

Do đó diện tích toàn phần: $S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn C.



Câu 11. Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuộn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng $2a$ thì thể tích của nó bằng:

- A. $\frac{a^3}{\pi}$. B. πa^3 . C. $\frac{a^3}{2\pi}$. D. $2\pi a^3$.

Hướng dẫn: Gọi bán kính đáy là R .

Hình trụ có chu vi đáy bằng $2a$ nên ta có $2\pi R = 2a \Leftrightarrow R = \frac{a}{\pi}$.

Suy ra hình trụ này có đường cao $h = a$.

Vậy thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 a = \frac{a^3}{\pi}$ (đvtt). Chọn A.

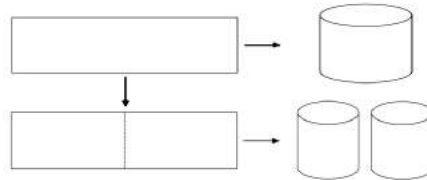
Câu 12. Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuộn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chiều dài đường sinh bằng $2a$ thì bán kính đáy bằng:

- A. $\frac{a}{\pi}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{2\pi}$. D. $2\pi a$.

Hướng dẫn: Gọi bán kính đáy là R .

Từ giả thiết suy ra $h = 2a$ và chu vi đáy bằng a . Do đó $2\pi R = a \Leftrightarrow R = \frac{a}{2\pi}$. Chọn C.

Câu 13. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa sau đây):



- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 4.

Hướng dẫn: Công thức thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h$.

• Ở cách 1, suy ra $h = 50\text{cm}$ và $2\pi R_1 = 240 \Leftrightarrow R_1 = \frac{120}{\pi}$. Do đó $V_1 = \pi \cdot \left(\frac{120}{\pi}\right)^2 \cdot 50$ (đvtt).

• Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có $h = 50\text{cm}$ và $2\pi R_2 = 120 \Leftrightarrow R_2 = \frac{60}{\pi}$.

Do đó $V_2 = 2 \times \left[\pi \cdot \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \cdot 50 \right]$ (đvtt). Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Chọn C.

Câu 14. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

- A. $h = R$. B. $h = \sqrt{2}R$. C. $h = \sqrt{3}R$. D. $h = 2R$.

Hướng dẫn: Công thức tính thể tích $V = \pi R^2 h$, suy ra $h = \frac{V}{\pi R^2}$.

Hộp sữa chỉ kín một đáy nên diện tích tôn cần dùng là: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{day}} = 2\pi Rh + \pi R^2 = \frac{2V}{R} + \pi R^2$.

Xét hàm $f(R) = \frac{2V}{R} + \pi R^2$ trên $(0; +\infty)$, ta được $\min_{(0; +\infty)} f(R)$ đạt tại $R = h$. Chọn A.

Câu 15. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2R}{3}$.

Hướng dẫn:

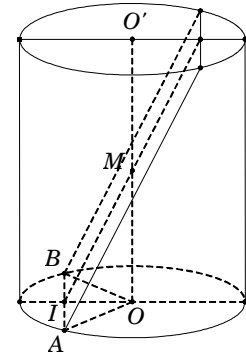
Hình vẽ, kết hợp với giả thiết ta có:

$$OA = OB = R, OO' = 2R \text{ và } \widehat{IMO} = 30^\circ.$$

Trong tam giác vuông MOI , ta có $OI = MO \cdot \tan 30^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông AIO , ta có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $AB = 2IA = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Chọn C.



Câu 16. Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước 6 x 5 x 6 cm. Hỏi muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, khi đó số viên phấn?

- A. Vừa đủ. B. Thiếu 10 viên. C. Thừa 10 viên. D. Không xếp được

Hướng dẫn: Vì chiều cao viên phấn là 6 cm, nên chọn đáy của hộp carton có kích thước 5 x 6. Mỗi viên phấn có đường kính 1 cm nên mỗi hộp ta có thể đựng được 5 x 6 = 30 viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là : 30 x 12 = 360 viên

Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên.

Câu 17. Khối trụ có bán kính đáy $R = a$. Thiết diện song song với trục và cách trục khối trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$. B. $V = 2\sqrt{3}\pi a^3$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn: Khối trụ có bán kính đáy $R = a$; Thiết diện song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ nên thiết diện chắn trên đáy một dây có độ dài bằng $a\sqrt{3} \Rightarrow$ chiều cao của

khối trụ $h = a$. Thể tích khối trụ bằng $3\pi a^3$. Chọn: C.

Câu 18. Một hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{1}{2}a^3\pi$. B. $V = \frac{1}{4}a^3\pi$. C. $V = \frac{1}{3}a^3\pi$. D. $V = a^3\pi$.

Hướng dẫn:

Vì hình tròn nội tiếp hình vuông nên có bán kính là $\frac{a}{2}$.

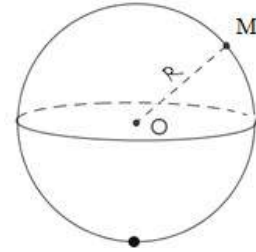
Thể tích khối trụ là $V = B.h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 .a = \frac{\pi a^3}{4}$.

Bài 06. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

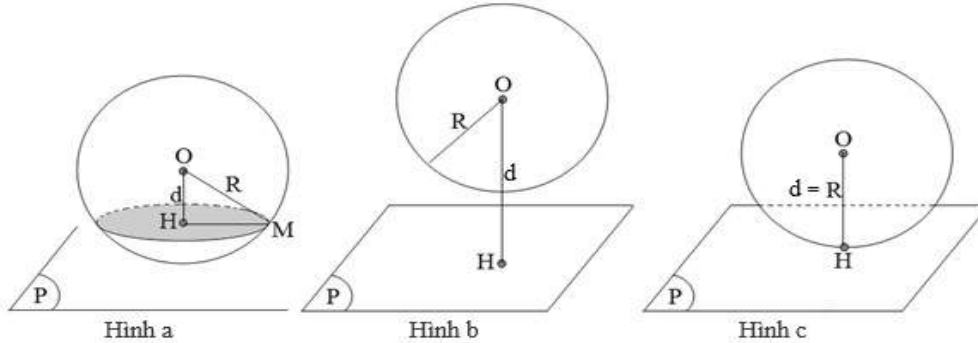
A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa

- Mặt cầu: $S(O; R) = \{M | OM = R\}$
- Khối cầu: $V(O; R) = \{M | OM \leq R\}$



2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng



Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi $d = d(O; (P))$.

• Nếu $d < R$ thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) , có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

- Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H . ((P) được gọi là tiếp diện của (S))
- Nếu $d > R$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

Khi $d = 0$ thì (P) đi qua tâm O và được gọi là mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng R được gọi là đường tròn lớn.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi $d = d(O; \Delta)$.

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) . (Δ được gọi là tiếp tuyến của (S)).
- Nếu $d > R$ thì Δ và (S) không có điểm chung.

4. Mặt cầu ngoại tiếp – nội tiếp

	Mặt cầu ngoại tiếp	Mặt cầu nội tiếp
Hình đa diện	Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu	Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu
Hình trụ	Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu	Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ
Hình nón	Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón	Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón

5. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

* Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

• Cách 1: Nếu $(n - 2)$ đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.

• Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- Xác định trục Δ của đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.
- Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

* Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng:

- Xác định trục Δ của hai đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Trung điểm đoạn nối hai tâm đa giác đáy là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

6. Diện tích – Thể tích

Diện tích: $S = 4\pi R^2$

Thể tích: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

7. Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là a, b, c :

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

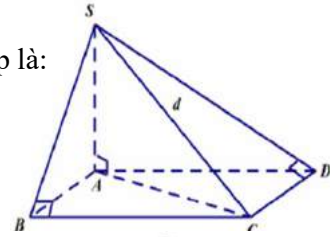
Đặt biệt: Hình lập phương cạnh a có tâm mặt cầu ngoại tiếp là:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

8. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới một góc vuông:

Gọi d là độ dài đoạn thẳng trên thì ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp là:

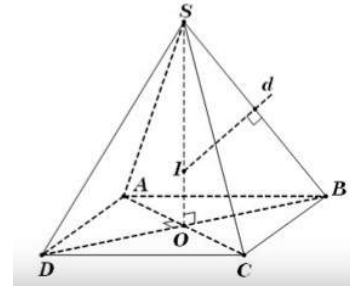
$$R = \frac{d}{2}$$



9. Khối chóp đều đáy là tam giác, tứ giác:

Trong đó R, c_b, h lần lượt là bán kính khối cầu, cạnh bên của khối chóp, chiều cao của khối chóp:

$$R = \frac{(c_b)^2}{2h}$$

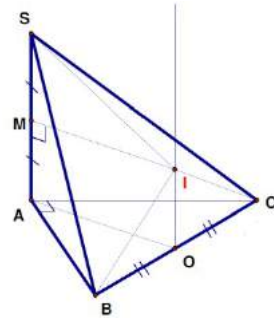


10. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:

• Trong đó R, h, r_d lần lượt là bán kính mặt cầu, chiều cao hình chóp, bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (r_d)^2}$$

- Nếu đáy là tam giác đều ABC cạnh a trọng tâm G thì $r_d = AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
- Nếu đáy là tam giác ABC vuông tại A thì $r_d = \frac{BC}{2}$
- Nếu đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật $ABCD$ thì $r_d = \frac{AC}{2}$

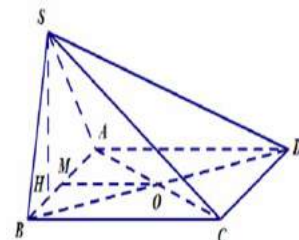


11. Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Đối với loại này thì mặt bên vuông góc thường là tam giác vuông, tam giác cân hoặc đều

Gọi h là chiều cao hình chóp và R_b, R_d là bán kính của mặt bên, mặt đáy, GT là độ dài giao tuyến của mặt

bên và đáy thì bán kính mặt cầu: $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{GT^2}{4}}$



B – CÂU HỎI TNKQ:

Câu 1. Cho đường tròn (C) đường kính AB và đường thẳng Δ . Để hình tròn xoay sinh bởi (C) khi quay quanh Δ là một mặt cầu thì cần có thêm điều kiện nào sau đây:

- (I) Đường kính AB thuộc Δ .
 (II) Δ cố định và đường kính AB thuộc Δ .
 (III) Δ cố định và hai điểm A, B cố định trên Δ .
 A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Chỉ (III). D. Không cần thêm điều kiện nào.

Hướng dẫn: Chọn C.

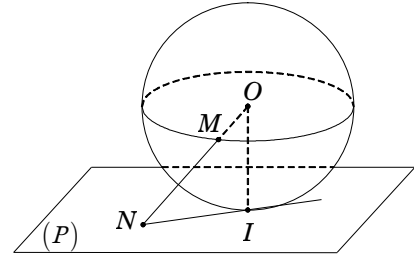
Câu 2. Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính R và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến O bằng R . Một điểm M tùy ý thuộc (S) . Đường thẳng OM cắt (P) tại N . Hình chiếu của O trên (P) là I . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. NI tiếp xúc với (S) . B. $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$.
 C. Cả A và B đều sai. D. Cả A và B đều đúng.

Hướng dẫn:

Vì I là hình chiếu của O trên (P) nên $d[O, (P)] = OI$ mà $d[O, (P)] = R$ nên I là tiếp điểm của (P) và (S) . Đường thẳng OM cắt (P) tại N nên IN vuông góc với OI tại I . Suy ra IN tiếp xúc với (S) .

Tam giác OIN vuông tại I nên $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$. **Chọn D.**



Câu 3. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A , biết $OA = 2R$. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B . Khi đó độ dài đoạn AB bằng:

- A. R . B. $\frac{R}{2}$. C. $R\sqrt{2}$. D. $R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên $AB \perp OB$.

Suy ra $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. **Chọn D.**

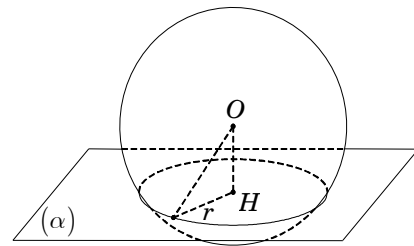
Câu 4. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (α) . Biết khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với $S(O; R)$ là một đường tròn có đường kính bằng:

- A. R . B. $R\sqrt{3}$.
 C. $\frac{R}{2}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn: Gọi H là hình chiếu của O xuống (α) .

Ta có $d[O, (\alpha)] = OH = \frac{R}{2} < R$ nên (α) cắt $S(O; R)$ theo đường tròn $C(H; r)$. Bán kính đường tròn $C(H; r)$ là

$r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Suy ra đường kính bằng $R\sqrt{3}$. **Chọn B.**



Câu 5. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A , biết $OA = 2R$. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại B và C sao cho $BC = R\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ O đến BC bằng:

- A. R . B. $\frac{R}{2}$. C. $R\sqrt{2}$. D. $R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Gọi H là hình chiếu của O lên BC .

Ta có $OB = OC = R$, suy ra H là trung điểm của BC nên $HC = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \frac{R}{2}$. **Chọn B.**

Câu 6. Cho mặt cầu tâm I bán kính $R = 2,6\text{cm}$. Một mặt phẳng cắt mặt cầu và cách tâm I một khoảng bằng $2,4\text{cm}$. Thế thì bán kính của đường tròn do mặt phẳng cắt mặt cầu tạo nên là:

- A. $1,2\text{cm}$. B. $1,3\text{cm}$. C. 1cm . D. $1,4\text{cm}$.

Hướng dẫn: Mặt phẳng cắt mặt cầu $S(I; 2,6\text{cm})$ theo một đường tròn $(H; r)$.

Vậy $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{(2,6)^2 - (2,4)^2} = 1\text{cm}$. **Chọn C.**

Câu 7. Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là p . Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\frac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

- A. $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$. B. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. C. $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$. D. $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Hướng dẫn: Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R .

Theo giả thiết, ta có $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2 = \frac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$. Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Chọn D.

Câu 8. Một hình cầu có bán kính là 2m , một mặt phẳng cắt hình cầu theo một hình tròn có độ dài là $2,4\pi\text{m}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là:

- A. $1,6\text{m}$. B. $1,5\text{m}$. C. $1,4\text{m}$. D. $1,7\text{m}$.

Hướng dẫn: Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là d , ta có $d^2 = R^2 - r^2$.

Theo giả thiết $R = 2\text{m}$ và $2\pi r = 2,4\pi\text{m} \Rightarrow r = \frac{2,4\pi}{2\pi} = 1,2\text{m}$. Vậy $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 1,6\text{m}$. **Chọn A.**

Câu 9. Cho mặt cầu $S(O; R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng 60° .

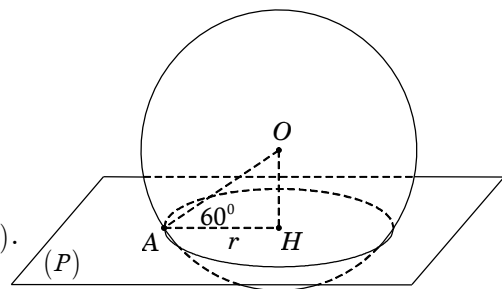
Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

- A. πR^2 . B. $\frac{\pi R^2}{2}$.
C. $\frac{\pi R^2}{4}$. D. $\frac{\pi R^2}{8}$.

Hướng dẫn:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì

- H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S) .
- $\widehat{OA, (P)} = \widehat{OA, AH} = 60^\circ$.



Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r = HA = OA \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$.

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. **Chọn C.**

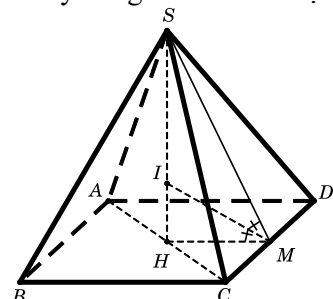
Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a . Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. C. $\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$. D. $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn:

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy.



Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân giác trong của góc \widehat{SMH} ($I \in SH$).

Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $r = IH$.

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad MH = \frac{a}{2}.$$

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH \cdot MH}{MS + MH} = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}. \quad \text{Chọn B}$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $3a$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $a\sqrt{6}$.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm AC , suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi I là trung điểm SC , suy ra $IM \parallel SA$ nên $IM \perp (ABC)$.

Do đó IM là trục của ΔABC , suy ra

$$IA = IB = IC. \quad (1)$$

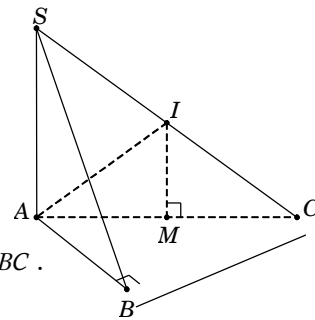
Hơn nữa, tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC

nên $IS = IC = IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $IS = IA = IB = IC$

hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Vậy bán kính } R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \quad \text{Chọn C.}$$



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ta được:

- A. $a^2\sqrt{2}$. B. $8\pi a^2$. C. $2a^2$. D. $2\pi a^2$.

Hướng dẫn:

Gọi $O = AC \cap BD$

suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm SC , suy ra $IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Do đó IO là trục của hình vuông $ABCD$, suy ra

$$IA = IB = IC = ID. \quad (1)$$

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC

nên $IS = IC = IA$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } R = IA = IB = IC = ID = IS = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt). **Chọn B.**

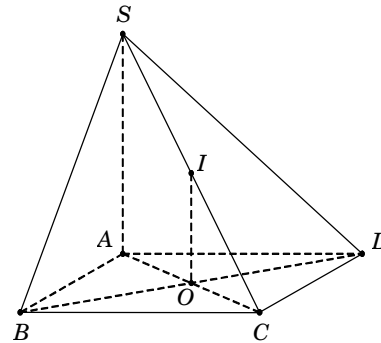
Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn: Gọi M là trung điểm AC , suy ra $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

Tam giác SAC có SM là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác SAC cân tại S .

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SAC đều.



Gọi G là trọng tâm ΔSAC , suy ra $GS = GA = GC$. (1)

Tam giác ABC vuông tại B , có M là trung điểm cạnh huyền

AC nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

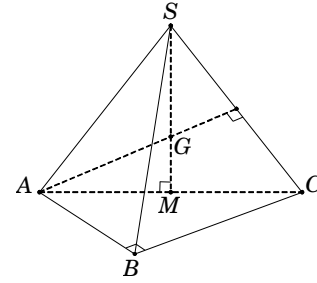
Lại có $SM \perp (ABC)$ nên SM là trục của tam giác ABC .

Mà G thuộc SM nên suy ra $GA = GB = GC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $GS = GA = GB = GC$

hay G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu $R = GS = \frac{2}{3}SM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **Chọn B.**



Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h

là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\frac{R}{h}$ bằng:

A. $\frac{7}{12}$

B. $\frac{7}{24}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn:

Gọi O là tâm ΔABC , suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong SOA , ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$.

Trong mặt phẳng SOA , kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I , suy ra

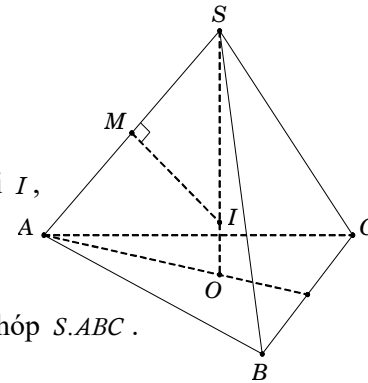
• $I \in d$ nên $IS = IA$.

• $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Gọi M là trung điểm SA , ta có $\Delta SMI \sim \Delta SOA$ nên

$$R = SI = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}. \text{ Vậy } \frac{R}{h} = \frac{7}{6}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$

B. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$

C. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$

D. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$

Hướng dẫn:

Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$. Ta có $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Trong ΔSOB , ta có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng SOB , kẻ đường trung trực d của đoạn SB .

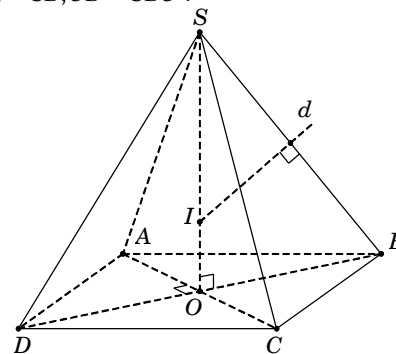
Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \Rightarrow IA = IB = IC = ID \\ I \in d \Rightarrow IS = IB \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$.

Xét ΔSBD có $\begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Do đó d cũng là đường trung tuyến của ΔSBD . Suy ra I là trọng tâm ΔSBD .

Bán kính mặt cầu $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$. **Chọn D.**



Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. 1 D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

Ta có $SA \perp AD$ hay $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi E là trung điểm AD .

Ta có $EA = AB = BC$ nên $ABCE$ là hình thoi.

Suy ra $CE = EA = \frac{1}{2}AD$.

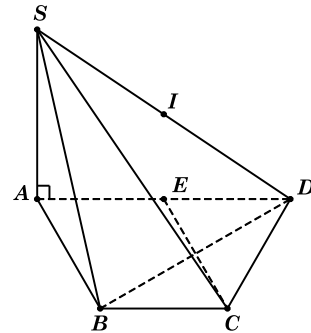
Do đó tam giác ACD vuông tại C . Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC \text{ hay } \widehat{SCD} = 90^\circ.$$

Tương tự, ta cũng có $SB \perp BD$ hay $\widehat{SBD} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SBD} = \widehat{SCD} = 90^\circ$ nên khối chóp $S.ABCD$ nhận trung điểm I của SD làm tâm mặt cầu

ngoại tiếp, bán kính $R = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $\frac{R}{a} = \sqrt{2}$. **Chọn D.**



Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AD=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng 45° . Gọi N là trung điểm SA , h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

- A. $4R = \sqrt{5}h$. B. $\sqrt{5}R = 4h$. C. $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h$. D. $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}h$.

Hướng dẫn:

Ta có $45^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$.

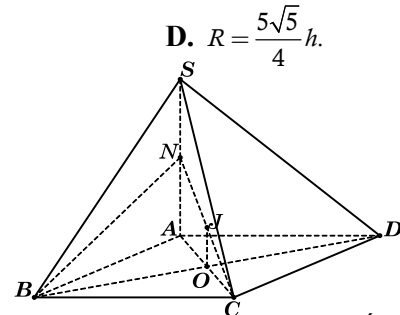
Trong ΔSAC , ta có $h = SA = a\sqrt{5}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BN$.

Lại có $NA \perp AC$.

Do đó hai điểm A, B cùng nhìn đoạn NC dưới một góc vuông nên hình chóp $N.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm J là trung điểm NC , bán kính

$$R = JN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

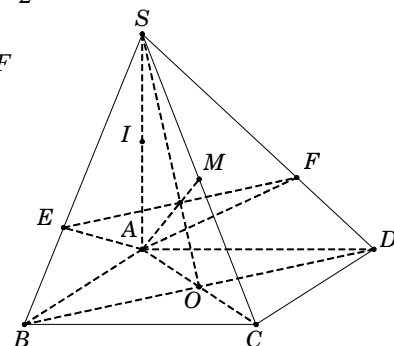
Hướng dẫn:

Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên $EF \parallel BD$.

ΔSAC cân tại A , trung tuyến AM nên $AM \perp SC$. (1)

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Do đó $EF \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE$. (*)



Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE . (**)$

Từ (*) và (**), suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$. Tương tự ta cũng có $AF \perp SD$.

Do đó $\widehat{SEA} = \widehat{SMA} = \widehat{SFA} = 90^\circ$ nên năm điểm S, A, E, M, F cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA , bán kính $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn:

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB = OD = OC$. (1)

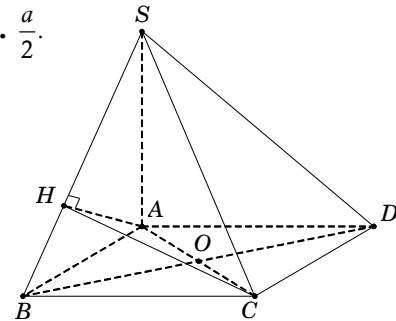
Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AH$.

Lại có $AH \perp SB$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$ nên tam giác AHC

vuông tại H và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH = OC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $R = OH = OB = OD = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC . Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. B. $\sqrt{2}\pi a^3$. C. $\frac{\pi a^3}{6}$. D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Hướng dẫn:

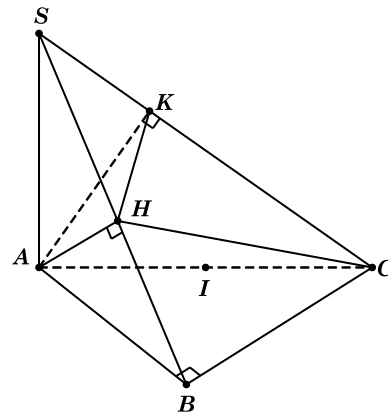
Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ và $\widehat{AKC} = 90^\circ$. (1)

Do $\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \text{ (} BC \perp (SAB) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AH \perp HC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, H, K cùng nhìn xuống AC dưới một góc 90° nên hình chóp $A.HKCB$ nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC , bán kính

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvtt). **Chọn A.**



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $BD = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm OD . Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a .

Hướng dẫn:

Ta có $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông SHD , có

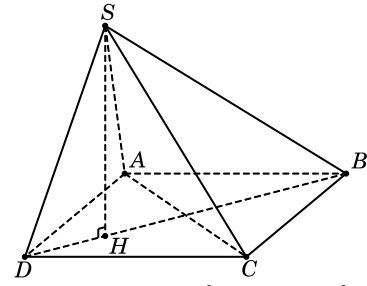
$$SH = \frac{BD}{4} \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \text{ và } SD = \frac{HD}{\cos \widehat{SDH}} = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác vuông SHB , có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SBD , ta có $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$.

Suy ra tam giác SBD vuông tại S .

Vậy các đỉnh S, A, C cùng nhìn xuống BD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là O , bán kính $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $R = d[G, (SAB)]$.

B. $3\sqrt{13}R = 2SH$.

C. $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$.

D. $\frac{R}{a} = \sqrt{13}$.

Hướng dẫn: Ta có $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA , ta có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G, (SAB)]$.

Ta có $d[G, (SAB)] = \frac{1}{3}d[C, (SAB)] = \frac{2}{3}d[H, (SAB)]$.

Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB và MB . Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE , suy ra $HK \perp SE$. (1)

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d[H, (SAB)] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE , ta có $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$. Vậy $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$. **Chọn D.**

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

C. $\frac{\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

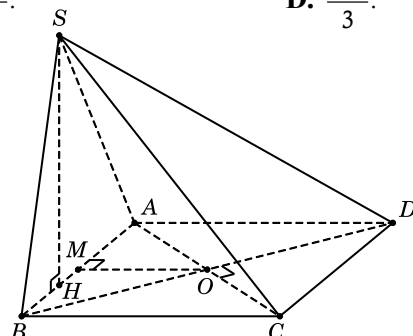
Hướng dẫn:

Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $OA = OB = OC = OD$. (1)

Gọi M là trung điểm AB , do tam giác SAB vuông tại S nên $MS = MA = MB$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB .

Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.



Ta có $\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$ nên OM là trục

của tam giác SAB , suy ra $OA = OB = OS$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OB = OC = OD$.

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$, bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvtt). **Chọn A.**

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABC) . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Từ G dựng tia $Gx \perp (ABC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Gx là trục của tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SA, Gx) , kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA .

Gọi $O = Gx \cap d \Rightarrow \begin{cases} O \in Gx \\ O \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OA = OS \end{cases}$

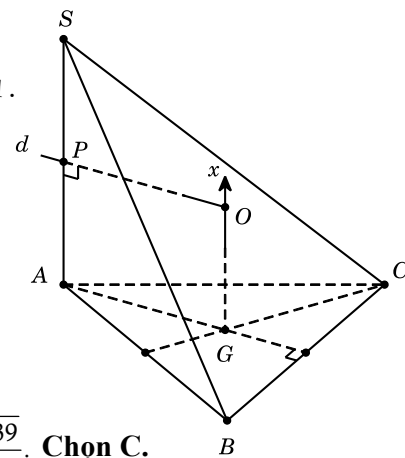
$\Rightarrow OA = OB = OC = OS = R$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $OG = PA = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác vuông OGA , ta có $R = OA = \sqrt{OG^2 + AG^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. **Chọn C.**



Câu 25. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là:

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm BC , suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OBC$.

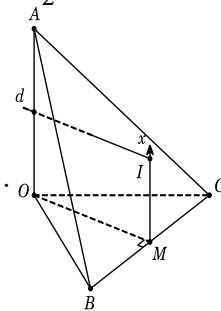
Kẻ $Mx \perp (OBC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Mx là trục của $\triangle OBC$.

Trong mặt phẳng (OA, Mx) , kẻ trung trực d của đoạn thẳng OA cắt Mx tại I .

Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính mặt cầu: $R = IO = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. **Chọn D.**



Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với đáy (ABC) một góc 60° . Gọi S, V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Tỉ số $\frac{V}{S}$ bằng ?

- A. $a\sqrt{14}$ B. $\frac{a\sqrt{14}}{12}$. C. $\frac{3a\sqrt{14}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Hướng dẫn:

Ta có $60^\circ = \widehat{SI, (ABC)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A , suy ra $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

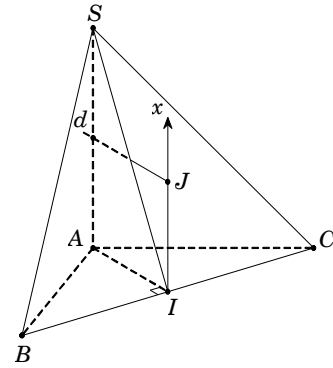
Trong $\triangle SAI$, ta có $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Kẻ $Ix \perp (ABC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Ix là trục của $\triangle ABC$.

Trong mặt phẳng (SA, Ix) , kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Ix tại J . Khi đó J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính: $R = JA = \sqrt{JI^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$ nên $\frac{V}{S} = \frac{R}{3} = \frac{a\sqrt{14}}{12}$. **Chọn B.**



Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ACD$ nhận giá trị:

- A. $\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn:

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ACD . Kẻ $Gx \perp (ACD)$, suy ra Gx là trục của $\triangle ACD$.

Trong mặt phẳng (SA, Gx) , kẻ trung trực d của đoạn SA cắt Gx tại I .

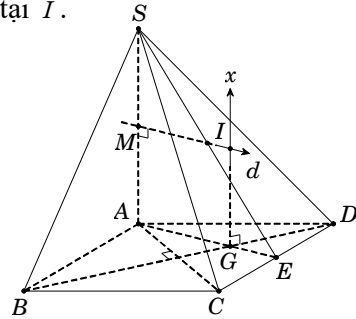
Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta có $IG = MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$GA = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra bán kính:

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC = a$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, $SA = SB = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. a . D. $2a$.

Hướng dẫn: Gọi M là trung điểm AB , suy ra $SM \perp AB$ và $SM \perp (ABC)$.

Do đó SM là trục của tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SMB) , kẻ đường trung trực d

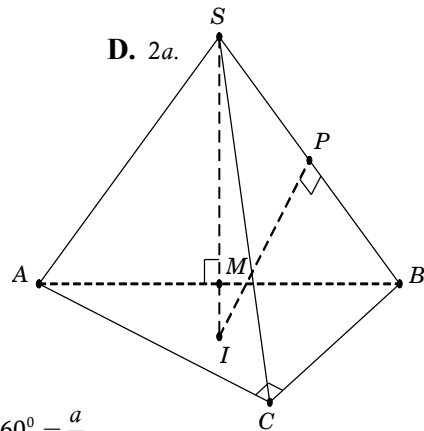
của đoạn SB cắt SM tại I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = SI$.

Ta có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SMB , ta có $SM = SB \cdot \cos \widehat{MSB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Ta có $\triangle SMB \sim \triangle SPI$, suy ra $\frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SP} \Rightarrow R = SI = \frac{SB \cdot SP}{SM} = a$. **Chọn C.**



Câu 29. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{3}$, góc \widehat{ACB} bằng 30° . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

Hướng dẫn: Ta có $60^\circ = \widehat{AB',(ABC)} = \widehat{AB',AB} = \widehat{B'AB}$.

Trong $\triangle ABC$, ta có $AB = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\triangle B'BA$, ta có $BB' = AB \cdot \tan \widehat{B'AB} = \frac{3a}{2}$.

Gọi N là trung điểm AC ,
suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

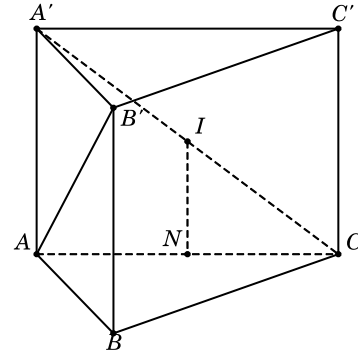
Gọi I là trung điểm $A'C$,
suy ra $IN \parallel AA' \Rightarrow IN \perp (ABC)$.

Do đó IN là trục của $\triangle ABC$, suy ra $IA = IB = IC$. (1)

Hơn nữa, tam giác $A'AC$ vuông tại A có I là trung điểm $A'C$ nên $IA' = IC = IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $IA' = IA = IB = IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$

với bán kính $R = IA' = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$. **Chọn B.**



Câu 30. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° và điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{85a}{108}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{31a}{36}$.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$$60^\circ = \widehat{(AB'C'),(A'B'C')} = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}.$$

Trong $\triangle AA'M$, có $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}$.

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$,
suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'B'C'$.

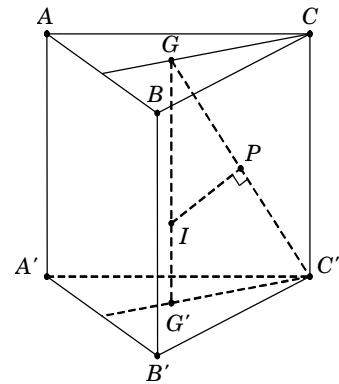
Vì lăng trụ đứng nên $GG' \perp (A'B'C')$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$, bán kính $R = GI$.

Ta có $\triangle GPI \hat{=} \triangle GG'C' \Rightarrow \frac{GP}{GI} = \frac{GG'}{GC'} \Rightarrow R = GI = \frac{GP \cdot GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}$. **Chọn D.**



Bài 07. QUAN HỆ NỘI – NGOẠI TIẾP CÁC KHỐI TRÒN XOAY

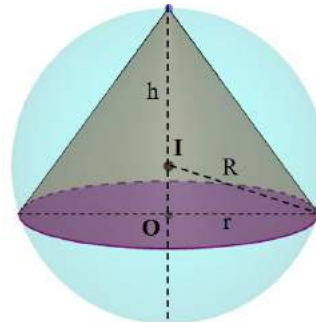
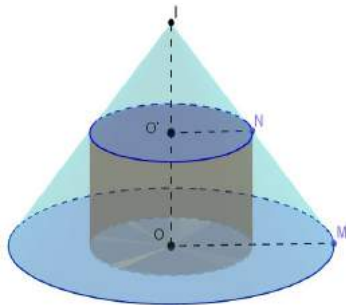
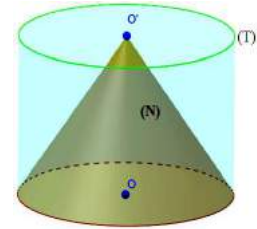
A. PHƯƠNG PHÁP:

1. Khối nón có đường sinh l , góc đỉnh 2α , nội tiếp khối trụ có chiều cao h , bán kính r :

• Tỷ số thể tích khối nón và khối trụ: $\frac{V_{(N)}}{V_{(T)}} = \frac{1}{3}$

• Tỷ số S_{xq} khối nón và khối trụ: $\frac{S_{xq(N)}}{S_{xq(T)}} = \frac{l}{2h} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$

• Tỷ số S_{tp} khối nón và khối trụ: $\frac{S_{tp(N)}}{S_{tp(T)}} = 2 \cdot \frac{h+r}{l+r}$.



$$h = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$

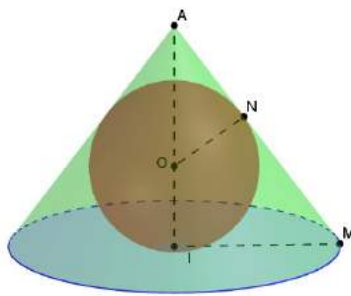
2. Khối nón (N) có bán kính r , thiết diện qua trục là tam giác đều và nội tiếp mặt cầu (S) có bán kính R :

Khi đó: Khối nón có bán kính đường tròn đáy: $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

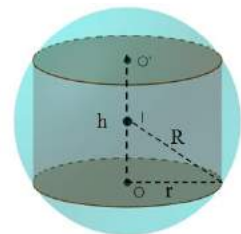
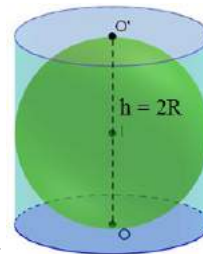
Thể tích khối nón: $V_{(N)} = \frac{3}{8} \pi R^3$; Thể tích khối cầu: $V_{(S)} = \frac{32\sqrt{3}}{27} \pi r^3$

3. Khối nón (N) nội tiếp khối cầu (S) có bán kính R , khối nón có chiều cao $h > R$:

Khi đó $V_{(N)}$ lớn nhất khi $h = \frac{4R}{3}$



$$R = \sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \cdot r; \quad r = R \cdot \cot \frac{\pi - \alpha}{4}$$



4. Khối trụ (T), ngoại tiếp khối cầu (S) có bán kính R :

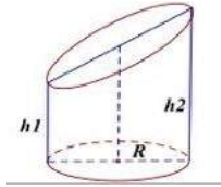
Khi đó: $V_{(T)} = 2\pi R^3, \frac{V_{(T)}}{V_{(S)}} = \frac{3}{2}$.

5. Khối trụ (T) có bán kính đường tròn đáy r , nội tiếp khối cầu (S) có bán kính R :

Khi đó: $V_{(T)} = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$; $\frac{V_{(T)}}{V_{(S)}} = \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$.

6. Một số công thức khác:

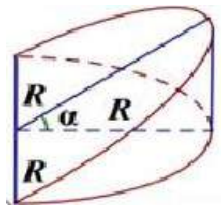
a. Hình trụ cụt



$$S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$$

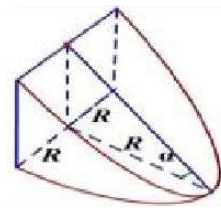
$$V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)$$

b. Hình nôm loại 1



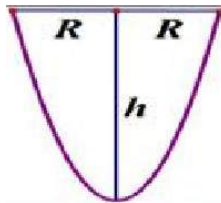
$$V = \frac{2}{3} R^3 \tan a$$

c. Hình nôm loại 2



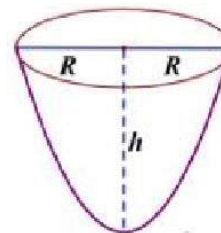
$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R \tan a$$

d. Parabol



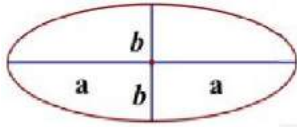
Diện tích Parabol $S = \frac{4}{3} Rh$

e. Khối tròn xoay Parabolic

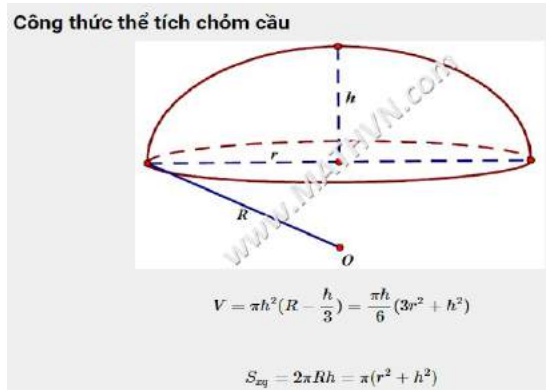


Thể tích khối tròn xoay khi Parabol quay quanh trục đối xứng $V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$

f. Elip



$$S = \pi ab; V_{\text{quay quanh } 2a} = \frac{4}{3} \pi ab^2; V_{\text{quay quanh } 2b} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$



B. CÂU HỎI TNKQ:

Câu 1. Thiết diện qua trục của hình trụ tròn xoay là hình vuông cạnh bằng $2a$, thể tích của khối nón tròn xoay có đường tròn đáy là đáy của hình trụ và đỉnh là tâm của đường tròn đáy còn lại hình trụ là:

- A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \frac{2}{3} \pi a^3$ C. $V = \frac{1}{3} \pi a^3$ D. $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

Câu 2. Cho mặt cầu có bán kính là a , ngoại tiếp hình nón. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều. Thể tích của khối nón là:

- A. $V = \frac{3}{4} \pi a^3$ B. $V = \frac{3}{4} \pi a^3$ C. $V = \frac{1}{8} \pi a^3$ **D.** $V = \frac{3}{8} \pi a^3$

Câu 3. Hình nón có bán kính của đường tròn đáy bằng a , thiết diện qua trục là tam giác đều. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình nón là:

- A. $V = \frac{32\sqrt{3}}{12} \pi a^3$ B. $V = \frac{32\sqrt{3}}{9} \pi a^3$ **C.** $V = \frac{32\sqrt{3}}{27} \pi a^3$ D. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3} \pi a^3$

Câu 4. Cho mặt cầu tâm O , bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h ($h > R$). Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

- A. $h = \sqrt{3}R$ B. $h = \sqrt{2}R$ C. $h = \frac{4R}{3}$ **D.** $h = \frac{3R}{2}$

Câu 5. Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. 2.

Câu 6. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng :

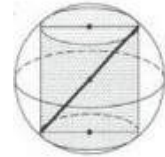
- A. $\frac{3}{2}$ **B.** 1 C. 2 **D.** $\frac{6}{5}$

Câu 7. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, đường chéo của hình vuông bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối cầu nội tiếp hình trụ là:

- A. $V = \frac{1}{3}\pi a^3$ **B.** $V = \frac{1}{6}\pi a^3$ C. $V = \frac{1}{4}\pi a^3$ **D.** $V = \frac{1}{2}\pi a^3$

Câu 8. Một hình trụ có chiều cao bằng 6 nội tiếp trong hình cầu có bán kính bằng 5 như hình vẽ. Thể tích của khối trụ này bằng:

- A. 36π **B.** 96π C. 192π **D.** 48π



Câu 9. Khối trụ có chiều cao $2a\sqrt{3}$, bán kính đáy $a\sqrt{3}$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ bằng:

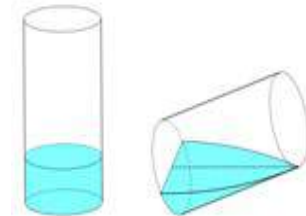
- A. $8\pi a^3\sqrt{6}$ **B.** $6\pi a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{4\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ **D.** $4\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 10. Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao nội tiếp trong mặt cầu bán kính R. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng:

- A. $2\pi R^2\sqrt{2}$ **B.** $\pi R^2\sqrt{2}$ C. $2\pi R^2$ **D.** πR^2

Câu 11. Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc:

- A. 60cm^3 **B.** $15\pi\text{cm}^3$
C. 70cm^3 **C.** $60\pi\text{cm}^3$



Câu 12. Một cốc nước hình trụ có đường kính đáy bằng 6 cm, chiều cao bằng 15 cm. Chứa mức nước cao 7 cm so với đáy, thả viên bi hình cầu có bán kính bằng 2cm vào cốc nước. Mức nước dâng lên trong cốc là:

- A.** $\frac{32}{27}$ cm; **B.** $\frac{7}{6}$ cm; C. 8 cm; **D.** 22 cm.

Câu 13. Cho khối cầu có bán kính R. Tính thể tích V của khối nón có diện tích xung quanh lớn nhất nội tiếp trong khối cầu đã cho.

- A.** $V = \frac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $V = \frac{32\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. **D.** $V = \frac{2\sqrt{6}\pi R^3}{3}$.

Câu 14. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng 1. Tính thể tích khối trụ đó

- A.** 4 **B.** 6 C. 8 **D.** 10.

Bài 08. BÀI TẬP THỰC TẾ

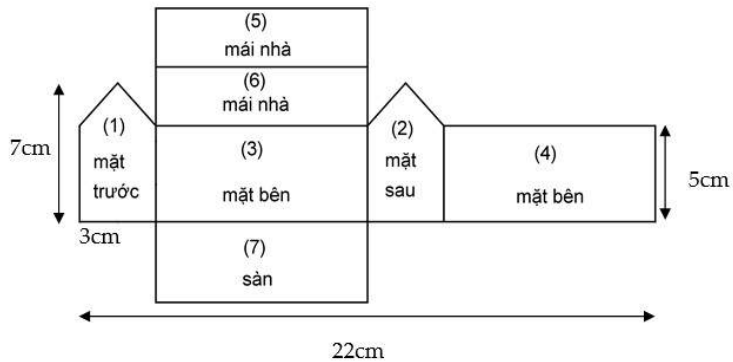
Câu 1. Cho khối chóp tứ giác S.ABCD có O là giao điểm của AC và BD. Những khối đa diện nào dưới đây có thể lắp ghép với nhau để tạo thành khối chóp ban đầu?

- (I) các khối tứ diện S.ACD, S.AOB, S.COB.
- (II) các khối tứ diện S.ABD, S.OCD, S.OCB.
- (III) các khối tứ diện S.OAB, S.OBC, S.OCD, S.ODA.
- (IV) các khối tứ diện S.ACD, S.ABD, S.OBC.

- A. (I), (II). B. (I), (II), (III). C. (I), (IV). D. (I), (III), (IV).

Hướng dẫn: Ta loại phương án (IV) vì 2 khối tứ diện S.ACD và S.ABD có điểm chung (phần chung chính là khối tứ diện S.AOD).

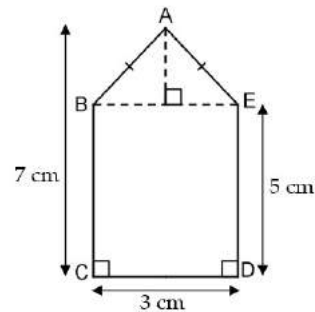
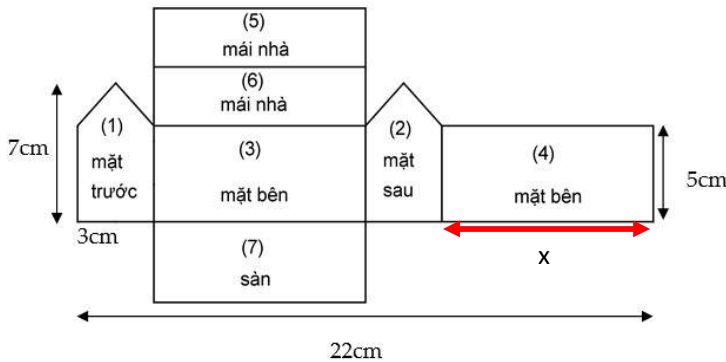
Câu 2. Mô hình của một ngôi nhà được cắt ra và trải trên mặt phẳng thành một lưới đa giác như hình vẽ. Tính thể tích của mô hình?



- A. 144 cm^3 . B. 168 cm^3 . C. 399 cm^3 . D. 513 cm^3 .

Hướng dẫn:

Nhận xét: chiều dài của ngôi nhà cũng là chiều cao của lăng trụ.



Đặt x (cm) là chiều dài ngôi nhà. Theo bản vẽ, ta có: $3 + x + 3 + x = 22 \Leftrightarrow x = 8$ (cm).

Tiếp theo, ta xét đến mặt trước của ngôi nhà.

Tương tự như bài tập 3.40, ta dễ dàng có được diện tích của phần mặt trước:

$$S_{ABCDE} = S_{BCDE} + S_{ABE} = 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (7 - 5) = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy thể tích mô hình ngôi nhà là:

$$V = S_{ABCDE} \cdot x = 18 \cdot 8 = 144 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 3. Người ta dùng một cái gáo dừa hình bán cầu đựng đầy nước để rót vào trong một cái bình hình trụ chiều cao 25 cm. Biết bán kính của gáo dừa và đáy cốc cùng là 4 cm, hỏi sau tối thiểu bao nhiêu lần rót thì đầy bình?



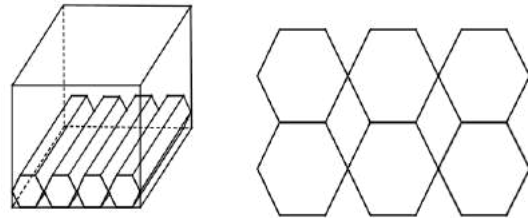
- A. 6 lần. B. 7 lần. C. 10 lần. D. 5 lần.

Hướng dẫn:

Số lần rót nước vào bình cũng là tỉ số thể tích V_1, V_2 của bình và gáo.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 25}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3} = 9,375 \text{ suy ra số lần cần rót nước là 10 lần.}$$

Câu 4. Một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có kích thước $6\text{cm} \times 6\text{cm} \times 10\text{cm}$. Người ta xếp những cây bút chì chưa chuốt có hình lăng trụ lục giác đều (hình 3.21.4.a) với chiều dài 10 cm



và thể tích $\frac{1875\sqrt{3}}{2}$ (mm^3) vào trong hộp sao

cho chúng được xếp sát nhau như hình vẽ (hình 3.21.4.b). Hỏi có thể chứa được tối đa bao nhiêu cây bút chì?

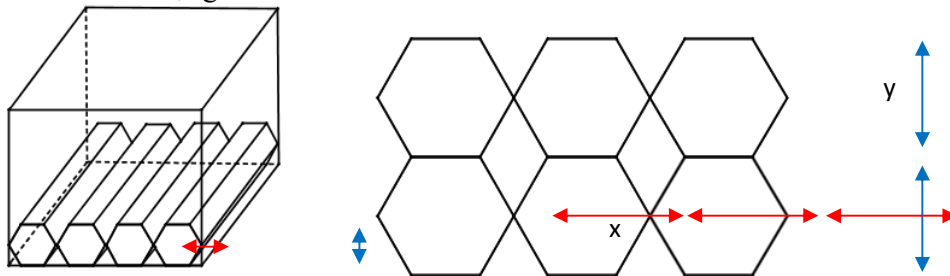
- A. 144. B. 156.
C. 221. D. 576.



Hình 3.21.4.a

Hướng dẫn:

Phân tích: Đọc giả có thể nhầm tưởng rằng số bút chì xếp được vào hộp bằng tỉ số thể tích của chiếc hộp và một cây bút, nhưng thực chất khi sắp xếp bút chì vào hộp, tùy cách sắp xếp sẽ cho ta số lượng khác nhau.



Nhận xét: 2 độ dài x và y trên hình lần lượt cho ta biết có thể xếp được bao nhiêu cây bút chì theo chiều ngang và chiều dọc. Để tìm được x và y , ta cần xác định độ dài cạnh của lục giác đều.

Cây bút chì có hình dạng là một khối lăng trụ lục giác đều với thể tích $\frac{1875\sqrt{3}}{2} \text{mm}^3$ và chiều dài 10 cm (thực chất chính là chiều cao của khối lăng trụ). Từ đây ta xác định được diện

$$\text{tích đáy: } B = \frac{V}{h} = \frac{\frac{1875\sqrt{3}}{2}}{100} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \text{ (mm}^3\text{)}.$$

Gọi a (mm) là độ dài cạnh đáy của cây bút chì, ta có công thức diện tích của đáy bút chì là $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ (mm²) (tham khảo bài 3.35)

Từ đây, ta tìm được độ dài cạnh của lục giác đều: $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{75\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} = 2,5$ (mm)

Suy ra: $x = 2a = 5$ (mm); $y = a\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (mm) (tham khảo bài 3.39)

Dựa trên kích thước của chiếc hộp, ta có số cây viết xếp được theo chiều ngang là $\frac{60}{x} = 12$

(cây bút) và theo chiều dọc là $\frac{60}{y} = 8\sqrt{3} \approx 13,86$ hay nói cách khác 13 cây bút (dù kết quả là

13,86 thì cũng chỉ xếp được tối đa 13 cây bút).

Vậy tổng số bút chưa được trong hộp là: $12 \cdot 13 = 156$ cây bút.

Câu 5. Bề mặt một quả bóng da được ghép từ 12 miếng da hình ngũ giác đều và 20 miếng da hình lục giác đều cạnh 4,5 cm. Biết rằng giá thành của những miếng da này là 150 đồng/cm². Tính giá thành của miếng da dùng để làm quả bóng (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị)?

- A. 121 500 đồng. B. 220 545 đồng.
C. 252 533 đồng. D. 199 218 đồng.

(Trích “Geometry for College Student”)



Hướng dẫn:

Các em đã biết cách tính diện tích của một lục giác đều, và với ngũ giác đều ta làm hoàn toàn tương tự. Một ngũ giác đều được chia thành 5 tam giác cân với góc ở đỉnh là $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Từ đây ta tính được diện tích của các miếng da thành phần.

Diện tích miếng da ngũ giác đều: $S_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot \frac{4,5}{2} \cdot \tan 54^\circ \right) = \frac{405}{16} \cdot \tan 54^\circ$ (cm²).

Diện tích miếng da lục giác đều: $S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4,5^2 = \frac{243\sqrt{3}}{8}$ (cm²).

Diện tích bề mặt của quả bóng bằng tổng diện tích 12 miếng da ngũ giác đều và 20 miếng da lục giác đều: $S = 12S_1 + 20S_2 = \frac{1215}{4} \cdot \tan 54^\circ + \frac{1215\sqrt{3}}{2}$ (cm²).

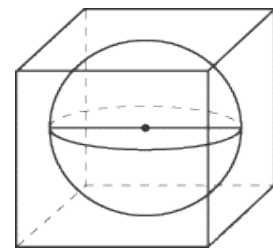
Giá thành sản xuất miếng da: $S \cdot 150 \approx 220545$ (đồng).

Câu 6. Xét một quả bóng hơi có dạng khối cầu có cùng diện tích bề mặt với quả bóng da ở câu 5. Người ta muốn đặt quả bóng này vào trong một chiếc hộp hình lập phương. Tính chiều dài tối thiểu của cạnh chiếc hộp này (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)?

- A. 8,03 cm. B. 10,28 cm. C. 10,82 cm. D. 11,57 cm.

Hướng dẫn:

Nhận xét: Độ dài cạnh hộp cũng là đường kính quả bóng.



Gọi d (cm) là độ dài cạnh hộp, ta có công thức tính diện tích quả bóng: $S = 4\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi d^2$.

Vì diện tích quả bóng hình cầu bằng diện tích quả bóng da ở câu trên nên ta có:

$\pi d^2 = \frac{1215}{4} \tan 54^\circ + \frac{1215\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow d \approx 10,82$ (cm).

Câu 7. Người ta thả chìm 4 viên nước đá có dạng khối lập phương cạnh 3 cm vào một bình nước hình trụ bán kính đáy 5 cm, chiều cao 13,5 cm. Biết trước khi bỏ đá vào thì chiều cao mực nước trong bình là 12 cm. Hỏi sau khi vừa thả chìm đá vào xong thì nhận định nào dưới đây là chính xác? (các kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

- A. Lượng nước tràn ra khỏi bình là 108 cm^3 B. Lượng nước tràn ra khỏi bình là 27 cm^3
 C. Chiều cao mực nước tăng lên 0,34 cm. D. Chiều cao mực nước tăng lên 1,38 cm.

Hướng dẫn:

Thể tích tăng lên là thể tích của 4 khối nước đá hình lập phương: $4 \cdot 3^3 = 108 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Để biết nước có tràn ra hay không ta cần tìm phần thể tích mà bình còn chứa được trước khi thêm đá: $\pi \cdot 5^2 \cdot (13,5 - 12) = \frac{75}{2} \pi \text{ (cm}^3\text{)} > 108 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Suy ra nước không tràn khỏi bình.

Để xác định độ tăng chiều cao mực nước, ta chỉ cần lấy độ tăng thể tích chia cho diện tích đáy bình: $h = \frac{108}{\pi \cdot 25} \approx 1,38 \text{ (cm)}$.

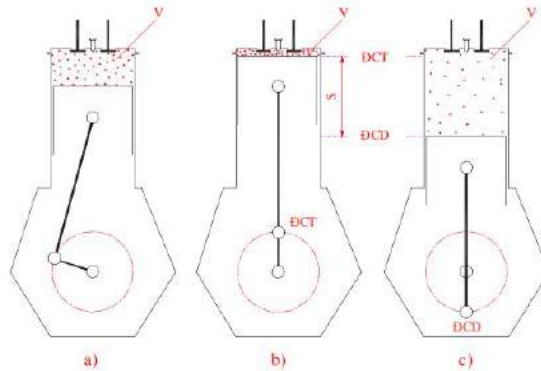
Câu 8. Hình vẽ dưới mô tả hai trong bốn kỳ hoạt động của một động cơ đốt trong. Buồng đốt chứa khí đốt là một khối trụ có thể tích thay đổi bởi sự chuyển động lên xuống của một Pít-tông trong xi lanh. Khoảng cách từ trục khuỷu đến điểm chuyển lực lên thanh truyền là $r = 2 \text{ cm}$; xi lanh có đường kính $d = 6 \text{ cm}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của buồng đốt Pít-tông chuyển động. Tính $V_1 - V_2$?

- A. 9π . B. 36π C. 48π . D. 18π .

(Trích đề thi thử Trường THPT Thăng Long, Hà Nội)

Hướng dẫn:

Sự chênh lệch thể tích của buồng đốt cũng chính là thể tích của một khối trụ có chiều cao bằng $2r$ và bán kính đáy là $d/2$ (xem hình b và c).

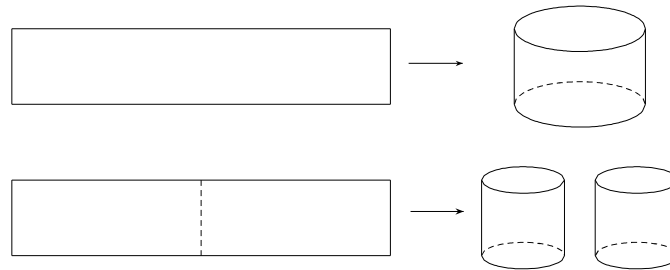


Do vậy ta có: $V_1 - V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 2) = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 9. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50 \text{ cm} \times 240 \text{ cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 4.

(Trích đề minh họa lần 1, Kỳ thi THPT Quốc gia 2017)

Hướng dẫn:

Nhận xét:

Về chiều cao thùng: Dù gò theo cách nào thì chiều cao cũng như nhau. (đều bằng 50cm, là chiều rộng của miếng tôn hình chữ nhật).

Về chu vi đáy: khi gò theo cách 2 thì rõ ràng chu vi đáy sẽ chỉ bằng một nửa chu vi đáy khi gò theo cách 1, từ đó dẫn tới bán kính đáy của cách 2 cũng bằng một nửa bán kính đáy cách 1 (do chu vi và bán kính tỉ lệ thuận).

Từ đây ta có diện tích đáy của mỗi thùng khi gò theo cách 2 chỉ bằng $\frac{1}{4}$ khi gò theo cách 1 và thể tích cũng vậy.

Với việc V_2 là tổng thể tích của 2 thùng khi gò theo cách 2 thì ta có $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Câu 10. Một bồn chứa thóc có cấu tạo gồm 2 hình nón và một hình trụ có các số đo như hình vẽ. Tính thể tích của bồn chứa, lấy $1 \text{ ft} = 0,3 \text{ m}$.

- A. $9\pi \text{ (m}^3\text{)}$. B. $\frac{9}{4}\pi \text{ (m}^3\text{)}$ C. $\frac{27}{4}\pi \text{ (m}^3\text{)}$. D. $\frac{63}{8}\pi \text{ (m}^3\text{)}$.

(Trích đề thi thử SAT 2016, The College Board)

Hướng dẫn:

Đổi số đo: $10 \text{ ft} = 3 \text{ m}$; $5 \text{ ft} = 1,5 \text{ m}$.

Gọi $V_1, V_2, V_3 \text{ (m}^3\text{)}$ lần lượt là thể tích của 2 phần hình nón và phần hình trụ.

Thể tích của mỗi phần dạng khối nón:

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 1,5 = \frac{9}{8} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

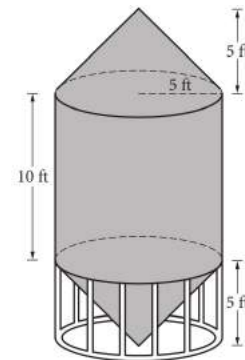
$$\text{Thể tích của phần khối trụ: } V_3 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = \frac{27}{4} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

$$\text{Tổng thể tích của bồn chứa: } V_1 + V_2 + V_3 = 9\pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

Câu 11. Ba chiếc gáo múc nước có dạng là khối trụ, khối nón và khối nửa cầu lần lượt có thể tích là V_1, V_2, V_3 . Biết rằng cả 3 chiếc gáo đều có cùng bán kính đáy và chiều cao, hãy sắp xếp số đo thể tích của 3 chiếc gáo theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

- A. $V_1 < V_2 < V_3$. B. $V_3 < V_2 < V_1$. C. $V_2 < V_1 < V_3$. D. $V_2 < V_3 < V_1$.

Hướng dẫn:



Nhận xét: Chiều cao của khối nửa cầu cũng chính là bán kính của nó. Vì chiều cao của 3 khối đều bằng nhau nên chiều cao của chúng đều bằng bán kính đáy là R .

Thể tích khối trụ: $V_1 = \pi R^3$. Thể tích khối nón: $V_2 = \frac{1}{3} \pi R^3$.

Thể tích khối nửa cầu: $V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$. Suy ra $V_2 < V_3 < V_1$.

Câu 12. Ba chiếc gáo múc nước có dạng là khối trụ, khối nón và khối nửa cầu lần lượt có diện tích là S_1, S_2, S_3 . Cả 3 chiếc gáo đều có cùng bán kính đáy và thể tích. Biết rằng diện tích càng lớn thì chi phí sản xuất càng sao, hãy chọn nhận định đúng trong các nhận định sau.

- A. Chi phí sản xuất gáo khối trụ lớn nhất, chi phí sản xuất gáo nửa cầu nhỏ nhất.
- B. Chi phí sản xuất gáo khối nón lớn nhất, chi phí sản xuất gáo nửa cầu nhỏ nhất.
- C. Chi phí sản xuất gáo khối trụ lớn nhất, chi phí sản xuất gáo khối nón nhỏ nhất.
- D. Chi phí sản xuất gáo khối nón lớn nhất, chi phí sản xuất gáo khối trụ nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Nhận xét: Trong 3 khối thì chỉ có khối nửa cầu là ta biết rõ chiều cao (cũng là bán kính). Từ đây ta suy ra được thể tích chung của cả 3 khối.

Đặt R là bán kính đáy của cả 3 khối, thể tích của mỗi khối là: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$.

Diện tích bề mặt của gáo hình nửa cầu cũng là diện tích xung quanh của khối nửa cầu:

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi R^2.$$

Ta xét đến khối trụ, để xác định diện tích bề mặt của gáo khối trụ, ta cần biết được chiều cao

$$h_1 \text{ của nó: } \pi R^2 h_1 = V \Leftrightarrow h_1 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2}{3} R.$$

Diện tích bề mặt của gáo khối trụ là diện tích xung quanh và diện tích 1 đáy của khối trụ

$$\text{tương ứng: } S_1 = 2\pi R h_1 + \pi R^2 = \frac{7}{3} \pi R^2.$$

Tiếp theo, ta xét đến khối nón. Để tính diện tích bề mặt của khối nón ta cần biết độ dài đường

$$\text{sinh } k, \text{ nhưng trước hết là chiều cao } h_2 \text{ của khối: } \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = V \Leftrightarrow h_2 = \frac{3V}{\pi R^2} = 2R.$$

$$\text{Độ dài đường sinh } k: k = \sqrt{h_2^2 + R^2} = \sqrt{5}R.$$

Diện tích bề mặt của gáo khối nón là diện tích xung quanh của khối nón tương ứng:

$$S_2 = \pi R k = \sqrt{5} \pi R^2.$$

Nhận xét: $S_3 < S_2 < S_1$.

Câu 13. Nhà sản xuất yêu cầu tạo ra một hộp sữa dạng khối hộp chữ nhật sao cho dung tích là 330ml mà chi phí sản xuất phải tiết kiệm tối đa. Biết rằng diện tích bề mặt càng lớn thì chi phí càng lớn, hỏi điều nào dưới đây xảy ra khi chi phí sản xuất đạt mức thấp nhất? (a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hộp; các kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

- A. $a + b + c = 6,91$. B. $a + b + c = 20,73$. C. $a - b + c = 6,91$. D. $a + b - c = 20,73$.

Hướng dẫn:

Diện tích vỏ hộp nhỏ nhất khi $a = b = c = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{330} \approx 6,91$ (cm).

Câu 14. Tương tự các yêu cầu về chi phí và thể tích như câu 13, nhưng nay nhà sản xuất yêu cầu chiếc hộp có dạng khối trụ. Nhận định nào đúng trong các nhận định sau? (R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hộp; kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. $h^3 = 8R^3$. B. $h^3 = 48\sqrt{3}R^3$. C. $h^3 - R^3 = 800$. D. $h^3 \cdot R^3 = 60455$.

Hướng dẫn:

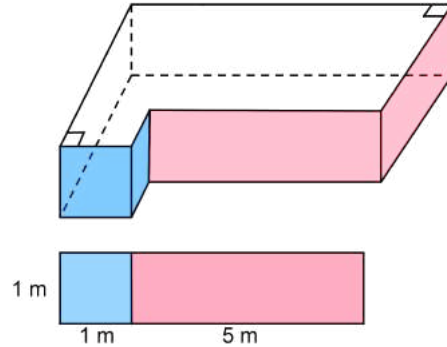
Diện tích vỏ hộp nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$; $h = \sqrt[3]{2V}$

Câu 15. Một cái tủ bếp hình chữ L (hình 3.21.15.a) có bản vẽ hình chiếu khi nhìn từ mặt trước hay mặt bên là như nhau (hình 3.21.15.b). Tính thể tích của tủ bếp?



Hình 3.21.15.a

Hình 3.21.15.b



- A. 21 m^3 . B. 26 m^3 . C. 31 m^3 . D. 36 m^3 .

Hướng dẫn:

Ta có thể chia tủ bếp thành 1 khối lập phương và 1 khối hộp chữ nhật có kích thước $6\text{m} \times 5\text{m} \times 1\text{m}$. Như vậy, thể tích của tủ bếp bằng tổng thể tích của 2 khối này:

$$1^3 + 6.5.1 = 31 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 16. Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cắt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiều trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cắt, hãy tính thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Hướng dẫn:

Nhận xét

Hình chiếu của ống khói gồm một hình chữ nhật có chiều dài là $3x$, chiều rộng là x và một hình thang cân có độ dài 2 đáy là x và $2x$.

Do khối chóp cắt tứ giác đều có 2 đáy đều là hình vuông nên ta thấy một mặt của khối hộp chữ nhật là hình vuông cạnh x (mặt tiếp xúc của 2 khối).

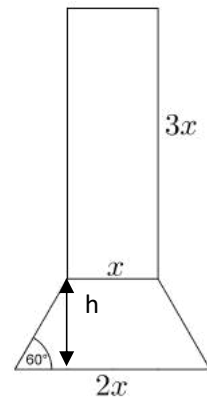
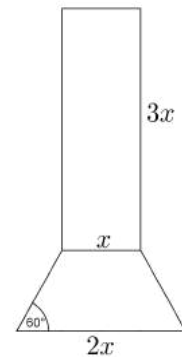
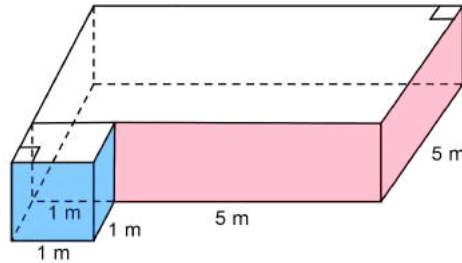
Từ đây ta có 3 kích thước của khối hộp chữ nhật là x , x , và $3x$.

Đối với khối chóp cắt tứ giác đều, 2 đáy lần lượt có độ dài cạnh là x và $3x$. Nếu ta gọi h là chiều cao của hình thang cân trong hình thì h cũng đồng thời là chiều cao của khối chóp cắt.

Giải

Thể tích phần ống dạng khối hộp chữ nhật: $V_2 = x.x.3x = 3x^3$.

Dựa theo công thức ở bài 3.37, ta tính được thể tích phần khối chóp cắt:



$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot h(x^2 + x \cdot 2x + (2x)^2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \tan 60^\circ\right) \cdot 7x^2 = \frac{7\sqrt{3}}{6} x^3. \text{ Vậy tỉ số thể tích: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 17. Người ta tạo ra một ống thông gió bằng cách khoét một lỗ có dạng hình trụ ngay giữa một khối trụ bằng kim loại (cả 2 khối trụ này có cùng trục và chiều cao), sau đó cắt khối vừa tạo ra thành 4 phần bằng nhau. Biết bán kính đáy của khối kim loại ban đầu là 5 m và chiều cao là 3 m, hỏi đường kính đáy của phần lỗ được khoét phải là bao nhiêu để thể tích của ống thông gió đạt giá trị $15,75\pi \text{ m}^3$?



- A. 2 m. B. 4m. C. $\frac{79}{4}$ m. D. $\frac{79}{2}$ m.

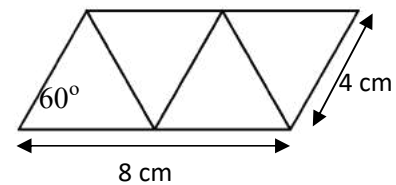
Hướng dẫn:

Thể tích của phần khối trụ bị khoét: $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 - 4 \cdot 15,75\pi = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

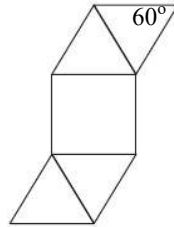
Bán kính của phần khối trụ bị khoét: $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot 3}} = 2 \text{ (m)}.$

Suy ra đường kính của phần khối trụ bị khoét là 4 m.

Câu 18. Người ta chia một miếng bìa hình bình hành có kích thước như hình vẽ rồi gấp theo các đường kẻ để tạo thành một khối tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện đều?



- A. $16\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$ B. $\frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$
 C. $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$ D. $8\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$



Hướng dẫn:

Nhận xét: Khối tứ diện đều tạo thành sẽ

có độ dài cạnh là 4 cm.

Từ đây ta tìm được chiều cao và diện tích đáy của khối tứ diện đều (tham khảo bài 3.56), và

có được thể tích của khối tứ diện đều là $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

Câu 19. Mô hình của một khối chóp tứ giác đều được tạo thành bằng cách gấp một tấm bìa có diện tích $4 + 4\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$ như hình vẽ. Tính thể tích của mô hình này?

- A. $\frac{8}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$ C. $4\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}.$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

Hướng dẫn:

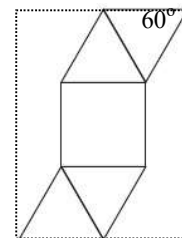
Nhận xét: Các mặt bên là các tam giác đều, do vậy tất cả các cạnh của khối chóp tứ giác đều này đều bằng nhau.

Gọi a (cm) là độ dài một cạnh, S là diện tích một mặt bên và S' là diện tích đáy.

Ta có: $4S + S' = 4 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + a^2 = 4 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 2 \text{ (cm)}.$

Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bằng 2 (cm) là $\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

(tham khảo bài 3.57)



Câu 20. Người ta cắt miếng bìa ở câu 19 từ một miếng bìa hình chữ nhật như hình vẽ. Nếu cuộn miếng bìa này theo chiều dài của nó thì được một hình trụ không đáy. Tính thể tích của khối trụ này.

- A. $8 \text{ (cm}^2\text{)}$. B. $6 \text{ (cm}^2\text{)}$ C. $8 + 16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$. D. $8 + 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

Hướng dẫn:

Với độ dài cạnh của khối chóp tứ giác đều là $a = 2 \text{ (cm)}$, gọi $m, n \text{ (cm)}$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của miếng bìa hình chữ nhật.

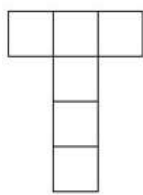
Chiều rộng miếng bìa bằng 2 lần độ dài cạnh khối chóp: $n = 2a = 4 \text{ (cm)}$.

Chiều dài miếng bìa bằng tổng của 2 lần độ dài đường cao một mặt bên và độ dài một cạnh

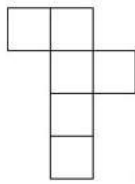
$$\text{khối chóp: } m = 2 \cdot \left(2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 = 2 + 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Diện tích miếng bìa hình chữ nhật: } m \cdot n = 8 + 16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

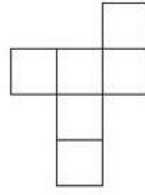
Câu 21. Có bao nhiêu lưới đa giác trong số các lưới dưới đây có thể gấp lại tạo thành mô hình một khối lập phương?



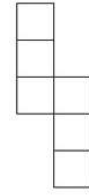
(I)



(II)



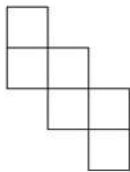
(III)



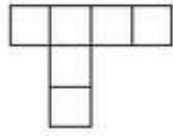
(IV)

- A. 1. B. 2 C. 3. D. 4.

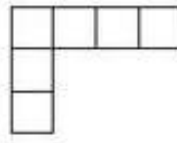
Câu 22. Có bao nhiêu lưới đa giác trong số các lưới dưới đây có thể gấp lại tạo thành mô hình một khối lập phương?



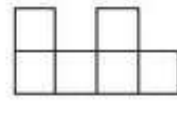
(I)



(II)



(III)



(IV)

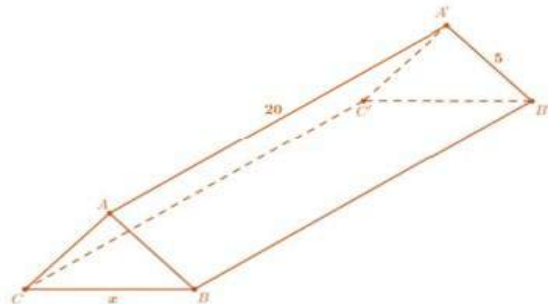
- A. 1. B. 2 C. 3. D. 4.

Hướng dẫn:

Chỉ có hình (I) có thể ghép thành khối lập phương.

Câu 23. Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m rộng 5m. Gọi $x \text{ (m)}$ là độ dài cạnh BC . Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất.

- A. $x = \sqrt{2}$ B. $x = 2\sqrt{2}$
C. $x = 3\sqrt{2}$ D. $x = 5\sqrt{2}$



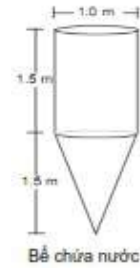
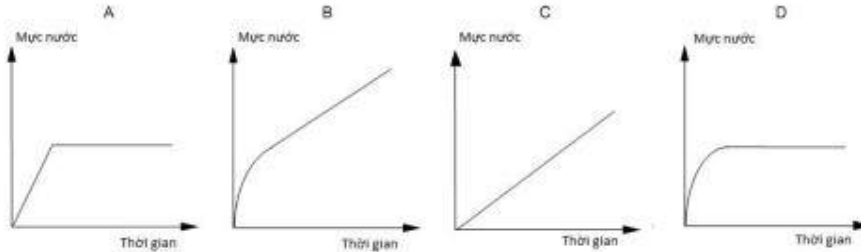
Hướng dẫn:

Thể tích lăng trụ tạo thành bằng:

$$V = A'A.S_{ABC} = 20 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{5^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 5x\sqrt{100 - x^2} \leq 5 \cdot \frac{x^2 + 100 - x^2}{2} = 250$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$. Chọn D.

Câu 24. Một bể chứa nước có dạng như hình vẽ. Ban đầu, bể không có nước. Sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ 1 lít/giây. Đồ thị nào sau đây cho biết chính xác sự thay đổi độ cao của nước theo thời gian?



- A. Hình A. B. Hình B. C. Hình C. D. Hình D.
 (Trích “Tài liệu Tập huấn PISA 2015 và các dạng câu hỏi do OECD phát hành lĩnh vực Toán học”, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Hướng dẫn:

Nhận xét: Khi đổ nước vào trong bể thì nước sẽ dâng đầy phần nón trước rồi sau đó mới đến phần trụ. Như vậy ở đây ta xét hai giai đoạn:

Từ lúc bắt đầu đổ nước đến khi nước dâng đầy phần khối nón.

Từ lúc nước bắt đầu dâng vào phần khối trụ đến lúc đầy bể.

Ta xét quá trình (I): Khi nước dâng trong phần khối nón, cứ mỗi giây trôi qua, lượng nước trong bể lại tạo thành một khối nón nhỏ hơn có bán kính đáy là $r(t)$ và chiều cao (cũng là chiều cao mực nước) là $h(t)$. (t là thời gian, tính theo giây)

Để thấy: $\frac{h}{1,5} = \frac{r}{0,5} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$.

Ở thời điểm t , ta có: $V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow t = \frac{1}{27}\pi h^3 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{27t}{\pi}}$. (mỗi giây lượng nước bơm

vào là 1 lít nên trong t (giây) là t (lít))

Vậy sự thay đổi chiều cao của mực nước trong giai đoạn (I) được cho bởi hàm:

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{27t}{\pi}}$$

Hàm này hiển nhiên không có đồ thị là một đường thẳng, như vậy ta loại bỏ được hai câu A và C. Lẽ ra ta còn phải làm thêm bước tìm tập xác định của biến t do đến một thời điểm xác định, khi chuyển sang giai đoạn (II) thì sự thay đổi chiều cao của mực nước không còn được biểu diễn bởi hàm số vừa nêu nữa.

Ta xét đến quá trình (II): Dễ dàng nhận thấy lúc này mực nước tăng đều theo hàm bậc nhất, do vậy đồ thị từ đây sẽ là một đường thẳng.

Vậy đáp án là B.

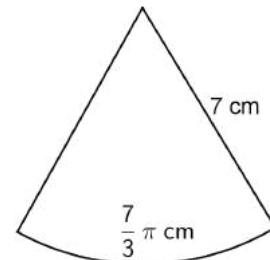
Câu 25. Mô hình của một hình nón được tạo ra bằng cách cuộn một hình quạt có kích thước như trong hình. Tính thể tích của khối nón tương ứng. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 9,84 cm³. B. 9,98 cm³ C. 29,51 cm³. D. 29,94 cm³.

Hướng dẫn:

Hình quạt có bán kính 7 cm và độ dài cung là $\frac{7}{3}\pi$ cm.

Độ dài cung của hình quạt cũng là chu vi đáy của hình nón, như vậy



gọi là r (cm) là bán kính đáy của nón, ta có: $2\pi r = \frac{7}{3}\pi \Leftrightarrow r = \frac{7}{6}$ (cm).

Bán kính của hình quạt cũng là độ dài đường sinh của hình nón. Gọi h (cm) là chiều cao hình nón, ta có: $h = \sqrt{7^2 - r^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{7\sqrt{35}}{6}$ (cm). (tham khảo bài 3.58)

Vậy thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3} \cdot (\pi r^2) \cdot h = \frac{343\sqrt{35}}{648}\pi \approx 9,84$ (cm³).

Câu 26. Người ta tạo ra 4 chiếc nón sinh nhật giống nhau bằng cách cắt một miếng bìa hình tròn đường kính 40 cm thành 4 hình quạt bằng nhau. Mỗi hình quạt được cuộn lại để tạo thành chiếc nón (2 mép được dính bằng băng dính sao cho không đè chồng lên nhau). Tính tổng thể tích của 4 chiếc nón theo lít. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 6,28 lít. B. 0,51 lít. C. 2,03 lít. D. 1,57 lít.

Hướng dẫn:

Bán kính miếng bìa chính là độ dài đường sinh l của mỗi chiếc nón, vậy $l = 20$ (cm).

Độ dài cung của mỗi hình quạt là chu vi đáy của chiếc nón. Gọi r (cm) là bán kính đáy của

mỗi chiếc nón: $2\pi r = \frac{2\pi l}{4} = \frac{2\pi \cdot 20}{4} \Leftrightarrow r = 5$ (cm).

Gọi h (cm) là chiều cao của mỗi chiếc nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 5\sqrt{15}$ (cm)

Thể tích mỗi chiếc nón là: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{15} = \frac{125\sqrt{15}}{3}\pi$ (cm³).

Tổng thể tích của 4 chiếc nón là: $4V = \frac{500\sqrt{15}}{3}\pi$ (cm³) $\approx 2,03$ (lít).

Câu 27. Người ta tạo ra những chiếc nón từ một miếng bìa hình tròn đường kính 32 cm bằng một trong 2 phương án sau:

Chia miếng bìa thành 3 hình quạt bằng nhau rồi cuộn mỗi hình quạt lại thành một chiếc nón V_1 .

Chia miếng bìa thành 6 hình quạt bằng nhau rồi cuộn mỗi hình quạt lại thành một chiếc nón có thể tích V_2 .

Gọi V , V' lần lượt là tổng thể tích của những chiếc nón tạo ra theo cách 1 và cách 2.

Nhận định nào đúng trong các nhận định sau:

- A. $V > V'$. B. $V = V'$. C. $V_1 = \frac{1}{3}V_2$. D. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

Hướng dẫn:

Cách giải 1:

Ta có thể tìm được các thể tích V_1 , V_2 , V , V' một cách nhanh chóng.

Phương án 1: chia hình tròn thành 3 phần.

Độ dài đường sinh của mỗi chiếc nón cũng là bán kính hình tròn ban đầu, tức 16 cm.

Bán kính của mỗi chiếc nón sẽ bằng $\frac{1}{3}$ bán kính ban đầu, tức $\frac{16}{3}$ (cm).

Ta tìm được chiều cao của mỗi chiếc nón: $\sqrt{16^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$ (cm).

Thể tích V_1 của mỗi chiếc nón: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2\right) \cdot \frac{32\sqrt{2}}{3} = \frac{8192\sqrt{2}}{81}\pi$ (cm³) $\approx 449,33$ (cm³)

Tổng thể tích V của 3 chiếc nón: $V = 3V_1 = 1348,00 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Phương án 2: chia hình tròn thành 6 phần.

Bán kính của mỗi chiếc nón sẽ bằng $1/6$ bán kính ban đầu, tức $\frac{8}{3}$ (cm).

Ta tìm được chiều cao của mỗi chiếc nón: $\sqrt{16^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{35}}{3}$ (cm).

Thể tích V_2 của mỗi chiếc nón: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2\right) \cdot \frac{8\sqrt{35}}{3} = \frac{512\sqrt{35}}{81} \pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 117,48 \text{ (cm}^3\text{)}$

Tổng thể tích V' của 3 chiếc nón: $V' = 6V_2 = 704,89 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Cách giải 2: Tổng quát hóa bài toán.

Chia một hình tròn bán kính R thành x hình quạt bằng nhau ($x \in \mathbb{N}^*$, $x > 1$), sau đó cuộn mỗi hình quạt lại tạo thành một hình nón có thể tích V , và tổng thể tích của các hình nón là V' .

Đối với mỗi khối nón, bán kính của hình tròn ban đầu cũng là độ dài đường sinh của khối nón, và độ dài cung của mỗi hình quạt là chu vi đáy từng nón.

Gọi r là bán kính đáy của mỗi nón: $2\pi r = \frac{2\pi R}{x} \Leftrightarrow r = \frac{R}{x}$.

Chiều cao mỗi nón: $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{x}\right)^2}$.

Thể tích của mỗi khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{x}\right)^2 \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{x}\right)^2} = \frac{R^3 \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$.

Dễ dàng khảo sát thấy hàm số $V(x) = \frac{R^3 \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$, và

như vậy với mọi giá trị $x \in \mathbb{N}^*$, $x > 1$ thì ta luôn có $V(x) > V(x+1)$.

Hay nói cách khác, càng chia nhỏ hình tròn thì thể tích mỗi khối nón tạo thành càng bé.

Tổng thể tích của các khối nón: $V' = x \cdot V = \frac{R^3 \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$.

Khảo sát hàm số $V'(x) = \frac{R^3 \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$, ta cũng có kết quả tương tự như trên, nghĩa là càng

chia nhỏ hình tròn thì tổng thể tích các khối nón tạo thành càng bé.

Câu 28. Với một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính $R = \sqrt{6}$ (cm) phải làm một cái phễu hình nón bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để dung tích của phễu đạt giá trị lớn nhất? (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị)

A. $2,8^\circ$.

B. $12,56^\circ$.

C. 66° .

D. 294° .

Hướng dẫn:

Đặt α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) là số đo cung tròn dùng làm nón.

Ta dễ dàng xác định được bán kính đáy của nón: $r = \frac{\alpha}{360} \cdot R$;

Và chiều cao của nón: $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\alpha}{360}R\right)^2} = \frac{R}{360} \sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

Thể tích của nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi R^3}{3 \cdot 360^3} (\alpha^2 \sqrt{360^2 - \alpha^2})$.

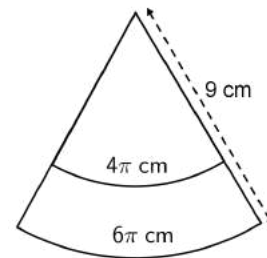
Thể tích nón đạt giá trị lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2 \sqrt{360^2 - x^2}$ ($0 < x < 360$) đạt giá trị lớn nhất.

Khảo sát hàm này, ta tìm được hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x \approx 294$, hay nói cách khác, thể tích nón đạt giá trị lớn nhất khi $\alpha \approx 294^\circ$.

Vậy số đo của cung tròn bị cắt đi là: $360^\circ - \alpha = 66^\circ$.

Câu 29. Gấp một phần của hình vành khăn với các kích thước như hình vẽ, tính thể tích của khối nón cụt tạo thành?

- A. $\frac{19\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3$. B. $\frac{38\sqrt{2}}{3} \pi \text{ cm}^3$
 C. $38\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$. D. $19\sqrt{5} \pi \text{ cm}^3$.

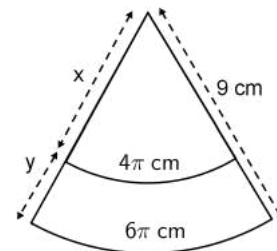
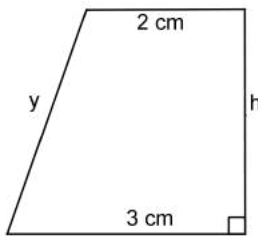


Hướng dẫn:

Xét các kích thước x và y như trên hình, trong đó y chính là độ dài đường sinh của khối nón cụt.

Bán kính đáy nhỏ và đáy lớn của khối nón cụt lần lượt là $r = 2 \text{ cm}$ và $r' = 3 \text{ cm}$.

Để tính được thể tích của khối nón, ta cần tìm được chiều cao của khối nón cụt. Như đã biết, một khối nón cụt tạo ra bằng cách xoay một hình thang vuông quanh cạnh góc vuông của nó. Vì vậy, độ dài cạnh góc vuông chính là chiều cao h của khối nón cụt.



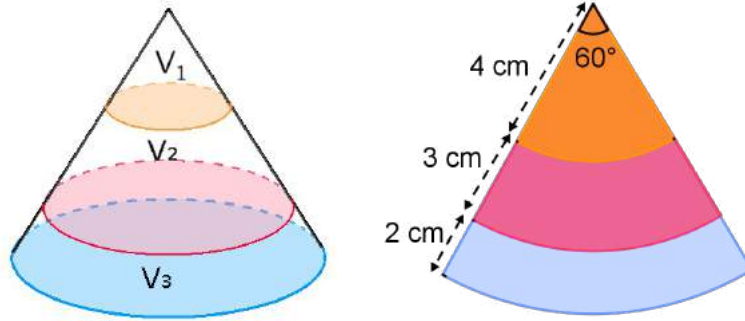
Như ta thấy, muốn tìm được h , ta cần tìm được y trước.

Để dàng chứng minh được $\frac{x}{9} = \frac{4\pi}{6\pi}$, suy ra $x = 6 \text{ cm}$ và $y = 3 \text{ cm}$.

Từ đây, ta tìm được chiều cao của khối nón cụt: $h = \sqrt{y^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Vậy ta có thể tích của khối nón cụt với bán kính 2 đáy lần lượt là $r = 2 \text{ cm}$; $r' = 3 \text{ cm}$ và chiều cao $h = 2\sqrt{2} \text{ cm}$: $V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r r' + r'^2) = \frac{38\sqrt{2}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 30. Chia một khối nón thành 3 phần gồm một khối nón có thể tích V_1 và 2 khối nón cụt như hình vẽ (khối kề với khối nón nhỏ có thể tích V_2 và khối nằm dưới có thể tích V_3). Sau đó người ta cắt khối nón ban đầu theo một đường sinh của nó rồi trải ra mặt phẳng và tiến hành đo đạc các kích thước. Nhận định nào dưới đây là đúng?



- A. $V_1 < V_2 < V_3$. B. $V_3 < V_2 < V_1$. C. $V_2 < V_1 < V_3$. D. $V_2 < V_3 < V_1$.

Hướng dẫn:

Gọi r_1, r_2, r_3 (cm) lần lượt là bán kính của 3 đường tròn màu cam, màu đỏ và màu xanh.

Để dàng tính được $r_1 = \frac{4}{2} = 2$ (cm); $r_2 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$ (cm); $r_3 = \frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$ (cm).

Gọi h_1, h_2, h_3 (cm) lần lượt là chiều cao của 3 khối nón có đáy là các đường tròn bán kính r_1, r_2, r_3 với các đường sinh tương ứng lần lượt là 4cm, 7cm, 9cm.

Dựa theo hệ thức giữa đường sinh, chiều cao và bán kính đáy khối nón, ta có:

$h_1 = \sqrt{4^2 - r_1^2} = 2\sqrt{3}$ (cm); $h_2 = \sqrt{7^2 - r_2^2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ (cm); $h_3 = \sqrt{9^2 - r_3^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Từ đây, ta tính được các thể tích V_1, V_2, V_3 .

Thể tích V_1 của khối nón có bán kính đáy r_1 : $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm³).

Thể tích V của khối nón có bán kính đáy r_2 : $V = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{343\sqrt{3}}{24}\pi$ (cm³).

Thể tích V_2 của khối nón cắt là hiệu thể tích V và V_1 : $V_2 = V - V_1 = \frac{93\sqrt{3}}{8}\pi$ (cm³).

Tương tự, ta tìm được thể tích V_3 của khối nón cắt dưới cùng: $V_3 = \frac{193\sqrt{3}}{12}\pi$ (cm³).

Câu 31. Gia đình Na muốn làm một bể nước hình trụ có thể tích 150 m³. Đáy bể là bằng bê tông giá 100.000 đồng/m², phần thân làm bằng tôn giá 90.000 đồng/m², phần nắp làm nhôm không gỉ giá 120.000 đồng/m². Hỏi khi chi phí sản xuất bể đạt mức thấp nhất thì hiệu giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 2,69 m. B. 6,58 m. C. 3,89 m. D. 12,15 m.

Hướng dẫn:

Gọi h, r (m) lần lượt là chiều cao và bán kính đáy bể.

Theo đề bài, ta có: $\pi r^2 \cdot h = 150 \Leftrightarrow r^2 h = \frac{150}{\pi}$.

Tổng chi phí sản xuất:

$A = 100000 \cdot \pi r^2 + 90000 \cdot (2\pi r) \cdot h + 120000 \cdot \pi r^2 = 220000\pi r^2 + 180000\pi r h$ (đồng).

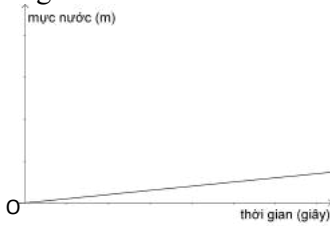
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $220000\pi r^2, 90000\pi r h, 90000\pi r h$:

$220000\pi r^2 + 90000\pi r h + 90000\pi r h \geq 3\sqrt[3]{1782 \cdot 10^{12} \cdot \pi^3 \cdot r^4 \cdot h^2} = 30000\pi \sqrt[3]{1782 \cdot (r^2 h)^2}$

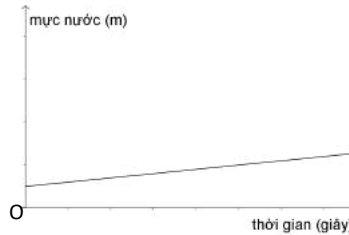
$$\Rightarrow A \geq 30000\pi^3 \sqrt{1782 \cdot \left(\frac{150}{\pi}\right)^2} \approx 15038388$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 220000\pi r^2 = 90000\pi r h \Leftrightarrow h = \frac{22}{9}r \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} \text{ (m)} \\ h = \frac{22}{9} \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} \text{ (m)} \end{cases}$$

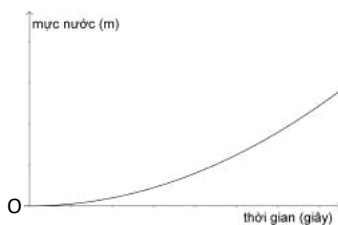
Câu 32. Một hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước 10 m x 5 m x 3 m. Ban đầu trong hồ đã có sẵn 200 lít nước, sau đó người ta bắt đầu bơm tiếp nước vào hồ với tốc độ 10 lít/ giây. Hỏi đồ thị nào dưới đây mô tả đúng nhất sự thay đổi về chiều cao của mực nước trong hồ?



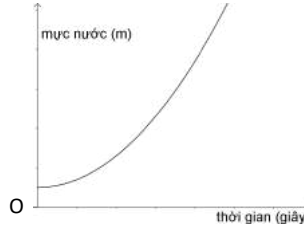
Hình A.



Hình B.



Hình C.



Hình D.

A. Hình A. B. Hình B. C. Hình C. D. Hình D.

Hướng dẫn:

Trong 1 giây, thể tích nước tăng thêm là 10 lít.

Chiều cao mực nước tăng lên trong một giây là: $\frac{10}{10.5} = \frac{1}{1050}t$ (m), trong đó t là thời gian, đo bằng giây.

Dựa trên thông tin ban đầu trong hồ đã có sẵn 200 lít nước, tức mực nước ban đầu là $\frac{1}{250}$ (m).

Như vậy ta có hàm số thể hiện chiều cao của mực nước ở mỗi thời điểm như sau:

$$h(t) = \frac{1}{5000}t + \frac{1}{250} \text{ (m)}.$$

Câu 33. Một hệ thống cửa xoay gồm 4 cánh cửa hình chữ nhật có chung một cạnh và được sắp xếp trong một buồng cửa hình trụ như hình vẽ. Tính thể tích của buồng cửa, biết chiều cao và chiều rộng của mỗi cánh cửa lần lượt là 2,5 m và 1,5 m.

A. $\frac{45\pi}{8} \text{ m}^3$. B. $\frac{45}{8} \text{ m}^3$. C. $\frac{75\pi}{8} \text{ m}^3$. D. $\frac{75}{8} \text{ m}^3$.



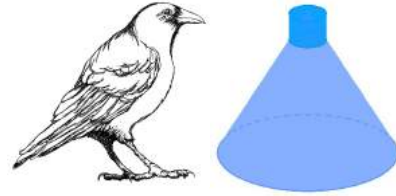
Hướng dẫn:

Chiều cao của cánh cửa cũng là chiều cao của buồng cửa hình trụ.

Chiều rộng của cánh cửa chính là bán kính đáy của buồng cửa hình trụ.
Theo công thức tính thể tích khối trụ, ta có thể tích của buồng cửa:

$$V = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 2,5 = \frac{45\pi}{8} \text{ (m}^3\text{)}.$$

Câu 34. Truyện kể rằng có một con quạ khát nước và tìm thấy một chiếc bình đựng sẵn 100 ml nước bên trong nhưng khổ nỗi chiếc mỏ của nó lại không thể nào chạm đến mực nước trong bình. Con quạ thông minh bèn gấp những hòn sỏi nhỏ có thể tích 12 ml và thả chìm vào đáy bình và đợi cho đến khi nước dâng lên đến miệng bình thì mới uống cho thỏa thích. Biết rằng cấu tạo chiếc bình gồm một khối nón cụt và một khối trụ có chung đáy là đáy nhỏ của khối nón cụt như hình vẽ; bán kính đáy lớn và đáy nhỏ của khối nón cụt lần lượt là 5 cm và 1,5 cm; chiều cao của khối nón cụt và khối trụ lần lượt là 10 cm và 3 cm. Hỏi con quạ cần phải bỏ vào bình bao nhiêu viên đá thì mới có thể bắt đầu uống nước?



- A. 32 viên. B. 33 viên. C. 23 viên. D. 24 viên.

Hướng dẫn:

Thể tích của khối nón cụt:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2) = \frac{1}{3} \pi \cdot 10 (5^2 + 5 \cdot 1,5 + 1,5^2) = \frac{695\pi}{6} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

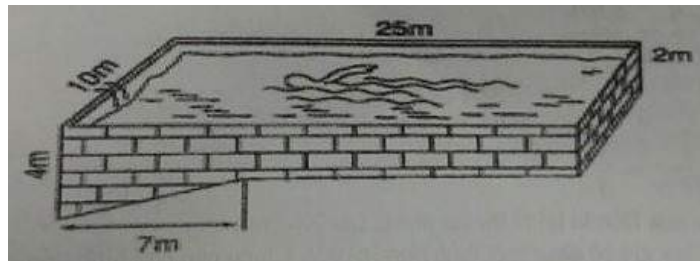
$$\text{Thể tích của khối trụ: } V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h_2 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = \frac{27\pi}{4} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Tổng thể tích của bình: } V = V_1 + V_2 = \frac{1471\pi}{12} \text{ (ml)}.$$

$$\text{Thể tích sỏi cần bỏ vào: } V - 100 = \frac{1471\pi - 1200}{12} \text{ (ml)}.$$

$$\text{Số viên sỏi cần bỏ vào: } \frac{V - 100}{12} \approx 24 \text{ (viên)}.$$

Câu 35. Các kích thước của một bể bơi được cho như trên hình (mặt nước được xem như có dạng là hình chữ nhật khi phẳng lặng). Hỏi nếu người ta bơm nước vào bể từ khi bể trống rỗng đến lúc đầy nước với tốc độ 100 lít/giây thì mất bao nhiêu thời gian?



- A. 5,7 giây. B. 9 phút 30 giây. C. 1 giờ 35 phút. D. 2 giờ 46 phút 40 giây.

Hướng dẫn:

Nhận xét: chỉ cần biết được thể tích của hồ bơi, ta sẽ tìm được thời gian cần để bơm nước đầy hồ.

Thể tích của hồ bơi bằng diện tích của phần mặt bên dạng ngũ giác và chiều rộng của hồ là 10m.

$$\text{Diện tích mặt bên: } S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (4 - 2) + 25 \cdot 2 = 57 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Thể tích của hồ bơi: } V = S \cdot 10 = 570 \text{ (m}^3\text{)} = 570 \text{ 000 (lít)}.$$

$$\text{Thời gian cần thiết để bơm nước đầy hồ: } \frac{570000}{100} = 5700 \text{ (giây)} = 1 \text{ giờ } 35 \text{ phút}.$$

Câu 36. Một lon trà hình trụ được đặt vừa khít trong một chiếc hộp quà hình hộp chữ nhật. Hỏi thể tích của lon trà chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích của hộp quà? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 25% . B. 78,54% . C. 50% . D. 39,27% .

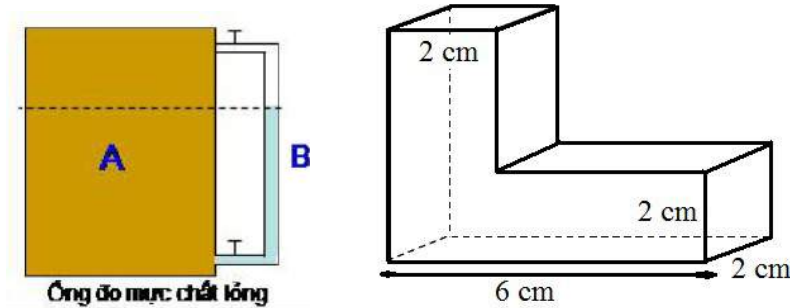
Hướng dẫn:

Nhận xét: để chiếc lon trà đặt vừa khít trong hộp thì đáy của hộp tiếp giáp với đáy lon phải có dạng là một hình vuông. Hơn nữa, hình vuông này có độ dài cạnh a bằng đường kính đáy lon là $2R$.

Gọi V, V' lần lượt là thể tích lon trà và thể tích hộp quà, ta có:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi R^2 h}{a^2 h} = \frac{\pi R^2}{a^2} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4} \approx 78,54\% \text{ (trong đó } h \text{ là chiều cao hộp, cũng là chiều cao lon).}$$

Câu 37. Thiết bị trong hình là một hệ thống gồm: (A) Một bồn nước có dạng khối trụ với vỏ làm bằng nhựa, không trong suốt; (B) Một ống dẫn trong suốt được gắn thông với bồn (A). Thiết bị hoạt động theo nguyên tắc của bình thông nhau, nghĩa là mực nước ở (B) có cùng độ cao với mực nước trong bồn (A). Biết các kích thước của thiết bị được cho như hình, và thể tích chất lỏng trong bồn (A) và ống (B) lần lượt là 375π (lít) và 616 (ml), tính bán kính đáy bồn (làm tròn tới hàng phần trăm)?



- A. 50 cm. B. 50,34 cm. C. 49,67 cm. D. 49,35 cm.

Hướng dẫn:

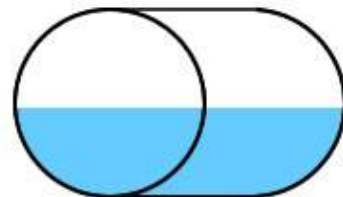
Nhận xét: ta cần tìm chiều cao của bồn nước (A) thông qua chiều cao của thiết bị (B). Dựa vào hình vẽ, ta thấy thể tích nước trong (B) gồm thể tích cột nước hình hộp chữ nhật đứng có đáy là hình vuông cạnh 2 cm và một khối hộp chữ nhật ngang có kích thước $4\text{cm} \times 2\text{cm} \times 2\text{cm}$.

Từ đây ta tìm được chiều cao của cột nước là $h = \frac{616 - 4.2.2}{2.2} = 150$ (cm).

Bán kính đáy bồn: $R = \sqrt{\frac{375000\pi}{150.\pi}} = 50$ (cm).

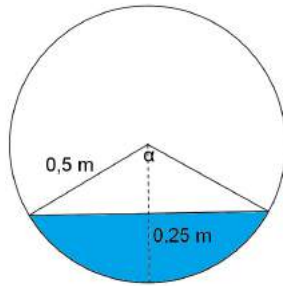
Câu 38. Một bồn nước có dạng hình trụ, chiều cao 2 m, bán kính đáy là 0,5 m được đặt nằm ngang trên mặt sàn bằng phẳng. Hỏi khi chiều cao mực nước trong bồn là 0,25 m thì thể tích nước trong bồn là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 392,70 lít B. 433,01 lít.
C. 307,09 lít. D. 1570,80 lít.



Hướng dẫn:

Nhận xét: Thể tích của bồn nước bằng tích của chiều cao bồn (bằng 2m) và diện tích một phần hình tròn đáy, mà cụ thể ở đây là hình viên phân. Bởi lẽ diện tích hình viên phân sẽ được tính theo những cách khác nhau dựa vào số đo cung tương ứng nên ở đây ta cần đánh giá các số liệu của đề bài một cách cẩn thận.



Ở đây, chiều cao h của mực nước là 0,25 m, như vậy nước dâng lên chưa quá nửa bồn. Từ đây ta thấy diện tích hình viên phân sẽ bằng hiệu diện tích của hình quạt và hình tam giác tương ứng như trên hình.

Gọi số đo cung của hình quạt là α , ta có: $h = R - R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$

Suy ra: $0,25 = 0,5 \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow \alpha = 120^\circ$.

Ta tìm diện tích hình viên phân:

$$S_{vp} = S_{quat} - S_{\Delta} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2 - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ (m}^2\text{)}$$

Thể tích nước trong bồn là: $V = S_{vp} \cdot 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 307,09$ (lít).

Câu 39. Với cùng chiếc bồn ở câu 38, hỏi khi thể tích nước trong bồn là 1264 lít thì chiều cao mực nước là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 0,25 m. B. 0,75 m. C. 0,5 m. D. 0,71 m.

Hướng dẫn:

Diện tích hình viên phân đáy: $S_{vp} = \frac{1,264}{2} = 0,632 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích S' của nửa hình tròn đáy: $S' = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{8} \text{ (m}^2\text{)} < 0,632 \text{ m}^2$.

Như vậy, nước đã dâng quá nửa bồn. Ta có thể đưa bài toán này về lại dạng của bài 38 bằng

cách tính diện tích của hình viên phân nhỏ còn lại: $S_{vp2} = \pi R^2 - S_{vp} = \frac{125\pi - 316}{500} \text{ (m}^2\text{)}$.

Theo bài 38, gọi số đo cung của hình viên phân nhỏ là α (tính theo radian), ta có:

$$S_{vp} = S_{quat} - S_{\Delta} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi R^2 - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{1}{8} (\alpha - \sin \alpha)$$

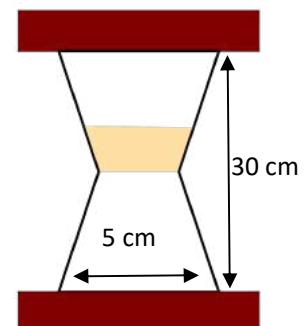
Giải phương trình: $\frac{1}{8} (\alpha - \sin \alpha) = \frac{125\pi - 316}{500} \quad (1)$

Sử dụng máy tính bỏ túi, ta tìm được một nghiệm $\alpha \approx 2,09 \text{ (rad)} \approx 120^\circ$.

Như vậy phần không gian trống trong bồn sẽ có độ cao 0,25m, hay nói cách khác, độ cao mực nước là 0,75 m.

Câu 40. Một chiếc đồng hồ cát có cấu trúc gồm hai khối nón cụt giống nhau đặt chồng lên nhau (phần tiếp xúc là đáy nhỏ của hay khối nón cụt). Biết rằng chiều cao và đường kính đáy của chiếc đồng hồ cát

lần lượt là 30 cm và 5 cm, hỏi nếu thể tích của đồng hồ là $\frac{555\pi}{2} \text{ (ml)}$



thì bán kính phần đáy tiếp xúc giữa hai phần của đồng hồ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 0,25 cm. B. 0,5 cm. C. 3,56 cm. D. 7,12 cm.

Hướng dẫn:

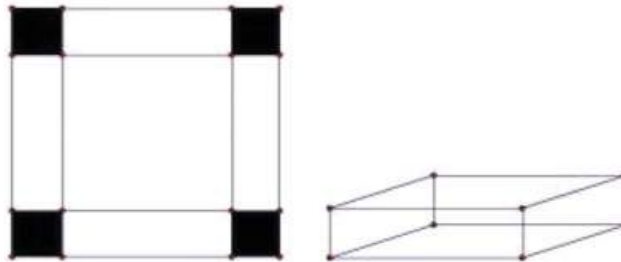
Xét khối nón cụt có chiều cao là h , bán kính 2 đáy lần lượt là R và r ($R > r$).

Thể tích V của khối nón cụt được tính theo công thức: $V = \frac{\pi}{3} h (R^2 + R.r + r^2)$.

Gọi r (cm) là bán kính phần đáy tiếp xúc. $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{30}{2} \cdot (5^2 + 5.r + r^2) = \frac{555\pi}{2} \Leftrightarrow r = 0,5$ (cm).

Câu 41. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

Đề Minh Họa Môn Toán - THPTQG 2017



- A. $x = 6$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

Hướng dẫn:

+ Gọi x ($0 < x < 6$) là độ dài cạnh hình vuông bị cắt

+ Thể tích khối hộp tạo thành bằng $V = x(12 - 2x)^2$ (cm^3)

+ Áp dụng BĐT AM-GM (Cauchy) cho 3 số dương ta có:

$$x(12 - 2x)^2 = 2.2x.(6 - x)(6 - x) \leq 2 \cdot \frac{(2x + 6 - x + 6 - x)^3}{27} = 128(cm^3)$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x = 6 - x \Leftrightarrow x = 2$. Chọn C.

Câu 42. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng $1 dm^3$ và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} dm$ B. $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} dm$ C. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} dm$ D. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} dm$

Hướng dẫn:

+ Đặt bán kính đáy, chiều cao của lon sữa bò hình trụ lần lượt là r , h (đơn vị dm)

+ Theo đề ra ta có: $h\pi r^2 = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$ (dm)

+ Diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất khi: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ nhỏ nhất.

+ Ta có: $S = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \geq 2\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^2}} = 3\sqrt[3]{2\pi}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $2\pi r^2 = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (dm). Chọn B.

Câu 43. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, các nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ có cân nặng $P = 960 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 23 B. 24 C. 25 D. 26

Hướng dẫn:

+ Cân nặng của cả bầy cá sau một vụ thu hoạch là: $N = P.n = (960 - 20n)n$ (gam)

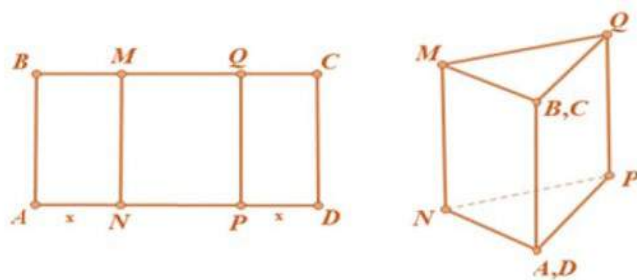
+ Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất \Leftrightarrow Ta cần tìm giá trị của n sao cho N đạt giá trị lớn nhất

+ Áp dụng BĐT AM - GM (Cauchy) cho 2 số dương ta có:

$$N = (960 - 20n)n = 20n(48 - n) \leq 20 \cdot \frac{(n + 48 - n)^2}{4} = 11520 \text{ (g)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $n = 48 - n \Leftrightarrow n = 24$. Chọn B.

Câu 44. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60\text{cm}$ và AB có độ dài không đổi. Ta gập tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ tạo thành lớn nhất?



- A. $x = 20$ B. $x = 25$
C. $x = 10$ D. $x = 30$

Hướng dẫn:

+ Ta có: $AN = PD = x$ (cm, $0 < x < 30$) $\Rightarrow NP = 60 - 2x$ (cm)

+ Thể tích hình lăng trụ tạo thành bằng: $V = AB \cdot S_{NPA} = AB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{PA^2 - \left(\frac{NP}{2}\right)^2} \cdot NP$

$$= \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{60-2x}{2}\right)^2} \cdot (60-2x) = 2\sqrt{15} \cdot AB \cdot (30-x) \sqrt{x-15} \text{ (cm}^3\text{)}$$

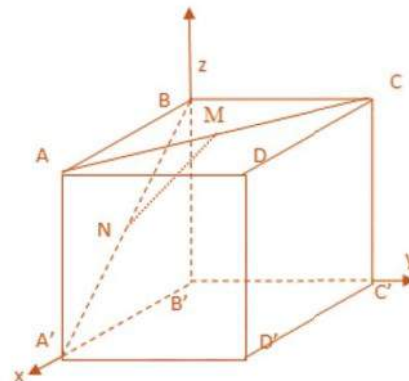
+ Trong đó AB không đổi nên ta chỉ cần tìm x sao cho $f(x) = (30-x)\sqrt{x-15}$ đạt giá trị lớn nhất.

+ Xét hàm số $f(x)$ trên $(15;30)$ ta được $\max_{(15;30)} f(x) = f(20) = 10\sqrt{5} \Rightarrow x = 20$. Chọn A.

(Hoặc có thể thay trực tiếp các đáp án A,B,C,D rồi chọn giá trị nào của x làm cho $f(x)$ lớn nhất)

Câu 45. Bên trong một căn phòng hình lập phương, được ký hiệu như sau $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 4(cm). Người ta tiến hành trang trí ngôi nhà bằng cách gắn các dây lụa tại điểm M và N theo thứ tự trên AC và $A'B$ sao cho $AM = A'N = t$ ($0 \leq t \leq 4\sqrt{2}\text{cm}$). Biết rằng dây lụa được nhập khẩu từ nước ngoài nên rất đắt. Gia chủ muốn chiều dài của dây là ngắn nhất. Hỏi độ dài ngắn nhất của sợi dây mà gia chủ có thể dùng là bao nhiêu?

- A. $x = 2\sqrt{3}$ B. $x = \sqrt{2}$
C. $x = 2\sqrt{2}$ D. $x = 3$



Hướng dẫn:

+ Ta sẽ đưa căn phòng vào hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxyz sao cho O trùng B' , trục Ox chứa A' , trục Oy chứa C' trục Oz chứa B .

+ Khi đó, ta có: $A(4;0;4)$; $C(0;4;4)$; $A'(4;0;0)$; $B(0;0;4)$

$$M\left(4 - \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}; 4\right); N\left(4 - \frac{t}{\sqrt{2}}; 0; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

+ Ta có: $MN^2 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 4\right)^2 = t^2 - 4\sqrt{2}t + 16$

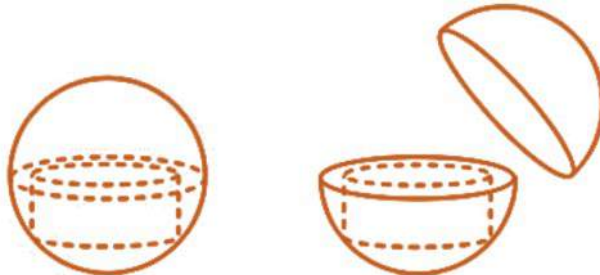
+ Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4\sqrt{2}t + 16$ trên $[0; 4\sqrt{2}]$;

Ta có: $f'(t) = 2t - 4\sqrt{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2} \in [0; 4\sqrt{2}]$

+ Tính được: $f(0) = 16$; $f(2\sqrt{2}) = 8$; $f(4\sqrt{2}) = 16 \Rightarrow \min_{[0; 4\sqrt{2}]} f(t) = 8$

Vậy độ dài nhỏ nhất của MN bằng $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Chọn C.

Câu 46. Công ty mỹ phẩm cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng trắng da chống lão hóa mới mang tên Sakura với thiết kế là một khối cầu như một viên bi khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm phân nửa để đựng kem dưỡng da (như hình vẽ). Theo dự kiến nhà sản xuất dự định để khối cầu có bán kính $R = 2\sqrt{6}$ (cm). Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (nhằm thu hút khách hàng).



- A. $16\sqrt{2}\pi cm^3$ B. $48\sqrt{2}\pi cm^3$ C. $32\sqrt{2}\pi cm^3$ D. $24\sqrt{2}\pi cm^3$

Hướng dẫn:

+ Các ký hiệu như hình vẽ bên

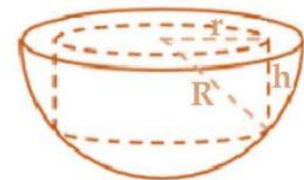
+ Ta có: $r^2 = R^2 - h^2 = 24 - h^2$

+ Thể tích khối trụ bằng: $V = \pi r^2 h = \pi(24 - h^2)h$

+ Để thể tích V lớn nhất $\Leftrightarrow f(h) = (24 - h^2)h$ lớn nhất.

+ Ta có:

$$f(h) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (24 - h^2)(24 - h^2)2h^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{(24 - h^2 + 24 - h^2 + 2h^2)^3}{27}} = 32\sqrt{2}$$

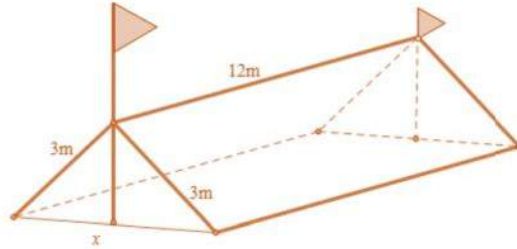
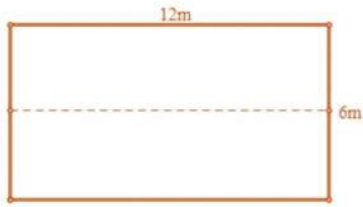


(Áp dụng BĐT Cauchy)

Dấu “=” xảy ra khi $24 - h^2 = 2h^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$. + Từ đó suy ra: $V \geq 32\sqrt{2}\pi (cm^3)$. Chọn C.

Câu 47. Trong đợt chào mừng ngày 26/03/2016, trường THPT Lê Quảng Chí có tổ chức cho học sinh các lớp tham quan dã ngoại ngoài trời, trong số đó có lớp 12A. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, lớp 12A đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12m và chiều rộng là 6m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai

mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x m (xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất?



A. $x = 4$

B. $x = 3\sqrt{3}$

C. $x = 3$

D. $x = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

- + Xem khoảng không gian là một hình lăng trụ đứng.
- + Khi đó thể tích hình lăng trụ được tính bởi:

$$V = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 3x \cdot \sqrt{36 - x^2} \leq 3 \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 54$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2}$. Chọn D.

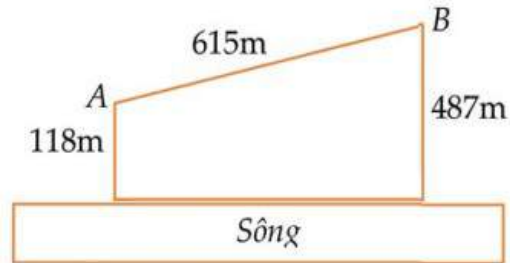
Câu 48. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:

A. 569,5 m

B. 671,4 m

C. 779,8 m

D. 741,2 m



Hướng dẫn:

- + Gọi S là điểm trên bờ sông DC.

+ Tính được: $DC = \sqrt{615^2 - (487 - 118)^2} = 492$ (m)

+ Đặt $SD = x$ (m) $\Rightarrow SC = 492 - x$ (m) với $0 < x < 492$ (m)

+ Đoạn đường người đó cần đi để hoàn thành công việc là:

$$f(x) = \sqrt{118^2 + x^2} + \sqrt{487^2 + (492 - x)^2}$$

+ Áp dụng đánh giá $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ với $a, b, c, d \geq 0$. Dấu "=" xảy

ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0)

+ Khi đó: $f(x) \geq \sqrt{(118 + 487)^2 + (x + 492 - x)^2} \approx 779,8$ m.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{118}{487} = \frac{x}{492 - x} \Leftrightarrow x \approx 95,96$ (m)

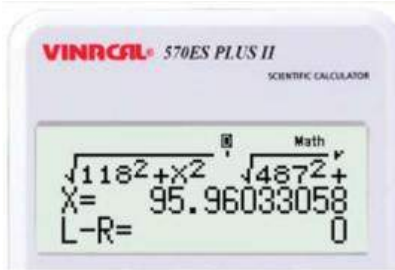
+ Vậy đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là 779,8m

Chọn C.

Bình luận: Có thể xét hàm số $f(x)$ để tìm ra GTNN của $f(x)$ với sự kết hợp của máy tính cầm tay:

Cụ thể: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{118^2 + x^2}} + \frac{-(492 - x)}{\sqrt{487^2 + (492 - x)^2}}$, bằng chức năng SOLVE có thể nhằm

được: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 95,96 \Rightarrow f(95,96) \approx 779,8(m)$



Câu 49. Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1 km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia sông 100m.

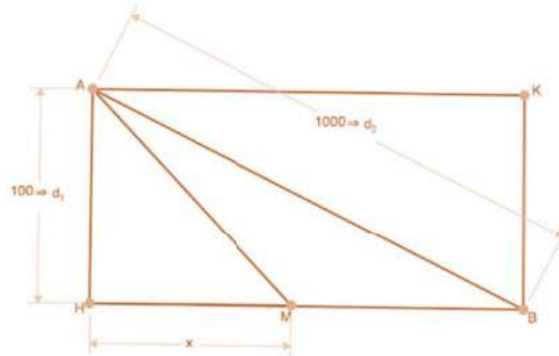
A. $\frac{200}{\sqrt{3}}$

B. 100

C. $100\sqrt{101}$

D. $\frac{200}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn:



+ Ký hiệu như hình vẽ A,B lần lượt là vị trí người chiến sĩ (CS) và mục tiêu tấn công; H, K nằm trên hai bờ sao cho AHBK là hình chữ nhật; M trên bờ HB để người CS cần bơi đến để bắt đầu chạy bộ.

+ Ta có: $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1000^2 - 100^2} = 300\sqrt{11}(m)$

+ Đặt $HM = x(m)$ ($x \in (0; 300\sqrt{11})$); Gọi v (m/s) là vận tốc chạy bộ của người CS.

+ Khi đó: - Người CS phải bơi một đoạn bằng $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{100^2 + x^2} (m)$

$$\Rightarrow \text{Thời gian người CS bơi là: } t_b = \frac{AM}{v_b} = \frac{2\sqrt{100^2 + x^2}}{v} (s)$$

- Sau khi bơi, người CS cần chạy bộ một đoạn $MB = HB - HM = 300\sqrt{11} - x(m)$

$$\Rightarrow \text{Thời gian người CS chạy bộ là: } t_c = \frac{MB}{v_c} = \frac{300\sqrt{11} - x}{v} (s)$$

+ Tổng thời gian người CS tấn công mục tiêu là: $T = t_1 + t_2 = \frac{1}{v} \left(2\sqrt{100^2 + x^2} - x \right) + \frac{300\sqrt{11}}{v}$

+ Đặt $f(x) = 2\sqrt{100^2 + x^2} - x$ với $x \in (0; 300\sqrt{11}) \Rightarrow$ Để T nhỏ nhất thì $f(x)$ phải nhỏ nhất.

+ Ta có: $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{100^2 + x^2}} - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{100^2 + x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}}(m)$

Từ đây suy ra được: $f(x) \geq f\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$.

+ Vậy người CS phải bơi một đoạn bằng $AM = \sqrt{100^2 + x^2} = \frac{200}{\sqrt{3}}(m)$ để đến mục tiêu nhanh nhất. Chọn A.

Câu 50. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là?

- A. 74 triệu đồng B. 75 triệu đồng C. 76 triệu đồng D. 77 triệu đồng

Hướng dẫn:

+ Đặt chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là $2x; x; h$ (đơn vị m)

+ Theo đề ra ta có: $2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}(m)$

+ Để chi phí nhỏ nhất thì diện tích xung quanh (khối hộp chữ nhật không nắp) phải nhỏ nhất, hay $S = 2x^2 + 6xh$ nhỏ nhất.

+ Ta có:

$$S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \left(\frac{250}{x}\right)^2} = 150(m^2)$$

+ Vậy chi phí thuê nhân công thấp nhất bằng $150 \cdot 500000 = 75000000$ đồng = 75 triệu đồng
Chọn B.

Câu 51. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

- A. 2.225.000. B. 2.100.000 C. 2.200.000 D. 2.250.000

Hướng dẫn:

+ Gọi x (đồng) là số tiền tăng thêm \Rightarrow Số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2x}{100000}$ (căn)

+ Số thu nhập trong một tháng là:

$$T = \left(50 - \frac{2x}{100000}\right)(2000000 + x) = \frac{1}{50000}(2500000 - x)(2000000 + x) \leq \frac{1}{50000} \frac{(2500000 + 2000000)^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2500000 - x = 2000000 + x \Leftrightarrow x = 250000$

+ Vậy muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá 2250000 (đồng). Chọn D.

Câu 52. Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

- A. $\sqrt[3]{4V}$ B. $\sqrt[3]{V}$ C. $\sqrt[3]{2V}$ D. $\sqrt[3]{6V}$

Hướng dẫn:

+ Gọi a, h lần lượt là cạnh đáy, chiều cao của lăng trụ

+ Ta có: $V = h \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$

+ Diện tích toàn phần của hình lăng trụ bằng $S = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ha = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$

+ Áp dụng BĐT AM-GM (Cô-si) ta có:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a} = \sqrt{3} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{2V}{a} + \frac{2V}{a} \right) \geq \sqrt{3} \cdot 3 \sqrt{\frac{4V^2}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{a^2}{2} = \frac{2V}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V}$. Chọn A.

Câu 53. Cần phải xây dựng một hồ ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3(\text{m}^3)$. Tỉ số giữa chiều cao của hồ (h) và chiều rộng của đáy (y) bằng 4. Biết rằng hồ ga chỉ có các mặt bên và mặt đáy (tức không có mặt trên). Chiều dài của đáy (x) gần nhất với giá trị nào ở dưới để người thợ tốn ít nguyên vật liệu để xây hồ ga.

- A. 1 B. 1,5 C. 2 D. 2,5

Hướng dẫn:

+ Theo đề ra ta có:
$$\begin{cases} h = 4y \\ xyh = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4 \cdot \frac{3}{xh} \Leftrightarrow h^2 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}} (*) \\ y = \frac{1}{4}h = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

+ Người thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất khi tổng diện tích các mặt bên và đáy là nhỏ nhất, hay $S = 2xh + 2hy + xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

+ Từ (*), ta có: $S = 2\sqrt{12}\sqrt{x} + 2 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x} = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$

+ Áp dụng BĐT AM-GM (Cô-si), ta được:

$$S = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6 \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2}{x}} x = 3\sqrt[3]{6 \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{27}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{6}{x} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (Gần nhất với giá trị B. 1,5). Chọn B.

Câu 54. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

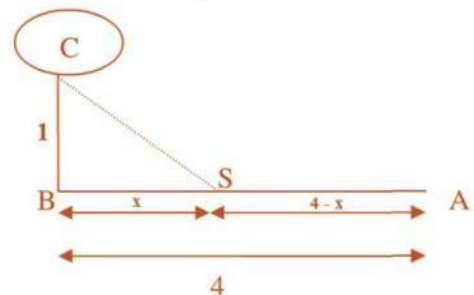
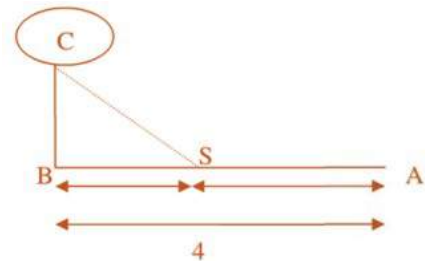
- A. $\frac{15}{4} \text{ km}$ B. $\frac{13}{4} \text{ km}$ C. $\frac{10}{4}$ D. $\frac{19}{4}$

Hướng dẫn:

+ Đặt $BS = x$ ($0 < x < 4$).

+ Khi đó:
$$\begin{cases} CS = \sqrt{1+x^2} \\ SA = 4-x \end{cases}$$

+ Chi phí bỏ ra là:



$$f(x) = 5000\sqrt{1+x^2} + 3000(4-x) \quad (\text{USD})$$

+ Ta cần tìm $x \in (0; 4)$ sao cho $f(x)$ nhỏ nhất.

+ Xét hàm số $f(x)$ trên $(0; 4)$, ta có: $f'(x) = \frac{5000x}{\sqrt{1+x^2}} - 3000$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1000(5x - 3\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(1+x^2) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

+ Từ bảng biến thiên ta có $f(x)$ trên $(0; 4)$:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	4	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$		$f(0)$		$f(4)$	

$\xrightarrow{16000}$

+ Từ bảng biến thiên ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 16000 tại $x = \frac{3}{4}$.

+ Vậy điểm S trên bờ cần tìm cách A một khoảng $4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ (km). Chọn B.

Câu 55. Khi một kim loại được làm nóng đến 600°C , độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng 600°C , nếu nhiệt độ kim loại tăng thêm 5°C thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là 280MPa dưới 600°C và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là 38MPa, thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

A. 620.

B. 615.

C. 605.

D. 610.

Hướng dẫn:

+ Ở 600°C độ bền kéo của kim loại là $\frac{280}{2} \text{MPa} = 140 \text{MPa}$

+ Theo đề ra, sau n lần tăng 5°C thì độ bền kéo còn lại là $140 \cdot (65\%)^n$

+ Khi đó: $140 \cdot (65\%)^n \geq 38 \Leftrightarrow (65\%)^n \geq \frac{19}{70} \Leftrightarrow n \leq \log_{65\%} \frac{19}{70} \approx 3$

+ Vậy nhiệt độ tối đa bằng: $600^\circ\text{C} + 3 \cdot 5^\circ\text{C} = 615^\circ\text{C}$. Chọn B.

Câu 56. Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.

A. $AM = 6m, BM = 18m$

B. $AM = 7m, BM = 17m$

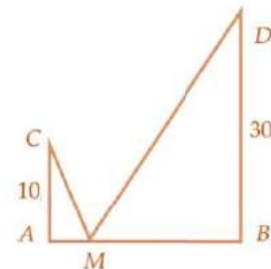
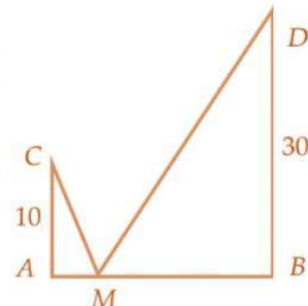
C. $AM = 4m, BM = 20m$

D. $AM = 12m, BM = 12m$

Hướng dẫn:

+ Đặt $AM = x \Rightarrow x \in (0; 24)$

Suy ra: $BM = 24 - x$



+ Tổng độ dài sợi dây cần dùng bằng: $L = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24-x)^2}$

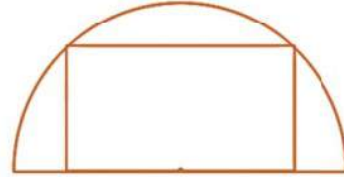
+ Ta có BĐT $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ với $a, b, c, d \geq 0$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0)

+ Khi đó: $L \geq \sqrt{(10+30)^2 + (x+24-x)^2} = 8\sqrt{34}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{10}{30} = \frac{x}{24-x} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow AM = 6; BM = 18$. Chọn A.

Câu 57. Một học sinh vẽ hình chữ nhật nội tiếp nửa đường tròn đường kính d , có một cạnh trùng với đường kính hình tròn (như hình vẽ). Gọi x là độ dài cạnh hình chữ nhật không trùng với đường kính. Tính diện tích nửa hình tròn theo x , biết diện tích hình chữ nhật đã cho là lớn nhất.



- A. $\frac{1}{4}\pi x^2$ B. πx^2 C. $\frac{1}{2}\pi x^2$ D. $2\pi x^2$

Hướng dẫn:

+ x là độ dài cạnh hình chữ nhật không trùng với đường kính hình tròn \Rightarrow độ dài cạnh còn lại

của hình chữ nhật là $2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}$

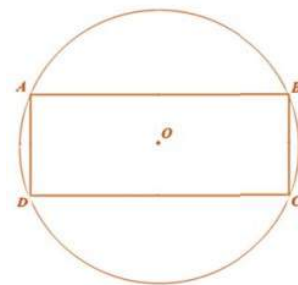
+ Diện tích hình chữ nhật bằng $S_1 = 2x\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}{2} = \frac{d^2}{4}$ (Áp dụng BĐT Cauchy)

Dấu “=” xảy ra khi $x = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2} \Leftrightarrow d = 2x\sqrt{2}$

+ Diện tích nửa hình tròn bằng $S_2 = \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi(x\sqrt{2})^2}{2} = \pi x^2$. Chọn B.

Câu 58. Một kĩ sư thiết kế sân tập thể thao dạng hình chữ nhật ABCD diện tích bằng 961m^2 và được mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD có tâm O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Tính diện tích nhỏ nhất (có thể đạt được) của 4 phần đất được mở rộng. (Xem hình vẽ bên)

- A. $961\pi - 961 \text{ m}^2$ B. $1892\pi - 946 \text{ m}^2$
C. $1922\pi - 961 \text{ m}^2$ D. $480,5\pi - 961 \text{ m}^2$



Hướng dẫn:

+ Đặt $\begin{cases} AB = x \\ BC = y \end{cases}$ và R là bán kính đường tròn (H) có tâm O ngoại

tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

+ Khi đó, theo đề ra ta có: $R^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}$ và $xy = 961$.

+ Tổng diện tích 4 phần đất mở rộng là:

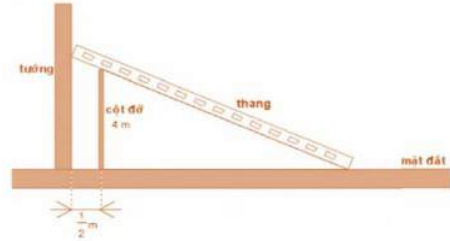
$$S = S_H - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} - xy \stackrel{BDT \text{ Cauchy}}{\geq} \pi \cdot \frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961(m^2)$$

Vậy diện tích nhỏ nhất (có thể đạt được) của 4 phần đất được mở rộng là $480,5\pi - 961(m^2)$

Chọn D.

Câu 59. Tính chiều dài bé nhất của cái thang đơn vị m, để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ tâm của cột đỡ (xem hình vẽ, kết quả lấy đến 2 chữ số thập phân).

- A. 5,49m B. 5,69m
C. 5,59m D. 5,79m



Hướng dẫn:

+ Đặt AB là chiều dài của cái thang, HC = 4m là cột đỡ, C là giao điểm của cột đỡ và thang; x là góc hợp bởi mặt đất và thang.

+ Ta có: $AB = AC + BC = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{2 \cos x}$

+ Xét hàm $f(x) = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{2 \cos x}$ với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Ta có:

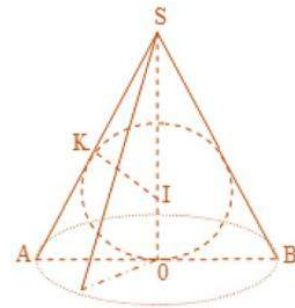
$$f'(x) = \frac{-4 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2$$

+ Từ đó suy ra: $f(x) \geq f(\arctan 2) \approx 5,59 \Rightarrow \min_{(0; \frac{\pi}{2})} f(x) = 5,59$

+ Vậy chiều dài bé nhất của cái thang thỏa mãn là 5,59 cm. Chọn C.

Câu 60. Một hạt ngọc trai hình cầu (S) bán kính R không đổi, được bọc trong một hộp trang sức dạng hình nón (N) ngoại tiếp mặt cầu (S). Khi đó thì chiều cao h và bán kính đáy r của hình nón (N) lần lượt bằng bao nhiêu để hộp trang sức có thể tích nhỏ nhất?

- A. $\begin{cases} h = 4R \\ r = R\sqrt{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} h = 3R \\ r = R\sqrt{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} h = R\sqrt{2} \\ r = 4R \end{cases}$ D. $\begin{cases} h = R\sqrt{3} \\ r = 4R \end{cases}$



Hướng dẫn:

+ Đặt $SI = x, x > R$. Khi đó, ta có $SO = x + R$.

+ Ta có: $SK = \sqrt{x^2 - R^2}; \Delta SIK \sim \Delta SAO \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{IK}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{IK \cdot SO}{SK} = \frac{R(x+R)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

+ Suy ra, thể tích V của hình nón (N) bằng:

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2 (x+R)^2}{x^2 - R^2} \cdot (x+R) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{(x+R)^2}{x-R}$$

+ Đặt $f(x) = \frac{(x+R)^2}{x-R}, x > R$. Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 2Rx - 3R^2}{(x-R)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3R(t/m) \\ x = -R(\text{loại}) \end{cases}$

+ Bảng biến thiên của $f(x)$ trên khoảng $(R; +\infty)$:

x	R	3R	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	↘ 8R ↗	
			$+\infty$

+ Từ đó suy ra, $V(x)$ đạt GTNN bằng $\frac{8\pi R^3}{3}$ khi $\begin{cases} SO = x + R = 4R = h \\ AO = R\sqrt{2} = r \end{cases}$. Chọn A.

Câu 61. Trong một cuộc thi, thử thách đặt ra là: BTC sẽ cấp cho bạn một chiếc xe máy, có một đoạn dốc được tạo nên từ một mặt phẳng có thể thay đổi được độ nghiêng từ gốc. Một cảm biến quang học được đặt sẵn ở độ cao nhất định so với mặt đất sẽ hoạt động nếu xe máy của bạn đạt đến độ cao này. Biết rằng nếu chiếc xe máy này đi lên con dốc có độ nghiêng là 30° thì đạt vận tốc 20 km/h và cứ nâng độ nghiêng thêm 4° thì vận tốc xe máy giảm 5km/h. Hỏi để đạt đến độ cao đề ra sớm nhất ta nên đặt mặt phẳng ban đầu có độ nghiêng là bao nhiêu?

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Hướng dẫn:

+ Gọi độ nghiêng khi thay đổi là $(30 + 4x)^\circ$ thì vận tốc lúc đó là: $20 - 5x$ ($\Rightarrow 0 \leq x < 4$)

+ Thời gian để đạt đến độ cao h cho trước bằng $t = \frac{h}{(20 - 5x)\sin(30 + 4x)}$

+ Theo đề ra ta cần tìm x sao cho thời gian nhỏ nhất $\Leftrightarrow t_{\min} \Leftrightarrow \left[\frac{h}{(20 - 5x)\sin(30 + 4x)} \right]_{\text{Max}}$

+ Ta có: $f'(x) = 4(20 - 5x)\cos(30 + 4x) - 5\sin(30 + 4x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4} \in [0; 4)$

Từ đó tìm được: $\max_{[0;4)} f(x) = f\left(\frac{15}{4}\right)$

+ Vậy độ nghiêng tốt nhất để đạt đến độ cao sớm nhất là 45° . Chọn B.

Câu 62. Một miếng giấy hình chữ nhật ABCD với $AB = x$, $BC = 2x$ và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD), Δ song song với AD và cách AD một khoảng bằng a , Δ không có điểm chung với hình chữ nhật ABCD và khoảng cách từ A đến Δ lớn hơn khoảng cách từ B đến Δ . Tìm thể tích lớn nhất có thể có của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật ABCD quanh Δ .

- A. $\frac{64\pi a^3}{27}$ B. $64\pi a^3$ C. $\frac{63\pi a^3}{27}$ D. $\frac{64\pi}{27}$

Hướng dẫn:

+ Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB, CD với Δ và V là thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật ABCD quanh Δ .

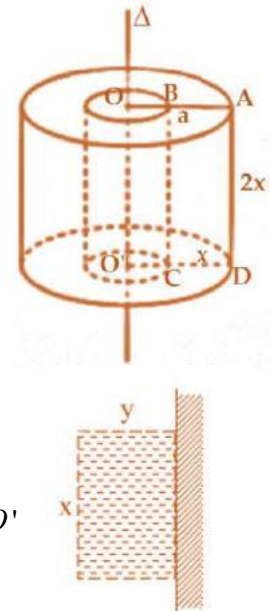
+ V_n là thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ .

+ V_t là thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ .

+ Khi đó: $V = V_n - V_t = \pi OA^2 \cdot AD - \pi OB^2 \cdot BC = 2x\pi [a^2 - (a - x)^2]$

$$= 2x^2\pi(2a - x) = 8\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} (2a - x) \leq 8\pi \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2a - x}{3} \right)^3 = \frac{64\pi}{27} a^3. \quad \text{Vậy } \text{Max}_V = \frac{64\pi}{27} a^3.$$

Chọn A.



Câu 63. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 8 (m) thẳng hàng rào. Ở đó người ta vận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào là bao nhiêu?

- A. 16 B. 12 C. 8 D. 6

Hướng dẫn:

+ Gọi x là độ dài cạnh song song với bờ giậu và y là độ dài cạnh vuông góc với bờ giậu.

+ Theo bài ra ta có $x + 2y = 8$ và diện tích của miếng đất đã rào là $S = xy = y(8 - 2y)$

+ Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM (Cauchy), ta có:

$$2S = 2y(8 - 2y) \leq \frac{(2y + 8 - 2y)^2}{4} = \frac{8^2}{4} = 16 \Rightarrow S \leq 8$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2y = 8 - 2y \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$

+ Diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào bằng 8. Chọn C.

Câu 64. Một lọ nước hoa thương hiệu BOURJOIS được thiết kế vỏ dạng nón có thể tích V không đổi, phần chứa dung dịch nước hoa là hình trụ nội tiếp hình nón trên. Hỏi để chứa được nhiều nước hoa nhất thì tỷ số khoảng cách từ đỉnh hình nón đến mặt trên của hình trụ chứa nước hoa với chiều cao của hình nón bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn:

+ Một mặt phẳng đi qua đỉnh và vuông góc với đáy của hình nón, các điểm và kích thước được ký hiệu như hình vẽ bên.

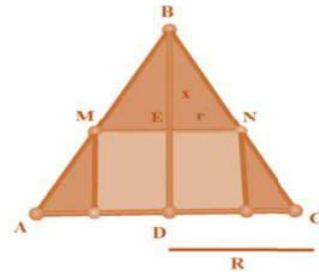
+ Đặt $BE = x, BD = h$, ta có: $\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{h}$

+ Thể tích hình trụ chứa nước hoa là:

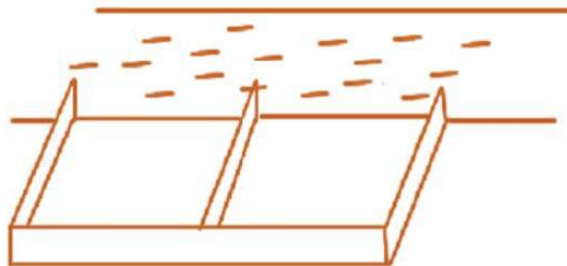
$$V = \pi r^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2h^2} x \cdot x \cdot (2h - 2x) \stackrel{BDT \text{ Cauchy}}{\leq} \frac{\pi R^2}{2h^2} \cdot \frac{(x + x + 2h - 2x)^3}{27} = \frac{4R^2 h}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2h - 2x \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{2}{3}$. Chọn A.



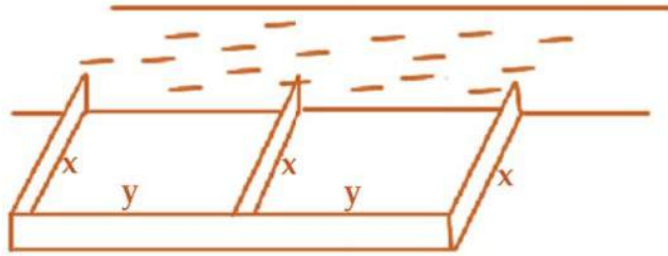
Câu 65. Một bác nông dân có 60 000 000 đồng để làm một cái rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần bằng nhau để trồng cà chua. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40 000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất có thể rào được?



- A. 120000m² B. 150000m² C. 100000m² D. 90000m²

Hướng dẫn:

+ Đặt các kích thước như hình vẽ dưới



+ Theo đề ra ta có: $3x \cdot 40000 + 2y \cdot 50000 = 60000000 \Leftrightarrow 6x + 5y = 3000 \Leftrightarrow y = 600 - \frac{6}{5}x$

+ Diện tích của khu đất rào được là: $S = 2xy = 2x \left(600 - \frac{6}{5}x \right) = 1200x - \frac{12}{5}x^2$

+ Xét hàm số $f(x) = 1200x - \frac{12}{5}x^2$ với $x \in (0; 500)$, ta có:

$$f'(x) = 1200 - \frac{24}{5}x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250 \in (0; 500)$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được $\max_{(0;500)} f(x) = f(250) = 150000 (m^2)$

+ Vậy diện tích lớn nhất của đất có thể rào được là $150000 m^2$. Chọn B.

Câu 66. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thả -
mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của
chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy
phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích
lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. 600

B. $843\sqrt{3}$

C. $384\sqrt{3}$

D. $348\sqrt{3}$

Hướng dẫn:

+ Gọi chiều rộng là x , $0 < x < 12$.

+ Thể tích hình hộp là: $V = x(12 - x)(24 - x) = x^3 - 36x^2 + 288x$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - 36x^2 + 288x$ trên $(0; 12)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 72x + 288; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 4\sqrt{2} \notin (0; 12) \\ x = 12 - 4\sqrt{3} \in (0; 12) \end{cases}$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được: $\max_{(0;12)} f(x) = f(12 - 4\sqrt{3}) = 384\sqrt{3} \Rightarrow V_{\max} = 384\sqrt{3}$

Chọn C.

Câu 67. Một công ty mỹ phẩm ở Pháp vừa cho ra mắt sản phẩm mới là chiếc thỏi son mang tên BOURJOIS có dạng hình trụ có chiều cao h (cm), bán kính đáy r (cm), thể tích yêu cầu của mỗi thỏi là $20,25\pi (cm^3)$. Biết rằng chi phí sản xuất cho mỗi thỏi son như vậy được xác định theo công thức: $T = 60000r^2 + 20000rh$ (đồng). Để chi phí sản xuất là thấp nhất thì tổng $(r + h)$ bằng bao nhiêu cm?

A. 9,5

B. 10,5

C. 11,4

D. 10,2

Hướng dẫn:

+ Thể tích mỗi thỏi son: $V = \pi r^2 h = 20,25\pi \Rightarrow h = \frac{20,25}{r^2}$

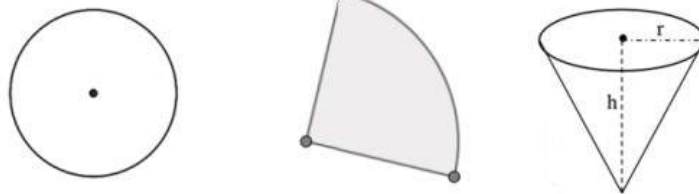
+ Chi phí sản xuất mỗi thỏi son: $T = 60000r^2 + 20000rh = 60000r^2 + \frac{405000}{r}$

+ Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$T = 60000r^2 + \frac{202500}{r} + \frac{202500}{r} \geq 3\sqrt{60000r^2 \cdot \frac{202500}{r} \cdot \frac{202500}{r}} = 405000$$

Dấu "=" xảy ra khi $60000r^2 = \frac{202500}{r} \Leftrightarrow r = 1,5 \Rightarrow h = 9 \Rightarrow r + h = 10,5$. Chọn B.

Câu 68. Một bạn học sinh cắt lấy tờ giấy hình tròn (có bán kính R) rồi cắt một phần giấy có dạng hình quạt. Sau đó bạn ấy lấy phần giấy đó làm thành cái nón chú hề (như hình vẽ). Gọi x là chiều dài dây cung tròn của phần giấy được xắt thành cái nón chú hề, h và r lần lượt là chiều cao và bán kính của của cái nón. Nếu $x = k.R$ thì giá trị của k xấp xỉ bằng bao nhiêu để thể tích của hình nón là lớn nhất.



A. 3,15

B. 4,67

C. 5,13

D. 6,35

Hướng dẫn:

+ Chu vi hình tròn đáy của cái nón chú hề bằng $C = 2\pi r = x \Leftrightarrow r = \frac{x}{2\pi}$

+ Ta có bán kính R của hình tròn chính là đường sinh của khối nón và vòng tròn đáy của khối

nón có độ dài là x do đó: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

+ Khi đó, thể tích cái nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

+ Suy ra: $V^2 = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{x^4}{16\pi^4} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$

+ Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^3}{27} = \frac{4\pi^2 R^6}{243} \leq V \leq \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\pi R}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{R} \approx 5,13$. Chọn C.

Câu 69. Một cái nắp của bình chứa rượu gồm một phần dạng hình trụ, phần còn lại có dạng nón (như hình vẽ). Phần hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h, đường sinh bằng 1,25m. Phần hình trụ có bán kính đáy bằng bán kính hình nón, chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$.

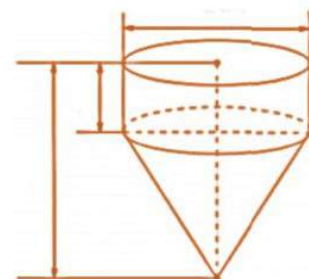
Kết quả $(r + h)$ xấp xỉ bằng bao nhiêu cm để diện tích toàn phần của cái nắp là lớn nhất.

A. 427

B. 381

C. 166

D. 289



Hướng dẫn:

+ NX: Chi phí vật liệu làm cái nắp là nhỏ nhất \Leftrightarrow diện tích xung quanh của nắp nhỏ nhất.

+ Đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow h = \sqrt{125^2 - r^2}$

+ Diện tích xung quanh hình trụ: $S_1 = 2\pi r \cdot \frac{h}{3} = \frac{2}{3}\pi r\sqrt{125^2 - r^2}$

+ Diện tích xung quanh hình nón: $S_2 = \pi rl = 125\pi r$

+ Vậy diện tích toàn phần của của cái nắp bằng: $S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3}\pi r\sqrt{125^2 - r^2} + 125\pi r$

+ Xét hàm $f(r) = \frac{2}{3}\pi r\sqrt{125^2 - r^2} + 125\pi r, r \in (0; 125)$. Ta có:

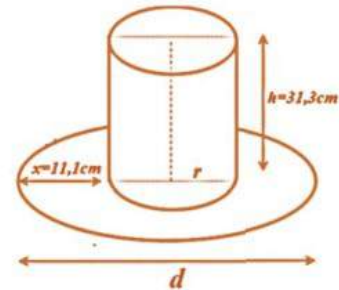
$$f'(r) = \frac{31250\pi - 4\pi r^2 + 375\pi\sqrt{125^2 - r^2}}{3\sqrt{125^2 - r^2}}; f'(r) \stackrel{\text{BAM MÂY}}{\Leftrightarrow} r \approx 113,12 \text{ cm}$$

+ Từ đó tìm được: $f(r) \leq f(113,12)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow r \approx 113,12 \Rightarrow h \approx 53,187 \Rightarrow r + h \approx 166,307$. Chọn C.

Câu 70. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật gia gồm phần dạng hình trụ (có tổng diện tích vải là S_1) và phần dạng hình vành khăn (có tổng diện tích vải là S_2) với các kích thước như hình vẽ. Tính tổng $(r + d)$ sao cho biểu thức $P = 3S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất (không kể viền, mép, phần thừa).

- A. 28,2 B. 26,2 C. 30,8 D. 28,2



Hướng dẫn:

+ Ta có: $d = 2r + 22,2$

+ Diện tích vải để may phần dạng hình trụ là: $S_1 = 2\pi rh + \pi r^2$

+ Diện tích vải để may phần dạng hình vành khăn là: $S_2 = \frac{\pi d^2}{4} - \pi r^2$

+ Khi đó, ta có:

$$P = 3S_2 - S_1 = \frac{3\pi d^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi rh = \frac{3\pi(2r + 22,2)^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi r \cdot 31,3$$

$$= \frac{\pi(-4r^2 + 16r + 1478,52)}{4} = \frac{\pi[-4(r-2)^2 + 1494,52]}{4} \leq \frac{1494,52\pi}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $r = 2 \Rightarrow d = 26,2 \Rightarrow r + h = 28,2$. Chọn D.

Câu 71. Một người lấy tấm kim loại hình chữ nhật rồi làm thành một cái máng có tiết diện là hình thang cân (như hình vẽ dưới). Hỏi góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy nhỏ của máng bằng bao nhiêu để tiết diện của máng có diện tích cực đại.



A. 150°

B. 135°

C. 120°

D. 145°

Hướng dẫn:

+ Gọi m là chiều rộng của tấm kim loại, x là chiều rộng của mặt bên, y là chiều rộng của đáy nhỏ và z được ký hiệu như hình vẽ $\Rightarrow m = 2x + y$.

+ Diện tích của tiết diện bằng:



$$S = \frac{(y+2z)+y}{2} \cdot \sqrt{x^2 - z^2} = (y+z) \sqrt{(x^2 - z^2)} = \sqrt{(y+z)(y+z)(x-z)(x+z)}$$

+ Khi đó, ta có:

$$S^2 = \frac{1}{3}(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{(y+z+y+z+x+z+3x-3z)^4}{256} = \frac{1}{3} \cdot \frac{[2(2x+y)]^4}{256} = \frac{m^4}{48}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{m^2 \sqrt{3}}{12}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y+z = x+z \\ x+z = 3x-3z \\ 2x+y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{m}{3} \\ z = \frac{m}{6} \end{cases}$$

+ Gọi α là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy nhỏ của máng $\Rightarrow \alpha = 90^\circ + \arcsin\left(\frac{z}{x}\right) = 120^\circ$

Chọn C.

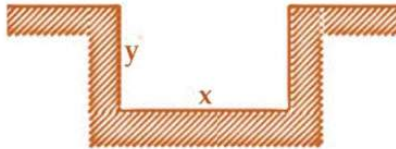
Câu 72. Một kiến trúc sư muốn thiết kế một cái mương dẫn nước dạng "Thủy động học". Diện tích tiết diện ngang của mương dạng hình chữ nhật bằng $40,5\text{m}^2$. Gọi a là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này. Hỏi người kiến trúc sư phải thiết kế cái mương dẫn nước có kích thước như thế nào để a nhỏ nhất?



- A. Chiều rộng 9m, chiều cao 4,5m
C. Chiều rộng 8,1m, chiều cao 5m

- B. Chiều rộng 10m, chiều cao 4,05m
D. Chiều rộng 10,8m, chiều cao 3,75m

Hướng dẫn:



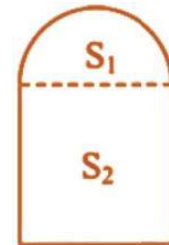
+ Gọi $x, y > 0$ như hình vẽ trên.

+ Theo đề ra ta có: $\begin{cases} xy = 40,5 \\ a = 2y + x \end{cases} \Rightarrow a = \frac{81}{x} + x \stackrel{BDT \text{ Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{81}{x} \cdot x} = 18.$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{81}{x} = x \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow y = 4,5$. Chọn A.

Câu 73. Một người thợ mộc cần làm một cái cổng nhà mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật. Biết cái cổng có chu vi bằng $1,9\pi + 8,8$ (m). Bán kính của hình bán nguyệt bằng bao nhiêu để diện tích cái cổng là lớn nhất.

- A. $\frac{2,5\pi + 5,6}{\pi + 4}$ (m) B. $\frac{1,9\pi + 8,8}{\pi + 4}$ (m)
C. $\frac{1,5\pi + 9,2}{\pi + 4}$ (m) D. $\frac{2,1\pi + 5,1}{\pi + 4}$ (m)



Hướng dẫn:

+ Gọi r (m) là bán kính của hình bán nguyệt; d (m) là chiều dài của hình chữ nhật (m); S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình bán nguyệt và hình chữ nhật.

+ Theo đề ra, ta có: $1,9\pi + 8,8 = \pi r + 2d + 2r \Leftrightarrow d = \frac{1,9\pi + 8,8 - (\pi + 2)r}{2}$

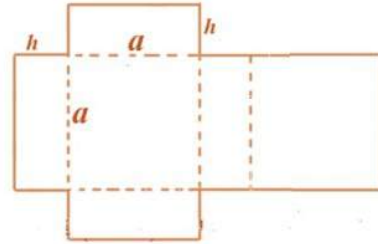
+ Diện tích cánh công bằng:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi r^2}{2} + 2rd + r[1,9\pi + 8,8 - (\pi + 2)r] = \frac{-(\pi + 4)r^2 + (3,8\pi + 17,6)r}{2}$$

+ Theo tính chất tam thức bậc 2 $\Rightarrow S$ đạt Max $\Leftrightarrow r = \frac{-(3,8\pi + 17,6)}{-2(\pi + 4)} = \frac{1,9\pi + 8,8}{\pi + 4}(m)$

Chọn B.

Câu 74. Một bạn đã cắt tấm bìa carton phẳng và cứng và đặt kích thước như hình vẽ. Sau đó bạn ấy gấp theo đường nét đứt thành cái hộp hình hộp chữ nhật. Hình hộp có đáy là hình vuông cạnh a (cm), chiều cao là h (cm) và diện tích tấm bìa bằng $3m^2$. Tổng $a + h$ bằng bao nhiêu để thể tích hộp là lớn nhất.



- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 46,3 D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

+ Theo đề ra, diện tích mảnh bìa bằng: $S = 2a^2 + 4ah = 3 \Rightarrow h = \frac{3 - 2a^2}{4a} \left(\Rightarrow 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

+ Thể tích hình hộp chữ nhật: $V = a^2h = \frac{3a - 2a^3}{4}$

+ Xét hàm số $f(a) = \frac{3a - 2a^3}{4}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, ta có: $f'(a) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}a^2$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Từ đó tìm được $\max V = \max_{\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)} f(a) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a + h = \sqrt{2}$. Chọn D.

Câu 75. Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An đã nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng 5cm, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD và DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A; B; C; D trùng nhau tạo thành khối tứ diện đều.

Thể tích lớn nhất của khối tứ diện đều tạo thành là:

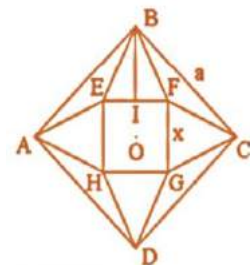
- A. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

Hướng dẫn:

+ Gọi cạnh của hình vuông EFGH là x ($0 < x < 5\sqrt{2}$) $\Rightarrow BI = \frac{5\sqrt{2} - x}{2}$.

+ Đường cao của hình chóp tạo thành:

$$h = \sqrt{BI^2 - IO^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 - 5x\sqrt{2}}{2}}$$



+ Thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{25-5x\sqrt{2}}{2}}$

+ Xét hàm số $f(x) = x^2 \sqrt{\frac{25-5x\sqrt{2}}{2}}$ trên $(0; 5\sqrt{2})$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

+ Từ đó tìm được $V_{\max} = f(2\sqrt{2}) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \sqrt{\frac{25-5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{3} (cm^3)$. Chọn A.

Câu 76. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^{3t}$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

- A. 9 km/h B. 8 km/h C. 10 km/h D. 12 km/h

Hướng dẫn:

+ Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h ($v > 6$)

+ Năng lượng cá tiêu hao cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v) = cv^3t = cv^3 \cdot \frac{400}{v-6}$.

+ Ta có: $E'(v) = c \cdot 400 \cdot \frac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow v = 9 (km/h)$

+ Từ đó tìm được $MinE(v) = E(9) = 97200c$. Chọn A.

Câu 77. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi 8(dm) để diện tích của hình quạt là cực đại thì bán kính hình quạt bằng bao nhiêu dm?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn:

+ Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn.

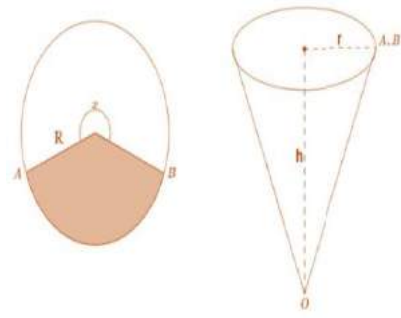
+ Ta có chu vi cánh điều là $8 = 2x + y$.

+ Diện tích cánh điều bằng $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(8-2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(8-2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x+8-2x)^2}{4} = 4$.

Dấu “=” xảy ra khi $2x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 2$. Chọn B.

Câu 78. Cắt bỏ hình quạt tròn AOB từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu $0 < x < 2\pi$. Tìm x để hình nón có thể tích lớn nhất

- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$ B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$ C. $x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$ D. $x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$



Hướng dẫn:

+ Thể tích cái phễu là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ + Ta có chu vi đáy bằng: $2\pi r = Rx \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$

+ Lại có: $h = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

+ Khi đó: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

+ Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$V = \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}R^3}{2.48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi^2 + 4\pi^2 - x^2 \right) = \frac{\sqrt{3}R^3}{2.48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{16}{3}\pi^2 - x^2 \right)$$

$$\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot \left[x^2 + \left(\frac{16}{3}\pi^2 - x^2 \right) \right]^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot \frac{16^2}{9} \cdot \pi^4 = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3$$

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\pi = \sqrt{4\pi^2 - x^2} \\ x^2 = \frac{16}{3}\pi^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi. \text{ Chọn B.}$$

Câu 79. Cần phải đặt một ngọn đèn ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính 2(m). Hỏi phải treo ở độ cao h bằng bao nhiêu m để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất.

Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn; r là khoảng cách từ đèn đến mép bàn và k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).

A. 2

B. 3

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

+ Ký hiệu và kích thước như hình vẽ bên.

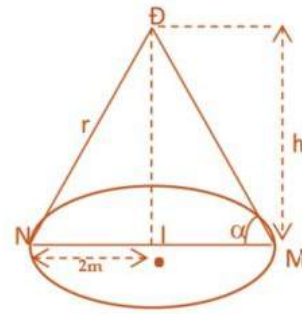
+ Ta có: $\sin \alpha = \frac{h}{r}; h^2 = r^2 - 2^2 = r^2 - 4 \Rightarrow h = \sqrt{r^2 - 4}$

+ Suy ra, cường độ $C = C(r) = k \frac{\sqrt{r^2 - 4}}{r^3}, (r > 2).$

+ Xét hàm $f(r) = k \frac{\sqrt{r^2 - 4}}{r}$ trên $(2; +\infty).$

Ta tìm được: $\max_{(2; +\infty)} f(x) = f(\sqrt{6}) = \frac{k\sqrt{3}}{18} \Rightarrow C_{\max} = \frac{k\sqrt{3}}{18}.$ Đạt

được khi $r = \sqrt{6} \Rightarrow h = \sqrt{2}.$ Chọn D.



Câu 80. Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao 12cm, đường kính đáy 4cm, lượng nước trong cốc cao 8cm. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính 2cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu xăng-ti-mét? (làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân, bỏ qua độ dày của cốc)

A. 2,67cm.

B. 2,75cm.

C. 2,25cm.

D. 2,33cm.

Hướng dẫn: Chọn A.

Lượng nước dâng lên chính là tổng thể tích của 4 viên bi thả vào bằng

$$V_b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi r_b^3 = \frac{16\pi}{3} \text{cm}^3. \text{ Dễ thấy phần nước dâng lên là hình trụ có đáy bằng với đáy cốc}$$

nước và thể tích là $\frac{16\pi}{3} \text{cm}^3.$ Chiều cao của phần nước dâng lên là h_d thỏa mãn: $\frac{16\pi}{3} = \pi r^2 h_d$

nên $h_d = \frac{4}{3} \text{cm}.$ Vậy nước dâng cao cách mép cốc là $12 - 8 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{cm}.$

Câu 81. Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trục của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỷ số thể tích của hai phần là:

A. $\frac{1}{2}.$

B. $\frac{1}{8}.$

C. $\frac{1}{4}.$

D. $\frac{1}{7}.$

Hướng dẫn: Chọn D.

Bài 09. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN ÔN LUYỆN THI THPT QG 2019

Câu 1 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 6 gần bằng số nào sau đây nhất?

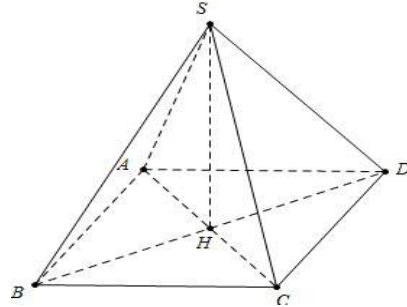
- A. 48 B. 46 C. 52 D. 53

Đáp án C

Ta có: $S_d = AB^2 = 36$

Lại có $AH = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 3\sqrt{2}$

Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = 36\sqrt{2}$



Câu 2 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Viết công thức thể tích V của khối cầu có bán kính r

- A. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ B. $V = \frac{1}{3}\pi r^3$ C. $V = \pi r^3$ D. $V = 4\pi r^3$

Đáp án A

Câu 3 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho hình chóp tam giác đều có cạnh bên là b và chiều cao $h (b > h)$ là Tính thể tích khối chóp đó

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$ B. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - h^2)h$ C. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}(b^2 - h^2)h$ D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)b$

Đáp án A

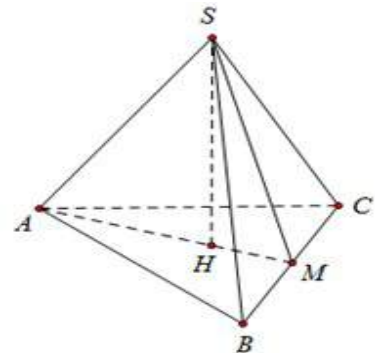
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH = h; SA = b$

Khi đó $AH = \sqrt{b^2 - h^2} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AH = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - h^2}$

Lại có $BM = AM \tan \widehat{BAM} = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - h^2} \cdot \tan 30^\circ$

Suy ra $S_{ABC} = AM \cdot BM = \frac{3\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)$

Khi đó $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$



Câu 4 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Nếu tăng chiều cao của một khối chóp lên 2 lần và giảm diện tích đáy đi 6 lần thì thể tích khối chóp đó tăng hay giảm bao nhiêu lần?

- A. Giảm 12 lần B. Tăng 3 lần
C. Giảm 3 lần D. Không tăng, không giảm

Đáp án C

Ta có $V = \frac{1}{3}S.h; V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{6} \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{3}$. Khi đó thể tích giảm 3 lần.

Câu 5 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Tính thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$.

A. $V = 12$

B. $V = 60$

C. $V = 10$

D. $V = 20$

Đáp án B $V = 3.4.5 = 60$

Câu 6 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và biết diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính thể tích của khối chóp.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

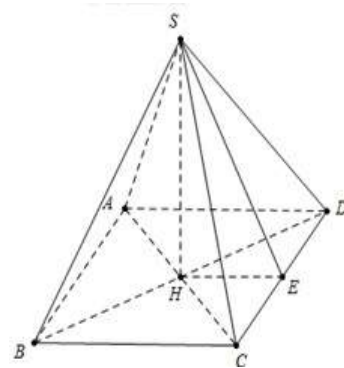
Đáp án D

Gọi E là trung điểm của CD

Ta có $S_{SCD} = \frac{1}{2}SE.CD \Rightarrow S_{xq} = 4S_{SCD} = 2SE.a = 2a^2 \Rightarrow SE = a$

Khi đó $SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$



Câu 7 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho khối tứ diện $ABCD, M$ là trung điểm AB . Mặt phẳng (MCD) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện nào?

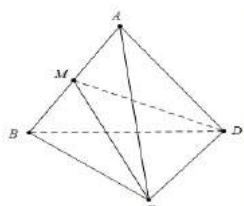
A. Hai khối lăng trụ tam giác.

B. Hai khối chóp tứ giác.

C. Một lăng trụ tam giác và một khối tứ diện.

D. Hai khối tứ diện.

Đáp án D



Câu 8 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5 \text{ cm}$, chiều cao $h = 7 \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S_{xq} = 35\pi(\text{cm}^2)$

B. $S_{xq} = 70\pi(\text{cm}^2)$

C. $S_{xq} = \frac{35}{3}\pi(\text{cm}^2)$

D. $S_{xq} = \frac{70}{3}\pi(\text{cm}^2)$

Đáp án B

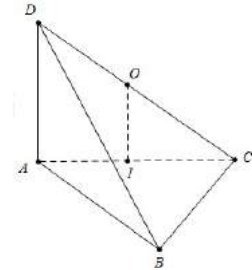
Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi rh = 70\pi(\text{cm}^2)$

Câu 9 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AD = a, AC = 2a$, cạnh BC vuông góc với AB . Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $r = a\sqrt{5}$ B. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $r = a$ D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Đáp án D

Ta có: $r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + DA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$



Câu 10 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB=2a, AD=a$. Hình chiếu của đỉnh S lên đáy là trung điểm của cạnh AB cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

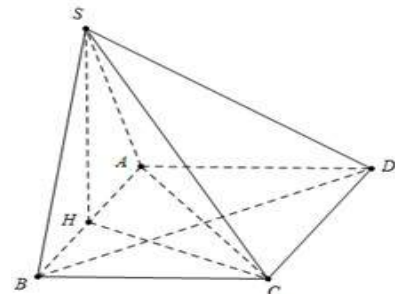
- A. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ C. $V = 2\sqrt{2}a^3$ D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Đáp án A

Ta có: $S_{ABCD} = 2a^2, CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Mặt khác $\widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = a\sqrt{2}$

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.\sqrt{2}.2a^2 = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$



Câu 11 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho khối chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a; SB = b; SC = c$ Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{1}{6}abc$ B. $V = \frac{1}{3}abc$ C. $V = abc$ D. $V = \frac{1}{2}abc$

Đáp án A

Câu 12 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Viết công thức diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh l và bán kính đường tròn đáy r .

- A. $S_{xq} = 2\pi rl$ B. $S_{xq} = rl$ C. $S_{xq} = \pi rl$ D. $S_{xq} = \frac{1}{2}\pi rl$

Đáp án C

$S_{xq} = \pi rl$

Câu 13 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt. B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
 C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt. D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

Đáp án A

Cho một hình đa diện mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt

Câu 14 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm I . Gọi V, V_1 lần lượt là thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối chóp $I.ABCD$. Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V}$.

- A. $k = \frac{1}{6}$ B. $k = \frac{1}{3}$ C. $k = \frac{1}{8}$ D. $k = \frac{1}{12}$

Đáp án A

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2}h}{S_{ABCD} \cdot h} = \frac{1}{6}$

Câu 15 (Sở GD và ĐT Bắc Ninh 2018): Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $x = 8$ 2. Biết tam giác ABC có chu vi bằng $5a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $V = \frac{a^3}{2}$ D. a^3

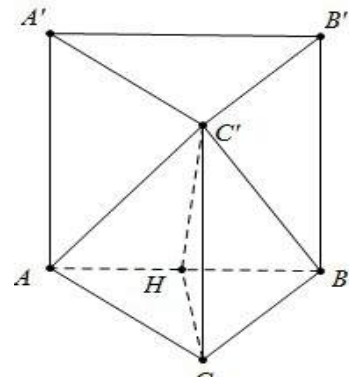
Đáp án C

Gọi H là trung điểm của AB ta có: $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp C'H$

Ta có $S_{ABC} = \frac{AC^2}{2} = a; AB = 2a; HA = HB = HC = a$

$C_{C'AB} = AB + 2C'A = 2a + 2\sqrt{CH^2 + HA^2} = 5a$

$\Rightarrow C'H = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow C'C = \sqrt{C'H^2 - CH^2} = \frac{a}{2}$. Do đó $V = Sh = \frac{a^3}{2}$



Câu 16 : (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho tứ diện $ABCD, G$ là trọng tâm ΔABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

- A. (ACD) B. (ABC) C. (ABD) D. (BCD)

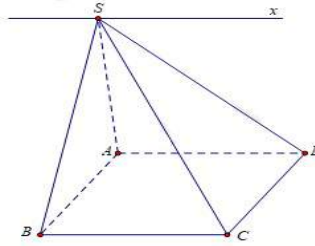
Đáp án A

Vì G là trọng tâm $\triangle ABD$ nên $\frac{BG}{BN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BG}{BN} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow MG \parallel CN \Rightarrow MG \parallel (ACD)$

Câu 17: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành.. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. AD B. BD C. DC D. AC

Đáp án A



Vì $AD \parallel BC$ nên $(SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD$

Câu 18: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 8 B. 6 C. Vô số D. 4

Đáp án D

Có tất cả 6 mặt phẳng. Đó là các mặt phẳng đi qua 1 cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.

Câu 19 : (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là:

- A. Ba mươi B. Mười sáu C. Mười hai D. Hai mươi

Đáp án D

Có tất cả 6 mặt phẳng. Đó là các mặt phẳng đi qua 1 cạnh và trung điểm của cạnh đối diện

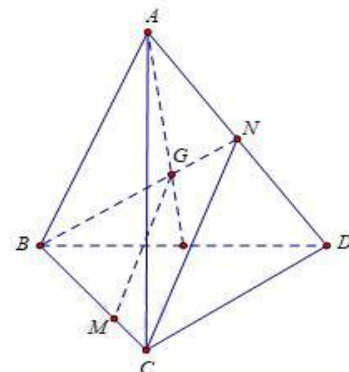
Câu 20: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao hình chóp là $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Đáp án B

$$\text{Diện tích đáy là } S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Thể tích khối chóp là: } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$



Câu 21: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại $B, AC = a\sqrt{2}$ biết góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Đáp án B

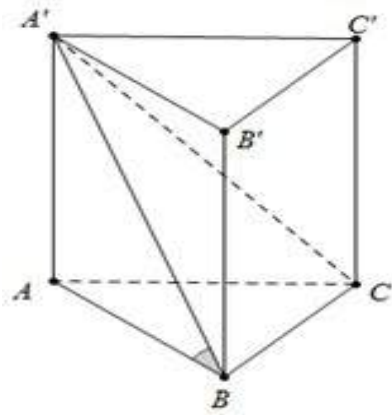
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'BA)$

Do đó $\widehat{((A'BC);(ABC))} = \widehat{A'BA} = 60^\circ$

Lại có $\triangle ABC$ vuông cân tại B do đó $AB = BC = a$

Suy ra $AA' = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot h = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$



Câu 22 : (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V . Lấy điểm B',D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C' . Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

- A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{2V}{3}$ C. $\frac{V^3}{3}$ D. $\frac{V}{6}$

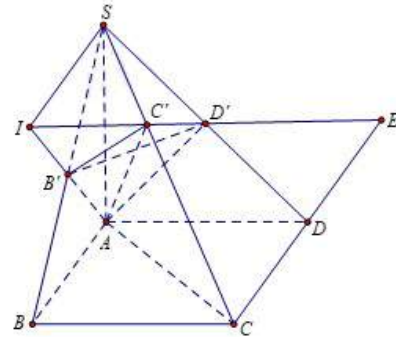
Ta có $\frac{SI}{AB} = \frac{SB'}{B'B} = 1 \Rightarrow SI = AB(1)$

$\frac{SI}{DE} = \frac{SD'}{D'D} = 1 \Rightarrow SI = DE(1)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SC'}{C'C} = \frac{SI}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$

Ta có $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{12} V$

$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AC'D'} = \frac{1}{6} V_{S.ACD} = \frac{1}{12} V \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{12} V + \frac{1}{12} V = \frac{1}{6} V$



Câu 23 : (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai ?

- A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$ B. Nếu $b // (P)$ thì $b // a$

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$

D. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$

Đáp án A

Câu 24 : (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình chóp có đáy $S.ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $a\sqrt{3}$

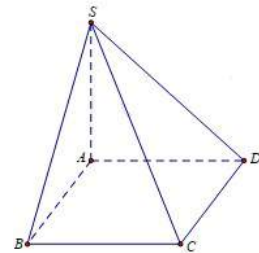
B. $a\sqrt{2}$

C. $2a$

D. a

Đáp án D

Vì $DC // AB$ nên $d(SB; CD) = d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB)) = AD = a$



Câu 25: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính cosin góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{41}}{41}$

Đáp án C

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow MH // SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Suy ra $\widehat{MN, (ABCD)} = \widehat{MN; HN} = \widehat{MNH} = 60^\circ \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi $I = HN \cap BD$, qua I kẻ đường thẳng $// MH$ cắt MN tại K

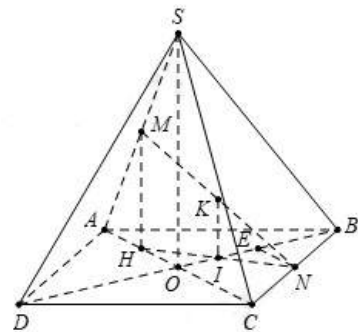
Khi đó $K = MN \cap (SBD)$ và E là hình chiếu của N trên BD

Suy ra $NE \perp (SBD) \Rightarrow \widehat{MN; (SBD)} = \widehat{NK; EK} = \widehat{NKE}$

Tam giác NEK vuông tại E có

$$NE = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; NK = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\sin \widehat{NKE} = \frac{EN}{NK} = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(\widehat{MN; (SBD)}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Câu 26: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ Khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ bằng

- A. $a\sqrt{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $2a$

Đáp án B

Xét tứ diện $AA'BD$ có $\begin{cases} AB = AA' = AD = a \\ \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow AA'BD$ là tứ diện đều

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BD

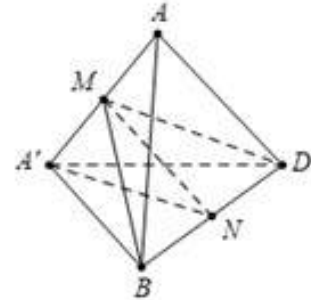
ΔMBD cân tại $M \Rightarrow MN \perp CD, \Delta NAA'$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AA'$

Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AA' và BD

Tam giác MNB vuông tại M có

$$MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}, NB = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{MB^2 - BN^2}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(AA'; BD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Câu 27: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Cắt khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bởi các mặt phẳng $(AB'D')$; $(CB'D')$; $(B'AC)$; $(D'AC)$ ta được khối đa diện có thể tích lớn nhất là:

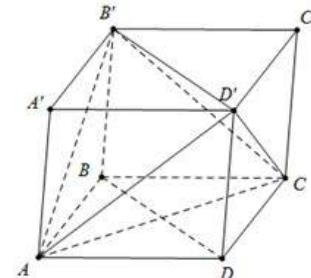
- A. $AC'B'D'$ B. $ACB'D'$ C. $A'C'BD$ D. $A'CB'D'$

Đáp án B

Ta thấy không tồn tại khối đa diện $A'C'BD$. Đặt $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$$V_{A'B'D'A} = V_{DADD'} = V_{C'B'D'C} = V_{BACB'} = \frac{V}{6}$$

$$V_{ACBD} = V - 4\frac{V}{6} = \frac{V}{3}$$



Câu 28: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Một công ty sữa cần sản xuất các hộp sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông chứa được thể tích thực là 180 ml . Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất.

- A. $\sqrt[3]{180^2} \text{ (cm)}$ B. $\sqrt[3]{360} \text{ (cm)}$ C. $\sqrt[3]{180} \text{ (cm)}$ D. $\sqrt[3]{720} \text{ (cm)}$

Đáp án C

Gọi chiều dài đáy là x và chiều cao hộp là y ($x, y > 0; \text{cm}$)

$$\text{Ta có } V = x^2 y = 180; S_{tp} = 4xy + 2x^2 = \frac{4 \cdot 180}{x} + 2x^2 = \frac{360}{x} + \frac{360}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{360^2 \cdot 2}$$

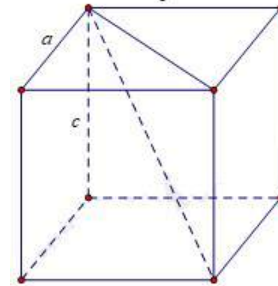
$$\text{Đầu bảng xảy ra } \Leftrightarrow \frac{360}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{180} \Rightarrow y = \frac{180}{x^2} = \sqrt[3]{180} \text{ (cm)}$$

Câu 29: (Sở giáo dục đào tạo Vĩnh Phúc- 2018): Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c . Khi đó bán kính của mặt cầu bằng

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ B. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3}$ C. $\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ D. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Đáp án A

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2}}{2}$$



Câu 30: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $S_A = a$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $3a^3$ C. a^3 D. $\frac{a^3}{6}$

Đáp án A

$$\text{Thể tích khối chóp S.ABCD là: } V = \frac{1}{3}S_{\text{ABCD}} \cdot SA = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$$

Câu 31: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Hình đa diện đều nào dưới đây có tất cả các mặt không là tam giác đều

- A. Bát giác đều B. Hình 20 mặt đều C. Hình 12 mặt đều D. Tứ diện đều

Đáp án C

Câu 32 (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Hình tròn xoay được sinh ra khi quay một hình chữ nhật quanh một cạnh của nó là

- A. hình chóp B. hình trụ C. hình cầu D. hình nón

Đáp án B

Câu 33: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Thể tích của một khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ là

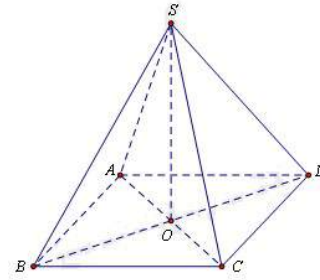
- A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Đáp án A

$$\text{Ta có: } 2AO^2 = a^2 \Rightarrow AO^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SO^2 = (a\sqrt{3})^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2} \quad \text{Câu 10: Đáp án D}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}$$



Câu 34 : (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $2\sqrt{3}a^3$ D. $\sqrt{3}a^3$

Đáp án C

$$\text{Diện tích đáy là: } S = \frac{1}{2}(2a)^2 \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ là: } V = Sh = a^2\sqrt{3} \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^3$$

Câu 35 : (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(I;R)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=3\text{cm}$ khoảng cách từ I đến (P) bằng 2cm . Diện tích mặt cầu $S(I;R)$ bằng

- A. $52\pi\text{cm}^2$ B. $13\pi\text{cm}^2$ C. $4\sqrt{13}\pi\text{cm}^2$ D. $4\sqrt{5}\pi\text{cm}^2$

Đáp án A

$$\text{Bán kính mặt cầu: } S(I;R) \text{ là } R = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}(\text{cm})$$

$$\text{Diện tích mặt cầu } S(I;R) \text{ là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi(\sqrt{13})^2 = 52\pi(\text{cm}^2)$$

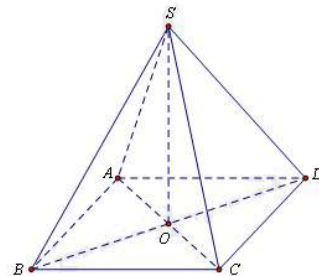
Câu 36: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60° là

- A. $2\pi a^2$ B. $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ C. $\pi a^2\sqrt{3}$ D. πa^2

Đáp án A

$$\text{Độ dài đường sinh là: } l = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là: } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$$



Câu 37: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Thể tích của khối cầu có bán kính R là

- A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ B. $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ C. $V = 4\pi R^3$ D. $V = \frac{1}{3}\pi R^3$

Đáp án A

Câu 38: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng 4dm^2 và chiều cao bằng 6dm là

- A. 4dm^3 B. 24dm^3 C. 12dm^3 D. 8dm^3

Đáp án D

Thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8(\text{dm}^3)$

Câu 39: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Diện tích toàn phần của một hình trụ có bán kính bằng 10cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng 5cm là

- A. $200\pi\text{cm}^2$ B. $300\pi\text{cm}^2$ C. $250\pi\text{cm}^2$ D. $100\pi\text{cm}^2$

Đáp án B

Tổng diện tích hai đáy là: $S_1 = 2\pi 10^2 = 200\pi(\text{cm}^2)$.

Diện tích xung quanh là: $S_2 = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 = 100\pi(\text{cm}^2)$

Diện tích toàn phần là: $S = S_1 + S_2 = 200\pi + 100\pi = 300\pi(\text{cm}^2)$

Câu 40: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng Hàm số đồng biến trên khoảng B và chiều cao bằng h là

- A. $V = 3Bh$ B. $V = \frac{1}{3}Bh$ C. $V = Bh$ D. $V = \frac{1}{6}Bh$

Đáp án C

Câu 41 : (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có đáy bằng a, cạnh bên $AA' = \frac{2a}{3}$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' là

- A. $\frac{8\pi a^3}{81}$ B. $\frac{\pi a^3}{81}$ C. $\frac{32\pi a^3}{81}$ D. $\frac{4\pi a^3}{81}$

Đáp án C

Bán kính đường tròn đáy của lăng trụ $r = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ là: $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \frac{2a}{3}$. Do đó $V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$

Câu 42: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;r),(O';r)$ và $OO' = r\sqrt{3}$. Gọi (T) là hình nón có đỉnh O' và đáy là hình tròn $(O;r)$, S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón (T). Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

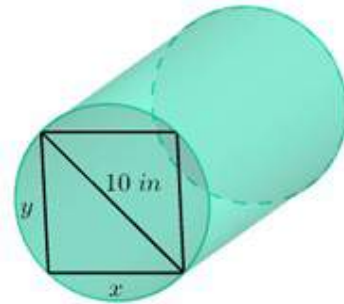
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 1

Đáp án B

Ta có $S_1 = 2\pi r.r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi r^2$; $S_2 = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r^2$. Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$

Câu 43: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Trong lĩnh vực xây dựng, độ bền d của một thanh xà bằng gỗ có dạng một khối trụ (được cắt từ một khúc gỗ, với các kích thước như hình bên dưới; biết 1 in bằng 2,54cm) được tính theo công thức $d = 13,8xy^2$. Giá trị gần đúng của x sao cho thanh xà có độ bền cao nhất là

- A. 8,33in B. 4,81in
C. 5,77in D. 3,33in



Đáp án C

Theo giả thiết, ta có $x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow$ độ bền của thanh xà là $d = 13,8x(100 - x^2)$

Xét hàm số $f(x) = 100x - x^3$ trên khoảng $(0;10)$ có $f'(x) = 100 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $f\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77in$

Câu 44: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$, tam giác $BB'C'$ là tam giác đều cạnh $2a, AB = a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{3a^3}{8}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{4}$ D. $\frac{3a^3}{2}$

Đáp án D

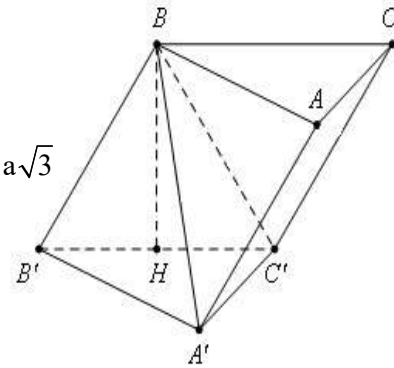
Gọi H là trung điểm của $B'C' \Rightarrow BH \perp (A'B'C')$

Tam giác $BB'C'$ đều cạnh $2a \Rightarrow BH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác $A'B'C'$ vuông tại $A' \Rightarrow A'C' = \sqrt{B'C'^2 - A'B'^2} = a\sqrt{3}$

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = BHS_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$$



Câu 45: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh cạnh BC bằng

- A. $\frac{3a^3\pi}{2}$ B. $\frac{a^3\pi}{6}$ C. $\frac{3a^3\pi}{8}$ D. $\frac{a^3\pi}{2}$

Đáp án D

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2a$ và chiều cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot 2a = \frac{\pi a^3}{2}$

Câu 46: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$ và M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng MN ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng $8\pi a^3$. Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là

- A. $2a^2$ B. $16a^2$ C. $8a^2$ D. $4a^2$

Đáp án C

Đặt $AD = x \Rightarrow AB = 2AD = 2x$.

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng MN ta được một khối trụ có

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bán kính đáy } R = AM = \frac{AB}{2} = x \\ \text{Chiều cao } h = MN = AD = x \end{array} \right\} \Rightarrow V(T) = \pi R^2 h = \pi x^3 = 8\pi a^3 \Rightarrow x = 2a$$

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2x^2 = 8a^2$

Câu 47: (Sở Giáo Dục-Đào Tạo Cần Thơ-2018) Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi M là điểm đối xứng với C qua D và N là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) , trong đó (H_1) chứa điểm C . Thể tích của khối (H_1) là

A. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{72}$

B. $\frac{5\sqrt{6}a^3}{72}$

C. $\frac{5\sqrt{6}a^3}{36}$

D. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{36}$

Đáp án B

Nối MN cắt SD tại Q, MB cắt AD tại P

Suy ra mp(BMN) cắt khối chóp S.ABCD theo thiết diện tứ giác BPQN và chia khối chóp

thành 2 đa diện $\begin{cases} (H_1) \longrightarrow V_1 \\ (H_2) \longrightarrow V_2 \end{cases}$

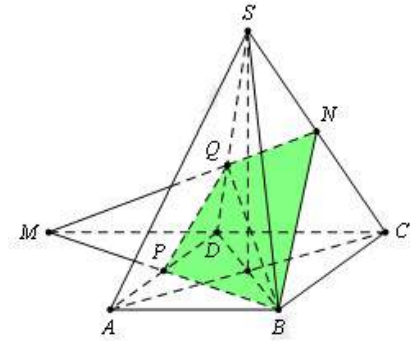
xét tam giác SMN có N, D lần lượt là trung điểm của SC, MC
mà $SD \cap MN = Q \Rightarrow Q$ là trọng tâm tam giác SMC

và $MB \cap AD = P \Rightarrow P$ là trung điểm của AD

Ta có $\frac{V_{M,PQD}}{V_{M,BCN}} = \frac{MP}{MB} \cdot \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MQ}{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

Mà $V_{M,BCN} = V_{M,PQD} + V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{5}{6} V_{M,BCN} = \frac{5}{12} V_{S,ABCD}$

Thể tích của khối (H_1) là $V_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{5\sqrt{6}a^3}{72}$



Câu 48: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Số mặt phẳng đối xứng của hình chóp đều S.ABC là

A. 4

B. 2

C. 6

D. 3

Đáp án D

Hình chóp tam giác đều có 3 mặt phẳng đối xứng đó là các mặt phẳng đi qua cạnh bên và trung điểm cạnh đối diện

Câu 49: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Khối cầu (S) có bán kính bằng r và thể tích bằng V.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

B. $V = \frac{4}{3} \pi^2 r^2$

C. $V = \frac{4}{3} \pi^2 r^3$

D. $V = \frac{4}{3} \pi r$

Đáp án A

Câu 50: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a, SA$ vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 60° .
Tính thể tích V của khối chóp đã cho

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$

B. $V = \sqrt{2}a^3$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

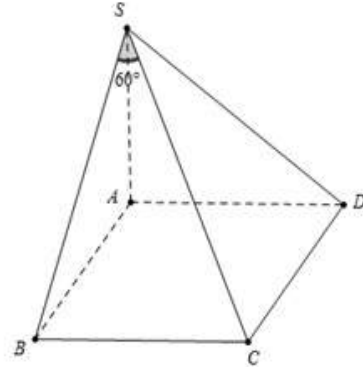
Đáp án D

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Khi đó $\widehat{SB; (SAB)} = \widehat{CSB} = 60^\circ$

Ta có: $SB = BC \cdot \cot 60^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Do vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$



Câu 51 : (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho tứ diện ABCD có tam giác BCD vuông tại B, AC vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AC = 5a, BC = 3a, BD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

A. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$

B. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$

C. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$

D. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$

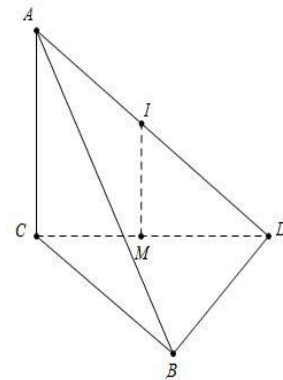
Đáp án D

Gọi M là trung điểm của CD đường thẳng qua M song song với AC cắt AD tại trung điểm I của AD. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện

Ta có: $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = 5a$

Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$R = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{CD^2 + AC^2}}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$



Câu 52: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho hình chóp S.ABC có $AB = 6, BC = 8, AC = 10$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $S_A = 4$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABC

A. $V = 40$

B. $V = 32$

C. $V = 192$

D. $V = 24$

Đáp án B

Ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{2} SA \cdot S_{ABC} = 32$

Câu 53 (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho (S) là một mặt cầu cố định có bán kính R. Một hình trụ (H) thay đổi nhưng luôn có hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối cầu (S) và V_2 là thể tích lớn nhất của khối trụ (H). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{6}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = 2$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}$

Đáp án C

Gọi r và h tương ứng là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ

$$\text{Ta có } r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\text{Thể tích khối trụ là } \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

$$\text{Xét hàm } f(h) = R^2 h - \frac{h^3}{4}, h \in (0, 2R)$$

$$\text{Ta có: } f'(h) = R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow f_{\max} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_2 = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}} \text{ khi } h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}}{\frac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

Câu 54 : (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho hình nón tròn xoay có đường sinh bằng 13 cm, bán kính đường tròn đáy bằng 5 cm. Thể tích của khối nón tròn xoay là

- A. $200\pi(\text{cm}^3)$ B. $150\pi(\text{cm}^3)$ C. $100\pi(\text{cm}^3)$ D. $300\pi(\text{cm}^3)$

Đáp án C

$$\text{Chiều cao là } \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm}). \text{ Thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi(\text{cm}^3)$$

Câu 55: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Thể tích V của một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

- A. $V = \frac{1}{3}B^2h$ B. $V = Bh$ C. $V = \frac{1}{3}Bh$ D. $V = \frac{1}{2}Bh$

Đáp án B

Câu 56: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho mặt cầu (S) có tâm O , bán kính r . Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính R . Kết luận nào sau đây sai?

- A. $R = \sqrt{r^2 + d^2(O, (\alpha))}$ B. Đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính bằng bán kính mặt cầu.
C. $d(O, (\alpha)) < r$ D. Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2$

Đáp án A

Câu 57: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy, độ dài đường sinh và bán kính đường tròn đáy lần lượt bằng h, l, r . Khi đó công thức tính diện tích toàn phần của khối trụ là

A. $S_p = 2\pi r(1+r)$

B. $S_p = 2\pi r(1+2r)$

C. $S_p = \pi r(1+r)$

D. $S_p = \pi r(2l+r)$

Đáp án A

Câu 58: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho hình nón tròn xoay. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh O của hình nón và cắt đường tròn đáy của hình nón tại hai điểm. Thiết diện được tạo thành là

- A. Một tứ giác. B. Một hình thang cân. C. Một ngũ giác D. Một tam giác cân

Đáp án D

Câu 59: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Khối đa diện nào sau đây có công thức thể tích là $V = \frac{1}{3} B h$? Biết hình đa diện đó có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h

- A. Khối chóp B. Khối hộp chữ nhật. C. Khối hộp D. Khối lăng trụ

Đáp án A

Câu 60: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD có diện tích $284\pi \text{cm}^2$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là

A. $\frac{3\sqrt{21}}{7} \text{cm}$

B. $\frac{2\sqrt{21}}{7} \text{cm}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{7} \text{cm}$

D. $\frac{6\sqrt{21}}{7} \text{cm}$

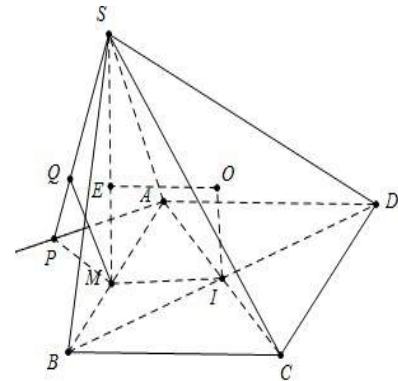
Đáp án D

Gọi I và E tương ứng là tâm hình vuông ABCD và tam giác SAB.

Đặt $AB = a$. Kẻ $d // SM, d' // MI, d \cap d' = O$. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

Ta có: $OE = \frac{BC}{2}; SM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SE^2 + OE^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Mà $R = SO = \sqrt{\frac{84\pi}{4\pi}} = \sqrt{21} \Rightarrow \frac{a\sqrt{21}}{6} = \sqrt{21} \Rightarrow a = 6$



Dựng $Ax // BD \Rightarrow d(SA; BD) = d(B; (SAX)) = d(B; (SAX)) = 2d(M; (SAX))$. Dựng $\begin{cases} MP \perp Ax \\ MQ \perp SP \end{cases} \Rightarrow d_M = MQ$

Mặt khác $MP = AM \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow MQ = \frac{SM \cdot MP}{\sqrt{SM^2 + MP^2}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$. Do đó $d = \frac{6\sqrt{21}}{7} \text{cm}$

Câu 61: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{6}$

B. $V = \frac{a^3}{8}$

C. $V = \frac{3a^3}{8}$

D. $V = \frac{9a^3}{8}$

Đáp án B

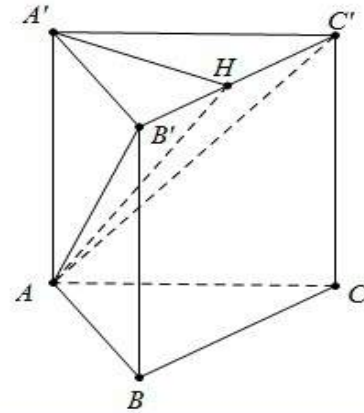
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Dựng $A'H \perp B'C'$, lại có $AA' \perp B'C'$ nên $(AA'H) \perp B'C'$

DO ĐÓ $\widehat{AHA'} = 30^\circ$, ta có $A'H = A'B \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow AA' = A'H \tan 30^\circ \Rightarrow AA' = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{8}$



Câu 62: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho

- A. $V = a^3$ B. $V = \frac{a^3}{2}$ C. $V = \frac{a^3}{6}$ D. $V = \frac{a^3}{3}$

Đáp án B

Ta có ABC là tam giác vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$

Thể tích V của khối lăng trụ đã cho $V = Sh = \frac{a^3}{2}$

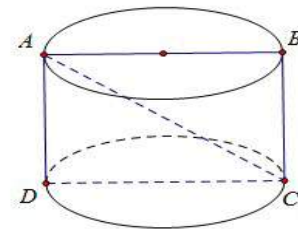
Câu 63: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a, AC = 5a$. Thể tích của khối trụ

- A. $8\pi a^3$ B. $12\pi a^3$ C. $4\pi a^3$ D. $16\pi a^3$

Đáp án B

Ta có $h = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a; r = \frac{AB}{2} = 2a$

Khi đó $V_{(T)} = \pi r^2 h = 12a^3 \pi$



Câu 64: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Cho hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy r , chiều cao h và đường sinh l . Kết luận nào sau đây sai?

- A. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ B. $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$ C. $h^2 = r^2 + l^2$ D. $S_{xq} = \pi r l$

Đáp án C

Ta có $l^2 = r^2 + h^2$

Câu 65: (Sở GD&ĐT Bạc Liêu.-2018) Mỗi cạnh của một hình đa diện là cạnh chung của đúng n mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $n=2$

B. $n=5$

C. $n=3$

D. $n=4$

Đáp án A

Mỗi cạnh của một hình đa diện là cạnh chung của đúng 2 mặt của hình đa diện đó

Câu 66 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Số mặt phẳng đối xứng của khối lăng trụ tam giác đều

A. 3

B. 4

C. 6

D. 9

Đáp án B

Số mặt phẳng đối xứng cần tìm là 4.

Câu 67 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Hỏi khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 4

B. 20

C. 6

D. 12

Đáp án C

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là hình lập phương \Rightarrow có 6 mặt.

Câu 68 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của bát diện có các đỉnh là tâm của các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó

A. $S=4a^2\sqrt{3}$

B. $S=8a^2$

C. $S=16a^2\sqrt{3}$

D. $S=8a^2\sqrt{3}$

Đáp án D

Cạnh của bát diện đều là $x=2a \rightarrow S=8 \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 8a^2\sqrt{3}$.

Câu 69 : (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) .

A. 75°

B. 60°

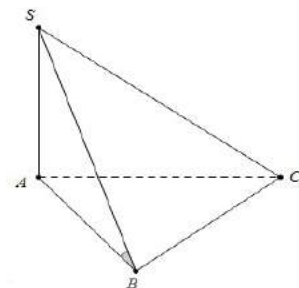
C. 45°

D. 30°

Đáp án B

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{SB;(ABC)} = \widehat{SBA}$

Lại có: $\tan \widehat{SBA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Câu 70 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA \perp (ABCD)$ và $SA=2a$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

B. $d = a$

C. $d = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$

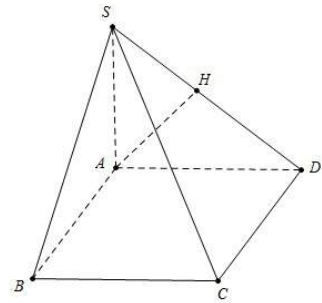
D. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Đáp án D

Do $AB // CD \Rightarrow d(B; (SCD)) = d(A; (SCD))$

Dựng $AH \perp SD$, có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH$

Do đó $AH \perp (SCD) \Rightarrow d_A = AH = \frac{SA \cdot SD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$



Câu 71 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 60^\circ$ và thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Tính chiều cao h của hình hộp đã cho.

- A. $h = 2a$ B. $h = a$ C. $h = 3a$ D. $h = 4a$

Đáp án A

Diện tích hình thoi ABCD là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối hộp là $V = h \cdot S_{ABCD} \Rightarrow h = \frac{V}{S_{ABCD}} = a^3 \sqrt{3} : \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 2a$.

Câu 72 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật lần lượt bằng $20\text{cm}^2, 28\text{cm}^2, 35\text{cm}^2$. Thể tích của hình hộp đó bằng

- A. 165cm^3 B. 190cm^3 C. 140cm^3 D. 160cm^3

Đáp án C

Gọi kích thước 3 cạnh của hình hộp chữ nhật là a, b, c cm. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} ab = 20 \\ bc = 28 \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ca = 19600 \Leftrightarrow abc = 140 \rightarrow V = abc = 140\text{cm}^3. \\ ca = 35 \end{cases}$$

Câu 73 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{1}{3}a^3$ B. $V = a^3$ C. $V = \frac{2}{3}a^3$ D. $V = \frac{3}{2}a^3$

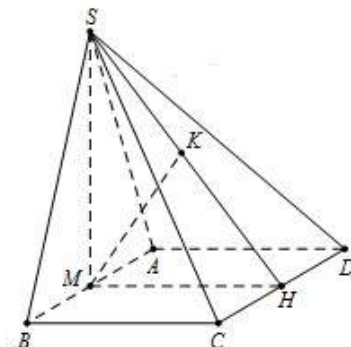
Đáp án D

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB, CD .

$\Rightarrow SM \perp (ABCD)$ và $CD \perp MH \Rightarrow CD \perp (SMH)$.

Đặt $AB = x \Rightarrow MH = AD = x, SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ket MK vuông góc với SH ($K \in SH$) $\Rightarrow MK \perp (SCD)$.



Tam giác SMH vuông tại M, có

$$\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{7}}{7}\right)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9a^2} = \frac{7}{3x^2} \Rightarrow x = a\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot (a\sqrt{3})^2 = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 74 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) .

- A. 45° B. 60° C. 15° D. 30°

Đáp án D

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Và D là điểm đối xứng với A qua O.

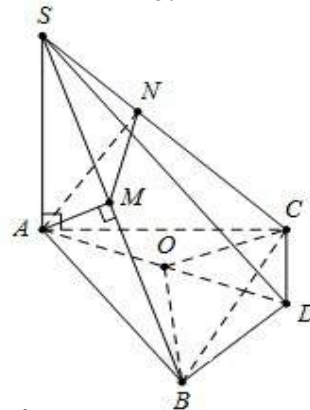
Ta có $BD \perp AB \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow SD \perp AM$.

Chứng minh tương tự, ta được $SD \perp AN \Rightarrow SD \perp (AMN)$.

Ta có $\begin{cases} SD \perp (AMN) \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AMN);(ABC)} = \widehat{(SA;SD)} = \widehat{ASD}$. Đặt $BC = x \Rightarrow \begin{cases} SA = 2x \\ AD = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \tan \widehat{ASD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\widehat{(AMN);(ABC)} = \widehat{ASD} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$.



Câu 75 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$ B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$ C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$ D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$

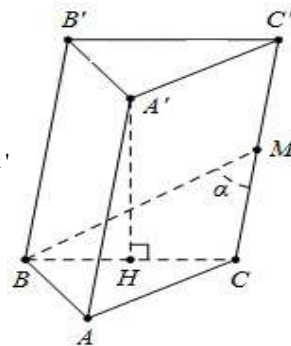
Đáp án C

Ta có $\widehat{(AA';BM)} = \widehat{(BM;CC')} = \widehat{BMC} = \alpha$.

Gọi H là trung điểm của BC. $\Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp (A'A'H) \Rightarrow BC \perp AA'$

$$\Rightarrow BC \perp CC'; AA' = A'H\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Mà $BC = a$ suy ra $\cos \widehat{BMC} = \frac{MC}{\sqrt{BC^2 + MC^2}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$. Vậy $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.



Câu 76 (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018): Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = 2a$, $AC = a$, $AA' = 4a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AA' sao cho $MA' = 3MA$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC và $C'M$.

A. $\frac{6a}{7}$

B. $\frac{8a}{7}$

C. $\frac{4a}{3}$

D. $\frac{4a}{7}$

Đáp án B

Trong ABC dựng D sao cho ABCD là hình bình hành.

Từ M dựng đường thẳng $MN // BC (N \in DD')$.

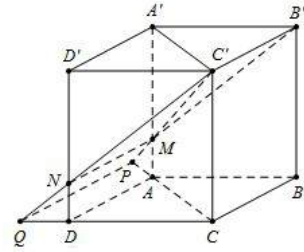
Gọi các giao điểm $P = C'M \cap AC; Q = C'N \cap CD$.

Ta có $BC // (C'PQ) \Rightarrow d(BC; C'M) = d(BC; (C'PQ))$

Lại có $\frac{MA}{CC'} = \frac{AP}{PC} = \frac{DQ}{QC} = \frac{1}{4} \Rightarrow CP = \frac{4a}{3}$ và $CQ = \frac{8a}{3}$. Xét khối chóp $C'.CQP$ có PC, CQ, CC' đôi một

vuông góc $\Rightarrow \frac{1}{d^2(C; (C'PQ))} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CQ^2} \Rightarrow d(C; (C'PQ)) = \frac{8a}{7}$.

Vậy $d(BC; (C'M)) = d(C; (C'PQ)) = \frac{8a}{7}$.



Câu 77: (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018) Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$

A. $2\pi a^2$

B. $2\pi a^2\sqrt{3}$

C. πa^2

D. $\pi a^2\sqrt{3}$

Đáp án B

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi \cdot a \cdot a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$

Câu 78 : (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018) Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$

Đáp án B

Thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow \begin{cases} R = a \\ h = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 79 : (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018) Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, AB = AC = a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$

B. $\frac{\pi a^3}{4}$

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

Đáp án B

Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Khi quay quanh AB ta sẽ thu được một hình nón bị thiếu đáy và thể tích phần đáy bị thiếu lại chính bằng thể tích của khối nón nhỏ khi quay $\triangle HAC$ quanh AH.

Vậy thể tích cần tính là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot HC^2 \cdot HB - \frac{1}{3}\pi \cdot HC^2 \cdot HA = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 80 : (Sở Giáo Dục &ĐT Nam Định 2018) Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần bằng π , gọi (T) là khối trụ có thể tích lớn nhất, chiều cao của (T) bằng

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

Đáp án B

Diện tích toàn phần của khối trụ là $S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \pi \Rightarrow h = \frac{1-2R^2}{2R}$. Thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{1-2R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}(R - 2R^3) \Rightarrow V_{\text{max}} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 81: (Sở GD Bắc Ninh 2018) Tính thể tích của khối lập phương có cạnh bằng 2

A. 4

B. $\frac{8}{3}$

C. 6

D. 8

Đáp án D

Câu 82 (Sở GD Bắc Ninh 2018) : Hình chóp đều S.ABCD tất cả các cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

A. $4\pi a^2$

B. πa^2

C. $\sqrt{2}\pi a^2$

D. $2\pi a^2$

Đáp án D

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD ta có: $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng CT tính nhanh ta có: $R = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2.$

Câu 83 (Sở GD Bắc Ninh 2018) : Diện tích của mặt cầu có bán kính R bằng:

A. $2\pi R^2$

B. πR^2

C. $4\pi R^2$

D. $2\pi R$

Đáp án C

Câu 84 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (p) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (q) thì mặt phẳng (p) song song hoặc trùng với mặt phẳng (q).

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (p) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (q) thì đường a thẳng song song với đường thẳng b.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (p) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (p) khi đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b.

D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

Đáp án D

Câu 85 (Sở GD Bắc Ninh 2018) Cho hình chóp $S_{.ABCD}$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S_{.ABCD}$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $a^3\sqrt{3}$

Đáp án B

$$V_{S_{.ABCD}} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 86 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CM = 3C'M$. Tính thể tích khối chóp $M_{.ABC}$.

- A. $\frac{V}{4}$ B. $\frac{3V}{4}$ C. $\frac{V}{12}$ D. $\frac{V}{6}$

Đáp án A

Do $CM = 3C'M \Rightarrow d(M; (ABC)) = \frac{3}{4}d(C'; (ABC))$. Ta có: $V_{M_{.ABC}} = \frac{3}{4}V_{C'_{.ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{V}{3} = \frac{V}{4}$.

Câu 87(Sở GD Bắc Ninh 2018): Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 B. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì trùng nhau.
 C. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chéo nhau.
 D. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Đáp án D

Câu 28 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Tính thể tích khối nón có bán kính đáy 3cm và độ dài đường sinh 5cm là:

- A. $12\pi(\text{cm}^3)$ B. $15\pi(\text{cm}^3)$ C. $36\pi(\text{cm}^3)$ D. $45\pi(\text{cm}^3)$

Đáp án A

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = 12\pi(\text{cm}^3)$

Câu 88 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Cho hình chóp $S_{.ABCD}$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông, cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S_{.ABCD}$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A. $a^2\sqrt{2}$ B. $\frac{4a^2}{3}$ C. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$

Đáp án D

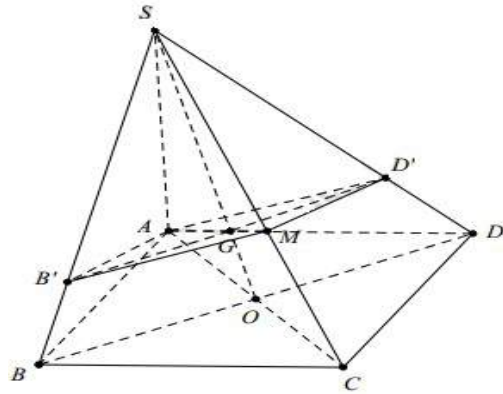
Gọi $O = AC \cap BD$; $G = SO \cap AM$ khi đó G là trọng tâm tam giác SAC , qua G dựng đường thẳng song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D' .

Khi đó $B'D' // BC \perp (SAC) \Rightarrow AM \perp B'D'$

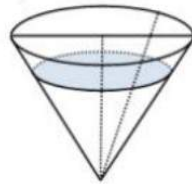
Ta có: $AC = 2a \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$

$$BD = \frac{2}{3}B'D' = \frac{4a}{3}$$

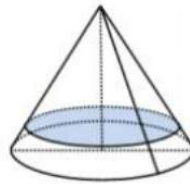
$$\text{Suy ra } S_{AB'MD'} = \frac{1}{2}AM \cdot B'D' = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$



Câu 89 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10 cm (Hình H1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (Hình H2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



Hình H1



Hình H2

A. $\sqrt[3]{7}$ cm

B. 1 cm

C. $(20 - 10\sqrt[3]{7})$ cm

D. $(20\sqrt[3]{7} - 10)$ cm

Đáp án C

Gọi V là thể tích của phễu. Khi đó thể tích nước trong bình là $V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{8}$ và thể tích phần

không chứa nước là $V_2 = \frac{7V}{8}$. Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h; \frac{V_2}{V} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3$ (với h_2 là chiều cao cần tính)

Suy ra $\frac{7}{8} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 \Rightarrow h_2 = h\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \Rightarrow h_{ct} = 20\left(1 - \sqrt[3]{\frac{7}{8}}\right) = (20 - 10\sqrt[3]{7})$ cm. (với h_{ct} là chiều cao cần tìm).

Câu 90 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Mặt bên $(SAB), (SCA)$ lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = a\sqrt{2}$

B. $R = a$

C. $R = \frac{3a}{2}$

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

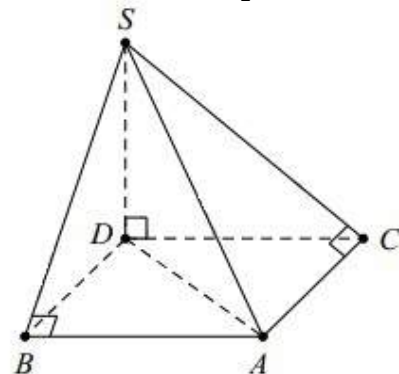
Đáp án C

Kẻ hình chữ nhật ABCD như hình vẽ bên $SD \perp (ABCD)$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = a^2$

Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{3} \cdot SD = \frac{2}{3}a^3 \Rightarrow SD = 2a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là



$$R = \sqrt{R_{ABCD}^2 + \frac{SD^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{(2a)^2}{4}} = \frac{3a}{2}. \quad \text{Vậy bán kính mặt cầu cần tính là } R = \frac{3a}{2}.$$

Câu 91 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 6 cm, chiều dài lăn là 25 cm (hình vẽ bên). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên bức tường phẳng một diện tích là



- A. $1500\pi \text{ cm}^2$ B. $150\pi \text{ cm}^2$
C. $3000\pi \text{ cm}^2$ D. $300\pi \text{ cm}^2$

Đáp án A

Chu vi đường tròn đáy của lăn là $C = \pi d = 6\pi \text{ cm}$.

Khi lăn 1 vòng, trục lăn tạo nên hình chữ nhật có kích thước là $6\pi : 25 \Rightarrow S_0 = 150\pi \text{ cm}^2$.

Do đó, khi lăn trọn 10 vòng, diện tích cần tính là $S = 10S_0 = 1500\pi \text{ cm}^2$.

Câu 92 : (Sở GD Bắc Ninh 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho mặt phẳng (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$?

- A. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$ B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$ C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

Đáp án A

Gọi O là tâm của tam giác $BCD \Rightarrow OA \perp (BCD)$

Mà $(AMN) \perp (BCD)$ suy ra MN luôn đi qua điểm O .

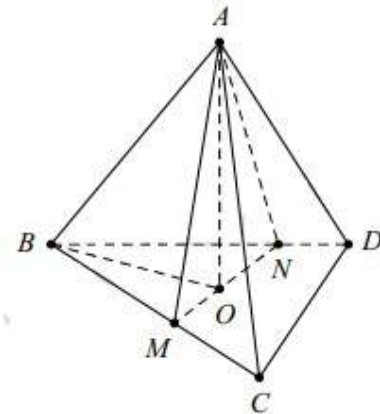
$$\text{Đặt } BM = x, BN = y \Rightarrow S_{ABMN} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BN \cdot \sin \widehat{MBN} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy.$$

$$\text{Tam giác } ABO \text{ vuông tại } O, \text{ có } OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Suy ra thể tích tứ diện } ABMN \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot OA \cdot S_{ABMN} = \frac{\sqrt{2}}{12} xy.$$

Mà MN đi qua trọng tâm của $\triangle BCD \Rightarrow 3xy = x + y$.

$$\text{Do đó } xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{9(xy)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq xy \geq \frac{4}{9} \rightarrow V_1 = \frac{\sqrt{2}}{24}; V_2 = \frac{\sqrt{2}}{27}. \text{ Vậy } V_1 + V_2 = \frac{17\sqrt{2}}{216}.$$



Câu 92 (Sở GD Bắc Ninh 2018): Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Đáp án C

Gọi M là trung điểm của BC.

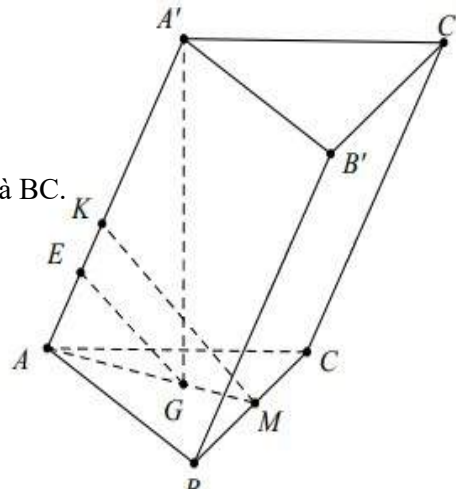
Khi đó $AM \perp BC; BC \perp A'G \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Dựng $MK \perp AA' \Rightarrow MK$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC .

Dựng $GE // MK$ ta có: $GE = \frac{2}{3}MK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Mặt khác $\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GA^2}$ trong đó $GA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $A'G = \frac{a}{3} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Câu 93: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình chóp S.ABC có A' và B' lần lượt là trung điểm của SA và SB. Biết thể tích của khối chóp S.ABC bằng 24. Tính thể tích V của khối chóp S.A'B'C'

A. $V = 12$

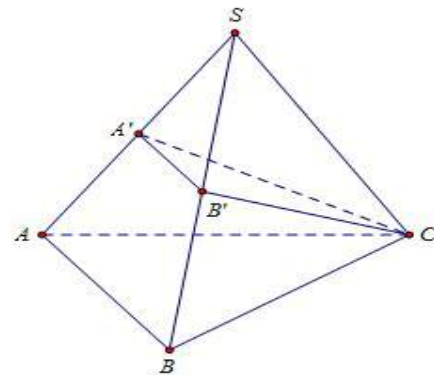
B. $V = 8$

C. $V = 6$

D. $V = 3$

Đáp án C

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$



Câu 94: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Tập hợp tâm các mặt cầu luôn đi qua hai điểm cố định A và B cho trước là

A. một đường thẳng

B. một mặt phẳng

C. một điểm

D. một đoạn thẳng.

Đáp án

Tập hợp tâm các mặt cầu luôn đi qua hai điểm cố định A và B cho trước là một mặt phẳng trung trực của AB

Câu 95: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Đáp án A

Có 3 vị trí: chéo nhau, cắt nhau, song song

Câu 96 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $S_A=a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp S.ABC

A. $V = \frac{a^3}{2}$

B. $V = 2a^3$

C. $V = \frac{a^3}{6}$

D. $V = \frac{2a^3}{3}$

Đáp án D

Thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}S_A.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}(2a)^2 = \frac{2a^3}{3}$

Câu 97 (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Nếu điểm M trong không gian luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông thì M thuộc

A. một mặt cầu cố định.

B. một khối cầu cố định.

C. một đường tròn cố định.

D. một hình tròn cố định

Đáp án A

M thuộc mặt cầu đường kính AB

Câu 98 (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

Đáp án A

Câu 99: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho tứ diện ABCD. Điểm M thuộc đoạn AC M (khác A M, khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện ABCD là hình gì?

A. Hình tam giác.

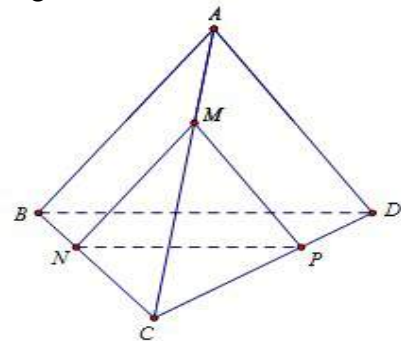
B. Hình bình hành.

C. Hình vuông

D. Hình chữ nhật.

Đáp án A

Thiết diện là ΔMNP , trong đó $MN // AB, MP // AD$



Câu 100: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Một hình trụ có bán kính đáy bằng r và khoảng cách giữa hai đáy bằng $r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là tâm mặt đáy này và đáy trùng với mặt đáy kia của hình trụ. Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

Đáp án A

Tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón là: $\frac{2\pi r\sqrt{3}}{\pi\sqrt{r^2+(r\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}$

Câu 101 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính theo a thể tích V của khối trụ đó

- A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$ B. $V = \frac{\pi a^3}{4}$ C. $V = \pi a^3$ D. $V = 2\pi a^3$

Đáp án A

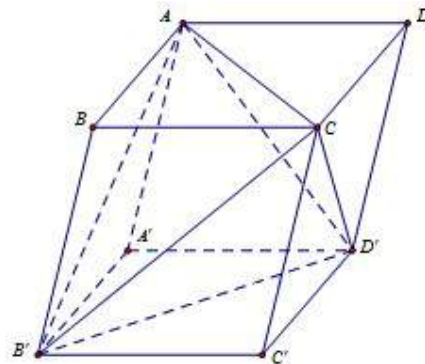
Bán kính đáy của khối trụ là: $\frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối trụ là $V = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{2}$

Câu 102: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tỉ số thể tích của khối hộp đó và khối tứ diện $ACB'D'$

- A. $\frac{7}{3}$ B. 3 C. $\frac{8}{3}$ D. 2

Đáp án B

$$\begin{aligned} V_{ACB'D'} &= V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{D'ACD} \\ &\quad - V_{CB'C'D'} - V_{AA'B'D'} - V_{B'ABC} \\ &= V_{ABCD.A'B'C'D'} - \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} \end{aligned}$$



Câu 103 (Sở Giáo Dục-ĐT Bình Phước 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD), SA = x$. Xác định x để 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau một góc 60°

- A. $x = 2a$ B. $x = a$ C. $x = \frac{3a}{2}$ D. $x = \frac{a}{2}$

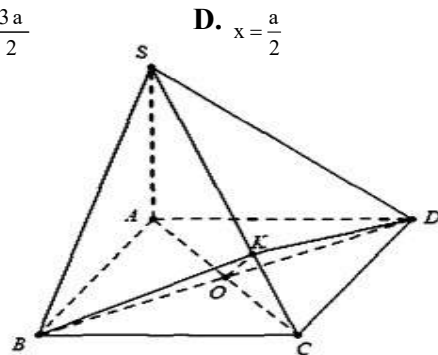
Đáp án B

$$\text{Do } \begin{cases} AC \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$$

Dựng $OK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BKD)$

Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) là \widehat{BKD} hoặc $180^\circ - \widehat{BKD}$

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B có đường cao BK suy ra $BK = \frac{SB \cdot BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} < a$



TH1: $\widehat{BKD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BKO} = 30^\circ \Rightarrow BK = \frac{OB}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{2}$ (loại)

TH2: $\widehat{BKD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BKO} = 60^\circ \Rightarrow BK = \frac{OB}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a$

Câu 104 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Đáp án D

Thể tích V của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$

Câu 105 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau
- B. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- C. Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau
- D. Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau

Đáp án A

Câu 106 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AC = AD = 4, AB = 3, BC = 5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD)

A. $d = \frac{12}{\sqrt{34}}$

B. $d = \frac{60}{\sqrt{769}}$

C. $d = \frac{\sqrt{769}}{60}$

D. $d = \frac{\sqrt{34}}{12}$

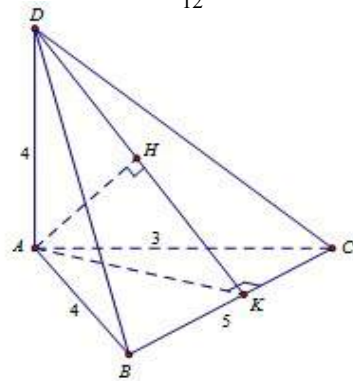
Đáp án A

Vì $BC^2 = BA^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A

Gọi K là hình chiếu của A lên Bc , H là hình chiếu của A lên DK .

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$= \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{17}{72} \Rightarrow d(A; (BCD)) = AH = \sqrt{\frac{17}{72}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$



Câu 107: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Một hình hộp chữ nhật có kích thước $a(\text{cm}) \times b(\text{cm}) \times c(\text{cm})$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $1 \leq a \leq b \leq c$. Gọi $v(\text{cm}^3)$ và $s(\text{cm}^2)$ lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp. Biết $v = s$, tìm số các bộ ba số (a, b, c)

A. 4

B. 10

C. 12

D. 21

Đáp án B

$$V = abc, S = 2(ab + bc + ca) \Rightarrow abc = 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

Do $1 \leq a \leq b \leq c \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{3}{a} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6 \geq a$ Tương tự $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{3}{c} \Leftrightarrow c > 6$

Với $a = 6 \Rightarrow a = b = c = 6$

Với $a = 5 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{2}{b} \geq \frac{3}{10} \Rightarrow b \leq 6,6 \Rightarrow \begin{cases} a=b=5 \\ c=10 \end{cases}$

Với $a = 4 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{b} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow b \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} b=8; c=8 \\ b=6; c=12 \\ b=5; c=20 \end{cases}$ suy ra có 10 bộ số thỏa mãn

Câu 108 (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên đều có độ dài bằng 1. Tìm diện tích lớn nhất S_{\max} của hình thang.

A. $S_{\max} = \frac{8\sqrt{2}}{9}$

B. $S_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

C. $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Đáp án D

Đặt $DH = x$.

Ta có $DC = 2x + 1 \Rightarrow AH = \sqrt{1 - x^2}$

$$S_{ABCD} = \frac{1 + 2x + 1}{2} \sqrt{1 - x^2} = (1 + x) \sqrt{1 - x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+x)(1+x)(1+x)(3-3x)}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1+x+1+x+1+x+3-3x}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 1 + x = 3 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Câu 109: (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên (SAB), (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp S.ABC

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

Đáp án D

Gọi H là hình chiếu của S trên AC $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

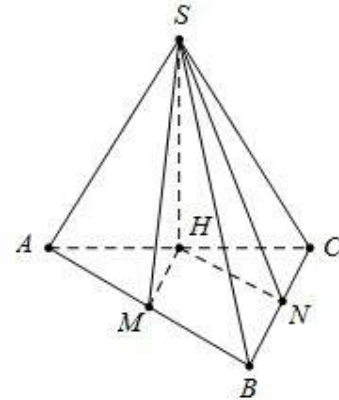
Kẻ $HM \perp AB (M \in AB), HN \perp AC (N \in AC)$

Suy ra $(\widehat{SAB}), (\widehat{ABC}) = (\widehat{SBC}), (\widehat{ABC}) = \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta SHM = \Delta SHN \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H$ là trung điểm AC

Tam giác SHM vuông tại H, có $\tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}$. Thể tích cần tính là $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$



Câu 110 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Một hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 3. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

- A. $S=56$ B. $S=28$ C. $S=7\sqrt{34}$ D. $S=14\sqrt{34}$

Đáp án A

Khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng cắt là 3

Suy ra chiều rộng của hình chữ nhật là $a = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$

Vậy diện tích S của thiết diện là $S = 8.7 = 56$

Câu 111 : (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ABCD

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

Đáp án C

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \quad \text{và} \quad \frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Mà } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2} V_{SABCD} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'} = \frac{V_{SABCD}}{8} \Leftrightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$$

Câu 112 (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B₁, C₁ lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính theo a bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B₁, C₁

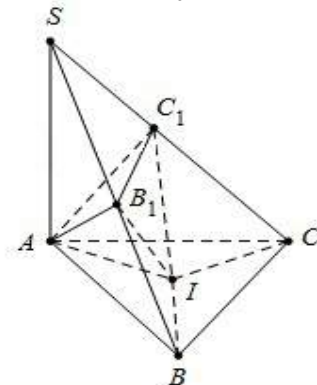
- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Đáp án D

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA = IB = IC$

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là tâm I

Vậy bán kính mặt cầu cần tính là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



Câu 113 (Sở Giáo Dục Ninh Bình-2018) Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Đáp án C

Chuẩn hóa bán kính của viên bi là 1 \Rightarrow chiều cao của cốc là $h=2$

- Thể tích của viên bi là $V_1 = \frac{4\pi}{3}$

Gọi R, r lần lượt là bán kính của miệng cốc và đáy cốc

- Thể tích của cốc (khôì nón cụt) là $V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{2\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

- Vì lượng nước tràn ra bằng nửa lượng nước đổ vào cốc $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = 4(1)$

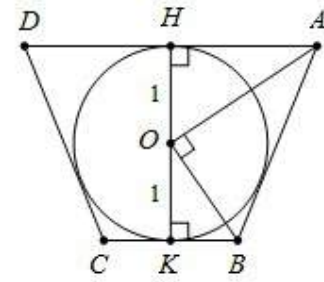
- Xét mặt cắt của cốc khi thả viên bi vào cốc (hình vẽ bên)

Dễ thấy ABCD là hình thang cân $\Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2(2)$

Mà $\begin{cases} OA = R^2 + 1 \text{ và } AB^2 = (AH - BK)^2 + HK^2 = (R - r)^2 + 4(3) \\ OB^2 = r^2 + 1 \end{cases}$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow R^2 + r^2 + 2 = (R - r)^2 + 4 \Leftrightarrow Rr = 1(4)$

Từ (1) và (4) $\Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = 4Rr \Leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy tỉ số cần tìm là $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

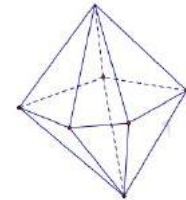


Chú thích: $AH = R$ và $BK = r$

Câu 114 : (Liên trường Sở Nghệ An 2018)

Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

- A. 10 B. 15 C. 8 D. 11



Đáp án A

Câu 115 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

- A. Hình chóp đều là tứ diện đều.
- B. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
- C. Hình chóp có đáy là một đa giác đều là hình chóp đều.
- D. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

Câu 116 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

- A. $85\pi(\text{cm}^2)$ B. $35\pi(\text{cm}^2)$ C. $\frac{35}{3}\pi(\text{cm}^2)$ D. $70\pi(\text{cm}^2)$

Đáp án D

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi(\text{cm}^2)$.

Diện tích đáy tăng lên 9 lần và độ dài đường cao xuống hai lần. Khi đó thể tích khối chóp mới là $\frac{9}{2}V$

Câu 117 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho điểm A nằm trên mặt cầu (S). Qua A kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với mặt cầu (S) ?

- A. 0 B. Vô số C. 1 D. 2

Đáp án B

Câu 118 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có thể tích là V. Nếu tăng độ dài cạnh đáy lên ba lần và giảm độ dài đường cao xuống hai lần thì ta được khối chóp mới có thể tích là:

- A. $\frac{9}{2}V$ B. $9V$ C. $3V$ D. $\frac{3}{2}V$

Đáp án A

Câu 119 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2cm, góc ở đỉnh bằng 60° . Thể tích của khối nón là:

- A. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$ B. $8\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$ C. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\text{cm}^3$ D. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$

Đáp án C

Độ dài đường sinh là: $2.2 = 4(\text{cm})$. Độ dài đường cao là: $4^2 - 2^2 = 2\sqrt{3}(\text{cm})$

Thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}(\text{cm}^3)$

Câu 120 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // (\alpha)$ và $b // (\alpha)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. a và b chéo nhau. B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau D. a và b không có điểm chung.

Đáp án B

Câu 121 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp S.ABC bằng:

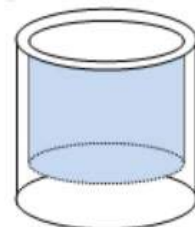
- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Đáp án D

Ta có: $SA = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$; $BC = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp S.ABC là: $V = \frac{1}{3}S.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 122 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Người ta cần sản xuất một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ không có nắp với đáy cốc và thành cốc làm bằng thủy tinh đặc, phần đáy cốc dày đều $1,5\text{cm}$ và thành xung quanh cốc dày đều $0,2\text{cm}$ (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của chiếc cốc là



15cm và khi ta đổ 180ml nước vào cốc thì đầy cốc. Nếu giá thủy tinh thành phẩm được tính là 500đ/1cm³ thì giá tiền thủy tinh để sản xuất chiếc cốc đó gần nhất với số nào sau đây?

- A. 25 nghìn đồng B. 31 nghìn đồng C. 40 nghìn đồng D. 20 nghìn đồng

Đáp án B

Gọi x và h lần lượt là bán kính và chiều cao của cốc, ta có ($x > 0,2$) và

$$(x-0,2)^2(h-1,5)\pi=180 \Leftrightarrow (x-0,2)^2 = \frac{180}{(h-1,5)\pi} \text{ với } h = 15 \text{ cm} \quad \text{Suy ra } x = 0,2 + \sqrt{\frac{40}{3\pi}}$$

Thể tích thủy tinh cần là: $V = \pi x^2 h - 180 = 60,717 \text{ cm}^3 \Rightarrow T \approx 30.000$ đồng.

Câu 123 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Các cạnh AA', A'B, A'D cùng tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho

- A. $V = a^3\sqrt{3}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{3a^3}{2}$

Đáp án C

Ta có: $\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra tam giác ABD là tam giác đều cạnh a. Khi đó $A'.ABD$ là chóp đều cạnh đáy bằng a. Như vậy hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABD.

Ta có: $A'H = HA \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a \Rightarrow V_{A'.ABD} = \frac{1}{3} A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3V_{A'.ABCD} = 6V_{A'.ABD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 124 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC) bằng

- A. $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$ B. $\frac{\sqrt{30}a}{10}$ C. $\frac{\sqrt{30}a}{8}$ D. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$

Đáp án A

Do ΔSAB đều nên $SI \perp AB$. Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Dựng $IE \perp CM; IF \perp SE \Rightarrow d(I;(SCM)) = IF$.

Ta có: $CM = \frac{a\sqrt{5}}{2}; S_{ICM} = S_{ABCD} - S_{IBC} = S_{MCD} - S_{AIM} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$ (Dethithpt.com)

Do đó $IE = \frac{2S_{ICM}}{CM} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}; SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Lại có $d = IF = \frac{SI \cdot IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 125 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho tứ diện đều ABCD cạnh 2a. Tính thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện ABCD.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$

Đáp án C

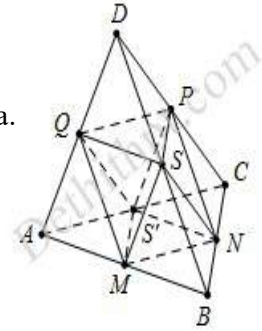
Khối bát diện đều có cạnh là a.

Chia bát diện đều thành hai hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

Thể tích khối chóp tứ giác đều S.MNPQ là

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot d(S; (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

Vậy thể tích cần tính là $V = 2 \times V_{S.MNPQ} = 2 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$



Câu 126 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp S. ABCD.

- A. $V = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}$ B. $V = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$ C. $V = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{24}$ D. $V = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{6}$

Đáp án A

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SBC); (ABCD)} = \widehat{SBA}$

Tam giác SAB vuông tại A, có $\tan \widehat{SAB} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot a\sqrt{3} = 3a$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là $R_{ABCD} = \frac{AC}{2} = a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD là

$$R = \sqrt{R_{ABCD}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{(3a)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}$$

Câu 127 (Liên trường Sở Nghệ An 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $S_M M = 2S_C$, mặt phẳng (α) đi qua A, M và song song với đường thẳng BD cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm H, K. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.AHMK}}{V_{S.ABCD}}$.

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{8}{35}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{6}{35}$

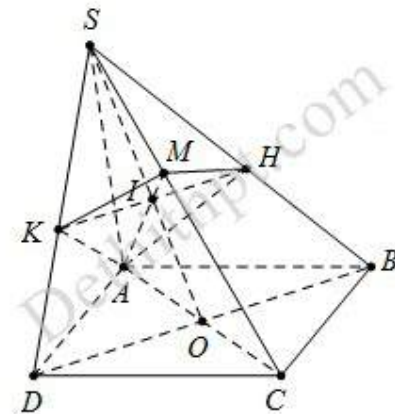
Đáp án D

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, nối $SO \cap AM = I$.

Qua I kẻ đường thẳng d, song song với BD cắt SB, SD lần

lượt tại H, K suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{SI}{SO}$.

Điểm $M \in SC$ thỏa mãn $S_M M = 2S_C \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{2}{5}$



Xét tam giác SAC, có $\frac{MS}{MC} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{SI} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{3}{7}$

Khi đó $\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SM}{SC}$; $\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SM}{SC}$.

Suy ra $\frac{V_{S.AHMK}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SH}{SB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \Rightarrow V_{S.AHMK} = \frac{6}{35} V_{S.ABCD}$

Câu 128 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h . Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

- A. 18 lần B. 12 lần C. 6 lần D. 36 lần

Đáp án A

Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h$

Cách giải: Từ công thức $V = \pi r^2 h$ ta có: Thể tích khối trụ tăng lên $2 \cdot 3^2 = 18$ lần.

Câu 129 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Hình tứ diện có bao nhiêu cạnh?

- A. 5 cạnh B. 3 cạnh C. 4 cạnh D. 6 cạnh

Đáp án D

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa hình tứ diện.

Cách giải: Hình tứ diện có 6 cạnh.

Câu 130 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của BC, SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD), $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Đáp án C

Phương pháp: - Gắn hệ trục tọa độ Oxyz, tìm tọa độ các điểm E, M.

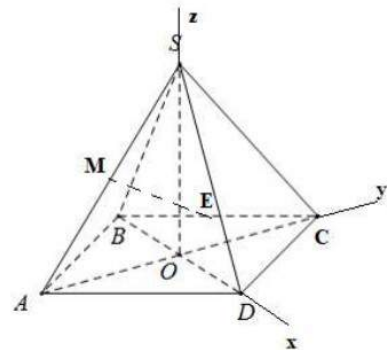
- Sử dụng công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$

Cách giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

Với $O(0;0;0), D(1;0;0), C(0;1;0) \Rightarrow CD = CS = \sqrt{2} \Rightarrow SO = 1 \Rightarrow S(0;0;1)$

Ta có: $B(-1;0;0), A(0;-1;0) \Rightarrow E\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), M\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{EM} = \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$



Chọn $\vec{u} = (1; -2; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của EM và $\vec{n} = (0; 1; 0)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD): $y = 0$.

$$\text{Khi đó } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1+4+1} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

Câu 131 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho tứ diện đều ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

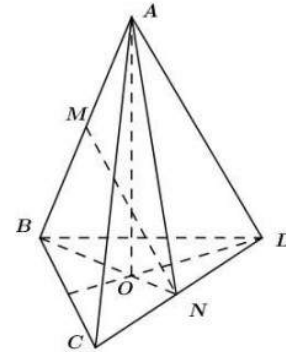
- A. $AB \perp CD$ B. $MN \perp AB$ C. $MN \perp BD$ D. $MN \perp CD$

Đáp án C

Phương pháp:

+) Tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

+) Hình chiếu của đỉnh A trên mặt phẳng (BCD) là trọng tâm O của tam giác BCD.



Cách giải:

Ta có: $AO \perp (BCD)$ với O là trọng tâm tam giác BCD $\Rightarrow AO \perp CD$

N là trung điểm của $CD \Rightarrow BN \perp CD$.

$$\Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp MN \end{cases} \Rightarrow \text{đáp án A và D đúng.}$$

ABCD là tứ diện đều nên có các mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

$\Rightarrow BN = AN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N có đường trung tuyến MN $\Rightarrow MN \perp AB$

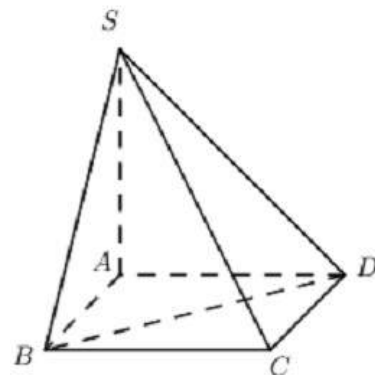
Câu 132 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $CD \perp (SAD)$ B. $AC \perp (SBD)$ C. $BD \perp (SAC)$ D. $BC \perp (SAB)$

Đáp án B

Phương pháp:

Suy luận từng đáp án, sử dụng phương pháp chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng: Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng đó.



Cách giải:

$$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow D \text{ đúng.}$$

Câu 133 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overline{MA} = 3\overline{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (P) không cắt hình chóp.
- B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
- C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
- D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Đáp án D

Phương pháp: Qua M dựng các đường thẳng song song với BD và SC.

Cách giải:

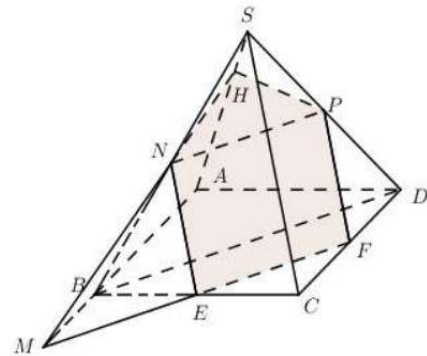
Lấy điểm M thỏa mãn $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ như hình vẽ.

Trong (ABCD) qua M kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC tại E và cắt CD tại F.

Trong (SCD) qua F kẻ $FP \parallel SC (P \in SD)$

Trong (SBD) qua M kẻ $MN \parallel BD (N \in SB)$

Trong (SAB) kéo dài MN cắt SA tại H.



Vậy thiết diện của chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là ngũ giác EFPHN.

Câu 134 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp S.ABC bằng:

- A. $\frac{a^3}{8}$
- B. $\frac{3a^3}{4}$
- C. $\frac{a^3}{2}$
- D. $\frac{a^3}{4}$

Đáp án D

Phương pháp: +) Xác định góc giữa SC và mặt đáy. +) Tính SA. +) Tính thể tích

Cách giải:

Dễ thấy AC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABC) nên $(SC; (ABC)) = (SC; AC) = \widehat{SCA} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông SAC có: $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$

Câu 135 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018) Cho khối trụ có hai đáy là hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R), OO' = 4R$. Trên đường tròn tâm O lấy (O) lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt OO' và tạo với đáy một góc bằng 60° . (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng:

A. $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$ B. $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ C. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$ D. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

Đáp án C

Phương pháp:

+) Chứng minh mặt phẳng (P) không cắt đáy $(O'; R)$

+) Tìm phần hình chiếu của mặt phẳng (P) trên mặt đáy. Tính S_{hc}

+) Sử dụng công thức $S_{hc} = S \cdot \cos 60$

Cách giải:

Gọi M là trung điểm của AB ta có: $OM = \sqrt{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}$

Giả sử mặt phẳng (P) cắt trục OO' tại I. Ta có: $IA = IB$ nên $\triangle IAB$ cân tại I, do đó $MI \perp AB$.

Do đó góc giữa (P) và mặt đáy bằng $\widehat{IMO} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông IMO có: $OI = OM \cdot \tan 60 = \frac{R\sqrt{3}}{2} < \frac{OO'}{2} = R$

$\Rightarrow I$ nằm giữa O và O' . Do đó (P) không cắt đáy còn lại.

Vậy hình chiếu của (P) trên $(O; R')$ là phần diện tích của hình quạt cung lớn AB và $\triangle OAB$ (phần gạch chéo).

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác OAB có:

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{R^2 + R^2 - 3R^2}{2R^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Gọi S_{OAB} là diện tích hình quạt $\Rightarrow S_{OAB} = \frac{4\pi}{3} \cdot R^2 = \frac{4\pi}{3} R^2$

$$\Rightarrow S_{hc} = S_{OAB} + S_{\triangle OAB} = \frac{2}{3} \pi R^2 + R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

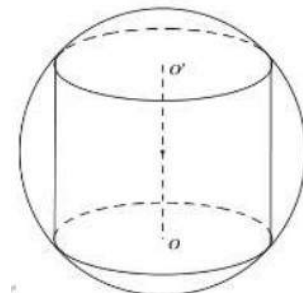
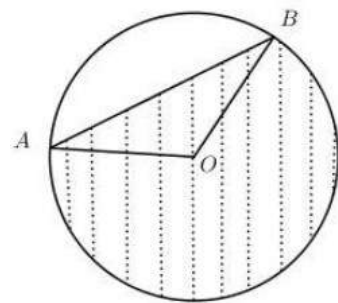
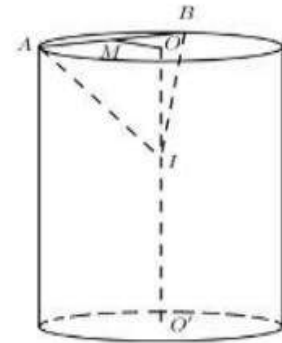
Vậy diện tích phần thiết diện cần tìm là:

$$S_{hc} = S \cdot \cos 60 \Rightarrow S = \frac{S_{hc}}{\cos 60} = 2 \left(\frac{2}{3} \pi R^2 + R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{4}{3} \pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \right) = \left(\frac{4}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$$

Câu 136 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018): Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.

A. $h = R\sqrt{2}$ B. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ D. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Đáp án D



Lời giải:

Ta có $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)h$

Xét hàm số $f(h) = (4R^2 - h^2)h = 4R^2h - h^3$ trên $(0; 2R)$ Ta cần tìm GTLN của hàm số này

Có $f'(h) = 4R^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow h = h_0 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ (vì $h > 0$)

Lập bảng biến thiên ta thấy h_0 là điểm cực đại của hàm số $f(h)$ và $f(h_0)$ là GTLN của $f(h)$ trên $(0; 2R)$

Câu 137 (Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Hà Nội 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C, N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỉ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Đáp án A

Phương pháp:

+) Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau và có các cạnh bên vuông góc với đáy.

+) Chọn hệ trục tọa độ phù hợp để làm bài toán.

+) MN là đoạn vuông góc chung của $A'C$ và BC' $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp AC \\ MN \perp BC' \end{cases}$.

Cách giải:

Xét hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng 2.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ có gốc tọa độ là trung điểm của BC .

Ta có các điểm: $O(0; 0; 0); A \in Ox \Rightarrow A(\sqrt{3}; 0; 0)$

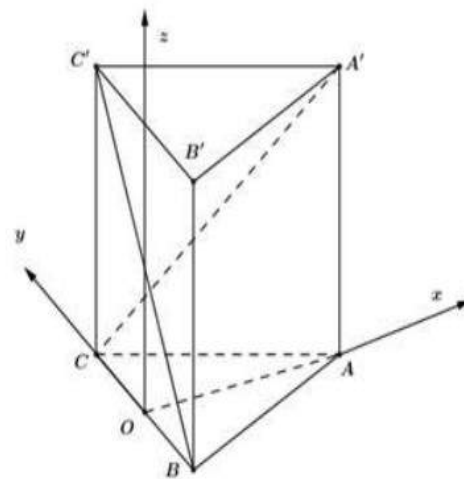
$B; C \in Oy \Rightarrow B(0; -1; 0), C(0; 1; 0)$

$A'(\sqrt{3}; 0; 2); C'(0; 1; 2)$

$\Rightarrow \overline{A'C} = (-\sqrt{3}; 1; -2); \overline{BC'} = (0; 2; 2) = (0; 1; 1)$

Phương trình đường thẳng $A'C$ là $\begin{cases} x = -\sqrt{3}t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = -2t_1 \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng BC' là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$.



Ta có điểm $M \in A'C \Rightarrow M(-\sqrt{3}t_1; 1+t_1; -2t_1)$; $N \in BC' \Rightarrow N(0; -1+t_2; t_2) \Rightarrow \overline{MN}(\sqrt{3}t_1; t_2 - t_1 - 2; t_2 + 2t_1)$

MN là đoạn vuông góc chung của $A'C$ và BC' $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp A'C \\ MN \perp BC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} \cdot \overline{AC'} = 0 \\ \overline{MN} \cdot \overline{BC'} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}t_1 \cdot \sqrt{3} + t_2 - t_1 - 2 - 2(t_2 + 2t_1) = 0 \\ t_2 - t_1 - 2 + t_2 + 2t_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8t_1 - t_2 = 2 \\ t_1 + 2t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{2}{5} \\ t_2 = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(0; \frac{1}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overline{NB} = \left(0; \frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right) \\ \overline{NC'} = \left(0; \frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{|\overline{NB}|}{|\overline{NC'}|} = \frac{\sqrt{\frac{36}{25} \cdot 2}}{\sqrt{\frac{16}{25} \cdot 2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Câu 138 (Sở Giáo Dục-ĐT Bình Phước 2018): Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD, góc giữa SM và mặt phẳng đáy là 60° . Độ dài cạnh SA là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$ C. $a\sqrt{3}$ D. $a\sqrt{15}$

Đáp án B

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Câu 139. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết thể tích khối chóp S.ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Độ dài cạnh bên SA bằng bao nhiêu?

- A. $SA = a$. B. $SA = \frac{a}{2}$. C. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SA = a\sqrt{3}$.

Đáp án A.

$$\rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} \rightarrow \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}SH \cdot a^2 \rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.$$

Câu 140. Cho hình nón có chiều cao bằng 6 cm, góc giữa trục và đường sinh bằng 30° . Thể tích của khối nón là

- A. $12\pi cm^3$ B. $24\pi cm^3$ C. $72\pi cm^3$ D. $216\pi cm^3$

Đáp án B.

$$\rightarrow R = h \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \rightarrow V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 24\pi.$$

Câu 141. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABC.

A. $V = \frac{a^3}{6}$

B. $V = \frac{a^3}{\sqrt{6}}$

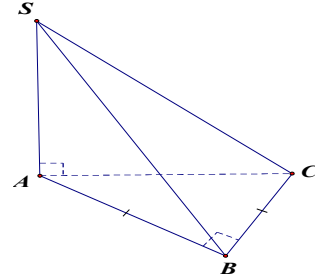
C. $V = 6a^3$

D. $V = \sqrt{6}a^3$

Đáp án là A

$$dt_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} a^2$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot dt_{ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$$



Câu 142. Cho một khối lăng trụ có thể tích là $\sqrt{3} \cdot a^3$, đáy là tam giác đều cạnh a. Tính chiều cao h của khối lăng trụ.

A. $h = 4a$

B. $h = 3a$

C. $h = 2a$

D. $12a$

Đáp án là A

Khối lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a thì diện tích đáy là $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Và có chiều cao $h = \frac{V}{S} = \sqrt{3}a^3 : \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4a$

Câu 143. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của khối nón có đỉnh là tâm hình vuông A'B'C'D' và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{2}$

Đáp án là C

Hình nón cần tính diện tích xung quanh có chiều cao $h = a$, bán kính đáy $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó có độ dài đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $S_{xq} = \pi Rl = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$

Câu 144. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π , thiết diện qua trục là hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ giới hạn bởi hình trụ.

A. $V = 2\pi$

B. $V = 6\pi$

C. $V = 3\pi$

D. $V = 5\pi$

Đáp án là A

Thiết diện qua trục là hình vuông nên hình trụ có chiều cao h là độ dài cạnh bên và bằng 2 lần bán kính đáy R . $S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 1 \Rightarrow h = 2$. Vậy $V = \pi R^2 h = 2\pi$

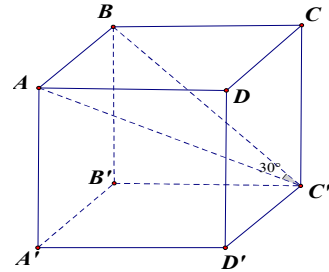
Câu 145. Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a , AC' tạo với mặt bên (BCC'B') với góc 30° . Tính thể tích V của khối hộp ABCDA'B'C'D'.

- A. $V = 2a^3$ B. $V = \sqrt{2}.a^3$ C. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}.a^3$ D. $V = 2\sqrt{2}.a^3$

Đáp án là B

ABCD A'B'C'D' là hình hộp đứng $\Rightarrow AC' \perp BCC'B' \Rightarrow$
góc $AC'B = 30^\circ$
 $\Rightarrow BC' = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABCD A'B'C'D'} = a.a.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$



Câu 146. Cho hình lăng trụ ABCA'B'C' có đáy tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB, góc giữa A'C và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AC và BB'.

- A. $h = \frac{6a}{\sqrt{52}}$ B. $h = \frac{3a}{\sqrt{52}}$ C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

Đáp án là A

Gọi H là hình chiếu của A' lên (ABC) $\Rightarrow H$ là trung điểm AB
và góc $A'CH = 60^\circ$

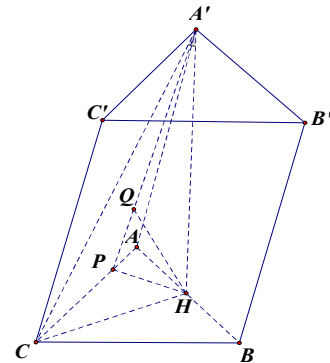
Kẻ HP vuông góc với AC $\Rightarrow AC \perp (A'QH)$.

Kẻ HQ vuông góc A'P $\Rightarrow HQ \perp (AA'C'C)$

Do BB' song song với (AA'C'C) nên khoảng cách h giữa BB'

và AC bằng khoảng cách giữa B và (AA'C'C) và bằng 2 lần khoảng cách từ H tới (AA'C'C)

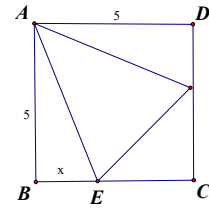
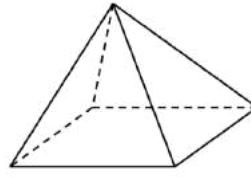
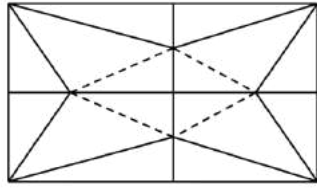
và bằng 2HQ.



Ta có $HP = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HP^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HQ = \frac{3a}{\sqrt{52}} \Rightarrow h = \frac{6a}{\sqrt{52}}$$

Câu 147. Một tấm nhôm hình vuông cạnh 10cm, người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn tam giác cân bằng nhau (xem hình vẽ), mỗi tam giác cân có chiều cao bằng x , rồi gấp tấm nhôm đó dọc theo đường nét đứt để được một hình chóp tứ giác đều. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 4$

B. $x = 2$

C. $x = 1$

D. $x = \frac{3}{4}$

Đáp án là C

Hình chóp tạo thành có đáy là hình vuông diện tích $S = \frac{1}{2}(10 - 2x)^2 = 2(5 - x)^2$ và có chiều cao

$$h = \sqrt{AE^2 - EC^2} = \sqrt{AB^2 + BE^2 - EC^2} = \sqrt{5^2 + x^2 - (5 - x)^2} = \sqrt{10x}$$

Vậy thể tích của khối chóp là

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{10x}2(5 - x)^2 = \frac{2}{3}\sqrt{10x(5 - x)^4} \leq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5(4x + 4(5 - x))^5}{5}} = \frac{32\sqrt{10}}{3}$$

Đạt được khi và chỉ khi $4x = 5 - x \Rightarrow x = 1$

Câu 148. Cho tứ diện ABCD có (ABC) vuông góc với (DBC) , hai tam giác ABC, DBC là tam giác đều cạnh a. Gọi (S) là mặt cầu đi qua B, c và tiếp xúc với đường thẳng AD tại A. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R = a\sqrt{6}$

B. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

C. $R = \frac{a\sqrt{6}}{5}$

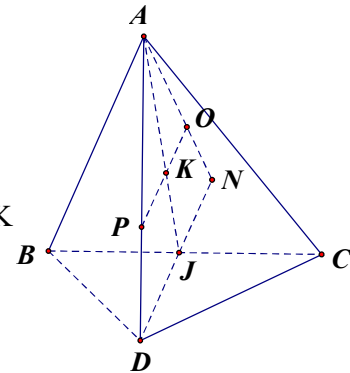
D. $R = a\sqrt{3}$

Đáp án là B

Gọi J là trung điểm BC $\Rightarrow \Delta ADJ$ vuông cân tại J và DJ vuông

Góc mặt phẳng (ABC)

Gọi K là trọng tâm tam giác ABC, N đối xứng với D qua J, qua K kẻ KO song song với DN ta có O là tâm mặt cầu cần xác định.



$$\Rightarrow R = AO = \sqrt{2}AK = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 149. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Tính thể tích V của khối tứ diện AB'C'D'.

A. $V = \frac{a^3}{3}$

B. $V = \frac{a^3}{6}$

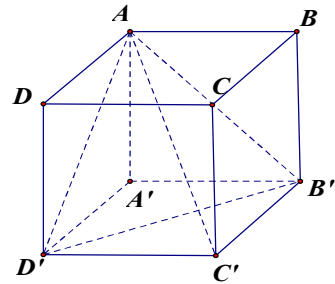
C. $V = \frac{a^3}{2}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Đáp án B

$$V_{AB'C'D'} = \frac{1}{3} h \cdot dt_{B'C'D'} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a$$

$$V_{AB'C'D'} = \frac{1}{6} a^3$$



Câu 150. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách h từ A tới mặt phẳng (SBC).

A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h = \frac{a}{2}$.

D. $h = a$.

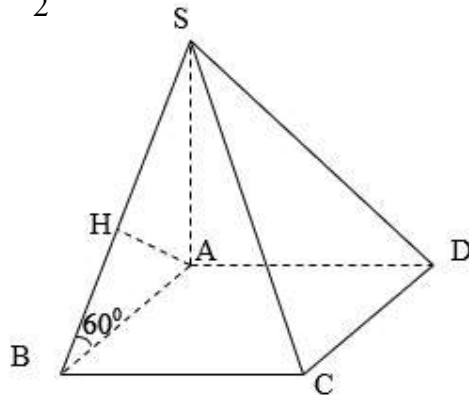
Đáp án B

Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$

$$\tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Câu 151. Cho hình chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy 45° . Tính thể tích V của khối chóp

A. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

B. $V = \frac{a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3}{12}$.

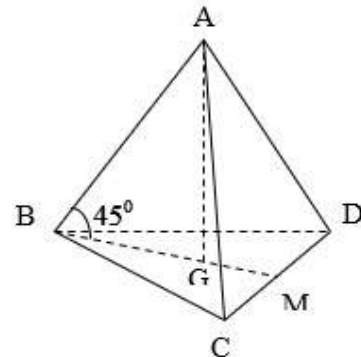
D. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{12}$.

Đáp án C

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AG}{BG} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}$$



Câu 152. Cho hình chóp SABC có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $\angle ABC = 30^\circ$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối chóp SABC.

A. $V = \frac{a^3}{8}$

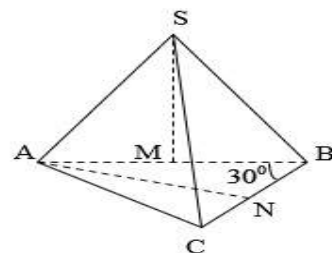
B. $V = \frac{a^3}{2}$

C. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{7}$

D. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{17}$

Đáp án A

$$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = a^2 + 3a^2 - 2 \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = a^2 \Rightarrow AC = a$$

$$AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{8}$$

Câu 153. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $\angle ACB = 60^\circ$. Quay tam giác đó một vòng xung quanh BC, ta được một hình tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình tròn xoay đó.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

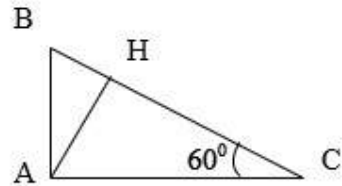
D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Đáp án C

Kẻ $AH \perp BC$. Khi đó, quay tam giác ABC quanh BC ta sẽ được hai hình nón trục BC đường sinh AB và trục HC đường sinh AC.

$$AC = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$



$$S_{xq} = \pi R_1 l_1 + \pi R_2 l_2 = \pi \cdot AH \cdot AB + \pi \cdot AH \cdot AC = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} + \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2 \pi}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Câu 154. Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SC và AD bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp SABCD.

A. $V = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{3}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3} \cdot a^3}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{6}$.

D. $V = \frac{2\sqrt{2} \cdot a^3}{3}$.

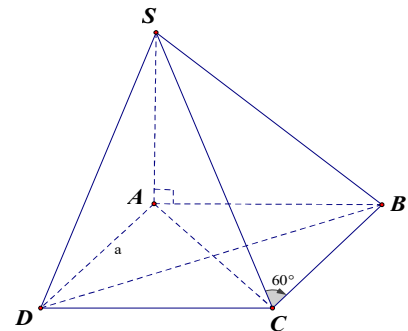
Đáp án A

Do AD song song với BC nên góc $\widehat{SCB} = 60^\circ$

$$\triangle SBC \text{ vuông tại B} \Rightarrow SB = BC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\triangle SAB \perp \text{ tại A} \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot dt_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2} a^3}{3}$$



Câu 155. Cho hình chóp S.ABC có $AC = SC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Biết thể tích của khối chóp

S.ABC bằng $\frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{16}$. Tính khoảng cách h từ điểm B tới mặt phẳng (SAC).

A. $h = \frac{a}{\sqrt{13}}$.

B. $h = \frac{a}{\sqrt{31}}$.

C. $h = \frac{2a}{\sqrt{13}}$.

D. $h = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

Đáp án D

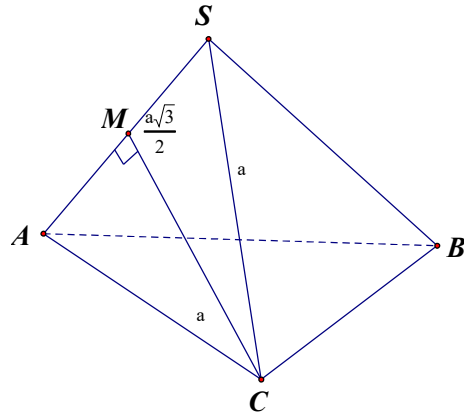
Gọi M là trung điểm $SA \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$,

$$CM = \sqrt{SC^2 - SM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{\sqrt{13}a}{4}$$

$$\Rightarrow dt_{SAC} = \frac{1}{2} CM \cdot SA = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

Khoảng cách h từ B tới (SAC) là:

$$h = \frac{3V}{dt_{SMC}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16} : \frac{a^2\sqrt{39}}{16} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$



Câu 156. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, góc giữa đường sinh và mặt đáy bằng 30° . Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón.

A. $S_{tp} = (8\sqrt{3} + 12)\pi$.

B. $S_{tp} = (5\sqrt{3} + 12)\pi$.

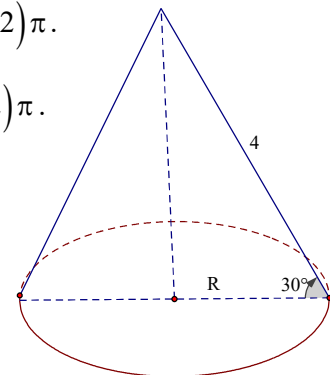
C. $S_{tp} = (8\sqrt{3} + 2)\pi$.

D. $S_{tp} = (\sqrt{3} + 12)\pi$.

Đáp án A

Ta có $R = l \cos 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2 = 8\pi\sqrt{3} + 12\pi = (8\sqrt{3} + 12)\pi$



Câu 157. Cho hình lăng trụ đều $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{7}$.

C. $S_{xq} = \frac{3\pi a^2}{7}$.

D. $S_{xq} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

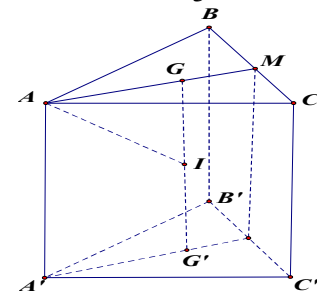
Đáp án D

Tâm của mặt cầu là trung điểm I của GG'

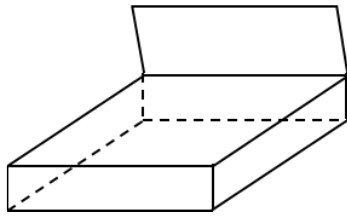
với G, G' là trọng tâm của các mặt đáy.

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; GI = \frac{a}{2}$$

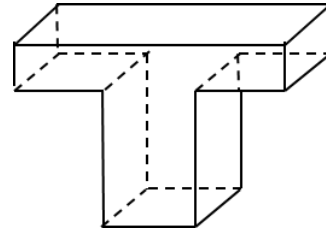
$$R = IA = \sqrt{AG^2 + GI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}. \text{ Vậy } S_{xq} = 4\pi R^2 = \frac{4 \cdot 21\pi a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$$



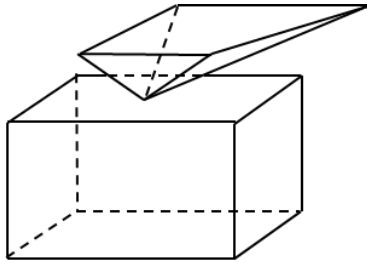
Câu 158. Hình nào dưới đây là khối đa diện ?



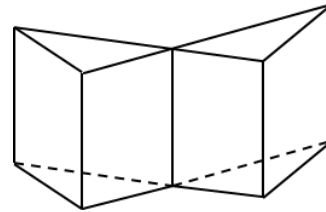
a)



b)



c)



d)

A. a).

B. b).

C. c).

D. d).

Đáp án B

Câu 159. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp mp(ABC)$, $SA = \frac{4a}{5}$, $AB = AC = a$, $BC = \frac{6a}{5}$.

Gọi M là trung điểm của BC và α là góc giữa hai đường thẳng AC, SM. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

C. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

D. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

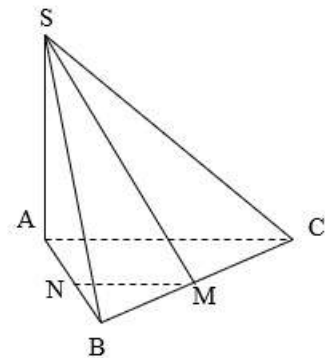
Đáp án A

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}, AN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, SN = \sqrt{SA^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{89}}{10}$$

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{64a^2}{100} \Rightarrow AM = \frac{4a}{5},$$

$$SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{4\sqrt{2}a}{5}$$

$$AC \parallel MN \Rightarrow \cos\alpha = |\cos SMN| = \left| \frac{SM^2 + MN^2 - SN^2}{2SM \cdot MN} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$



Câu 160. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng r và một hình nón có đỉnh là O đáy là hình tròn tâm O'. Biết diện tích xung quanh của hình nón bằng hai lần diện tích đáy của nó. Tính thể tích V của khối trụ giới hạn bởi hình trụ đã cho.

A. $V = 4\pi r^3 \cdot \sqrt{3}$.

B. $V = 2\pi r^3 \cdot \sqrt{3}$.

C. $V = 3\pi r^3 \cdot \sqrt{3}$.

D. $V = \pi r^3 \cdot \sqrt{3}$.

Đáp án D

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r l = 2\pi r^2 \Rightarrow l = 2r$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = r\sqrt{3}, V = \pi r^2 h = \pi r^2 r\sqrt{3} = \pi r^3 \sqrt{3}$$

Câu 161. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối chóp SABCD.

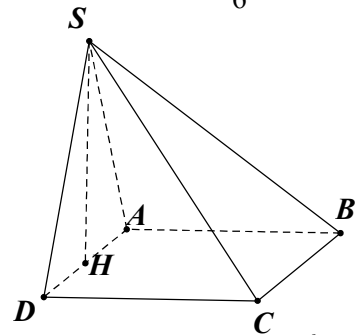
A. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{5a^3 \cdot \sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{7a^3 \cdot \sqrt{3}}{6}$.

Đáp án B

ΔSAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

nên gọi H là trung điểm của AD thì $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$



Câu 162. Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp SABC.

A. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{12}$.

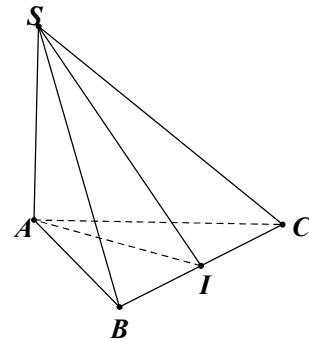
Đáp án A

Gọi I là trung điểm BC.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAI) \perp BC \\ (SAI) \cap (SBC) = SI; (SAI) \cap (ABC) = AI \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{(ABC), (SBC)} = \widehat{(AI, SI)} = \widehat{SIA}$$

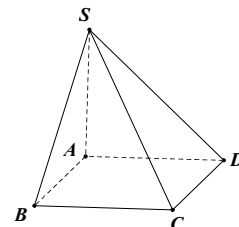
$$\text{Có } SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}. \quad \text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$$



Câu 163. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Biết rằng, thể tích của khối chóp S.ABCD bằng $2a^3$ và diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $h = \frac{3a}{5}$. B. $h = 3a$. C. $h = \frac{5a}{\sqrt{3}}$. D. $h = 2a$.

Đáp án B



$$\text{Ta có } d(SA, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = \frac{3V_{C.SAB}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{\frac{3}{2}V_{S.ABCD}}{S_{\Delta SAB}} = 3a.$$

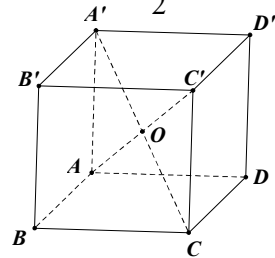
Câu 164. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a .

A. $V = \pi a^3$ B. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$ D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Đáp án D

Gọi O là tâm hình lập phương thì O là tâm khối cầu cần tìm.

$$\text{Bán kính khối cầu là } R = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}.$$



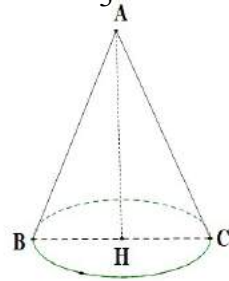
Câu 165. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Gọi H là trung điểm BC . Quay tam giác đó xung quanh trục AH , ta được một hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{5}$ B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{15}$ C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.

Đáp án C

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}; AH = BH = CH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Hình nón cần tính có } R = HB = \frac{a\sqrt{2}}{2}; l = AC = a \Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}.$$



Câu 166. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = 2, \angle ABC = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm M của BC , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $V = 4\sqrt{3}$ C. $V = 2\sqrt{3}$ D. $V = 2$.

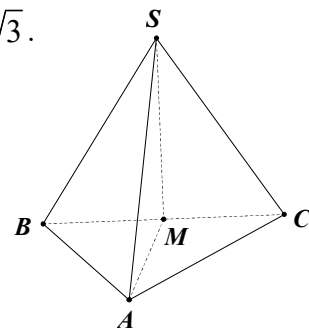
Đáp án A

$$\text{Ta có } BC = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 4; AM = \frac{1}{2}BC = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{(SA, AM)} = \widehat{SAM} = 45^\circ$$

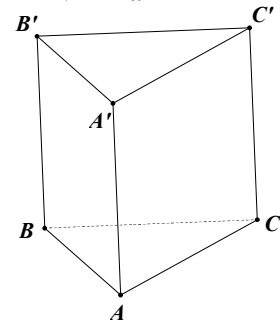
$$\Rightarrow \Delta SAM \text{ vuông cân tại } M \Rightarrow SM = AM = 2$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SM \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 167. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$.

- A. $V = a^3$. B. $V = a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = 2a^3$.



Đáp án D

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AC = AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCA'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = 2a^3$.

Câu 168. Từ một tấm tôn hình vuông cạnh 40cm , người ta làm thành 4 mặt xung quanh của một chiếc thùng có dạng hình hộp đứng đáy là hình vuông và có chiều cao là 40cm . Tính thể tích V của chiếc thùng.

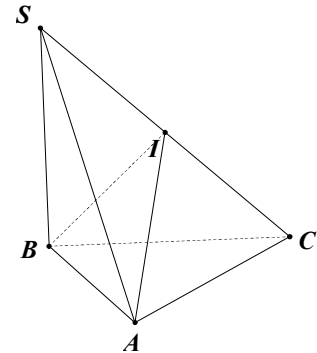
- A. $V = 4000\text{cm}^3$. B. $V = 400\text{cm}^3$. C. $V = 2000\text{cm}^3$. D. $V = 200\text{cm}^3$.

Đáp án A

Đáy là hình vuông nên độ dài cạnh đáy là $40 : 4 = 10\text{cm}$. Vậy $V = 10.10.40 = 4000\text{cm}^3$

Câu 169. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.

- A. $r = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $r = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$. D. $r = \frac{3a\sqrt{2}}{5}$.



Đáp án A

Gọi I là trung điểm SC thì $IS = IC = IA = IB$

(do các tam giác SAC và SBC là các tam giác vuông).

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Vậy $r = IS = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 170. Cho hình chóp $A.BCD$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CD . Cắt hình chóp bởi mặt phẳng (α) song song với

AB và CD . Tính diện tích S của thiết diện thu được, biết $d(B, (\alpha)) = \frac{a}{2}$ và $AB = a\sqrt{2}$.

- A. $S = \frac{4a}{15}(a\sqrt{15} + 2a\sqrt{2})$. B. $S = \frac{4a}{15}(a\sqrt{15} - a\sqrt{2})$.
C. $S = \frac{4a}{15}(a\sqrt{15} - 2a\sqrt{2})$. D. $S = \frac{4a}{15}(a\sqrt{15} + a\sqrt{2})$.

Đáp án C

$$\left. \begin{array}{l} QR \parallel PF \parallel AB \\ PQ \parallel RF \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow PQRF \text{ là hình bình hành, } CD \perp AB$$

$\Rightarrow PQRF$ là hình chữ nhật

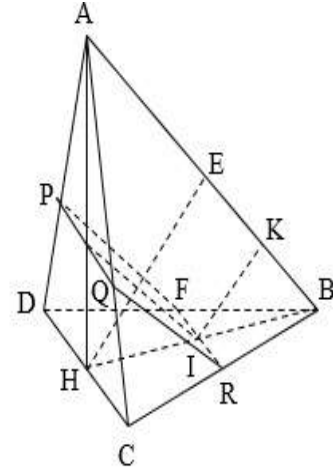
$$S = FR \cdot QR, AB \parallel (PQRF) \Rightarrow d(B, (PQRF)) = IK = \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{32}{15a^2}$$

$$\Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}, \frac{FR}{CD} = \frac{BI}{BH} = \frac{IK}{HE} \Leftrightarrow \frac{FR}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}} \Rightarrow FR = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{IJ}{AB} = \frac{HI}{HB} = \frac{HB - IB}{HB} = 1 - \frac{IB}{HB} = 1 - \frac{IK}{HE} = 1 - \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}} \Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{2}(a\sqrt{15} - 2a\sqrt{2})}{\sqrt{15}} = QR$$

$$\Rightarrow S = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{2}(a\sqrt{15} - 2a\sqrt{2})}{\sqrt{15}} = \frac{4a}{15}(a\sqrt{15} - 2a\sqrt{2})$$



Câu 171. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $BAC = 60^\circ$,

SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{13}$ C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ D. $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$

Đáp án A

Xét tam giác vuông ABC có:

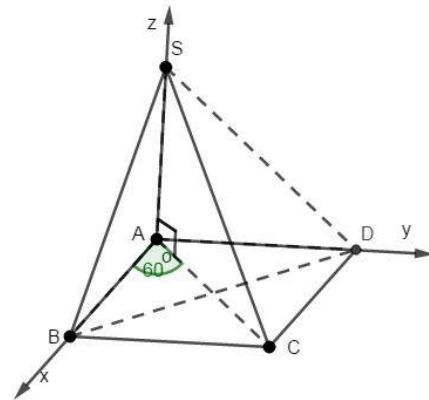
$$AB = AC \cdot \cos \widehat{BAC} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = BC = AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60^\circ = a$$

Chọn hệ trục Axyz gốc A, tia Ax trùng tia AB, tia Ay trùng tia AD, tia Az trùng tia AS.

$$A(0;0;0); B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right); C\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; a; 0\right); D(0; a; 0); S(0; 0; a\sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow \overline{AC}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; a; 0\right) / \vec{u}(1; \sqrt{3}; 0); \overline{SB}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; -a\sqrt{3}\right) / \vec{v}(1; 0; -3)$$



Mặt phẳng (P) chứa AC và song song với SB đi qua $A(0;0;0)$ và có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (-3\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3}) // (3; -\sqrt{3}; 1)$ nên có phương trình là $3x - \sqrt{3}y + z = 0$.

Suy ra khoảng cách giữa AC và SB bằng khoảng cách từ S đến (P) và bằng:

$$d_{(S;(P))} = \frac{|a\sqrt{3}|}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 172. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $\angle ACB = 60^\circ$, $B'C'$ tạo với mặt phẳng $AA'CC'$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$.

- A. $V = a^3\sqrt{2}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

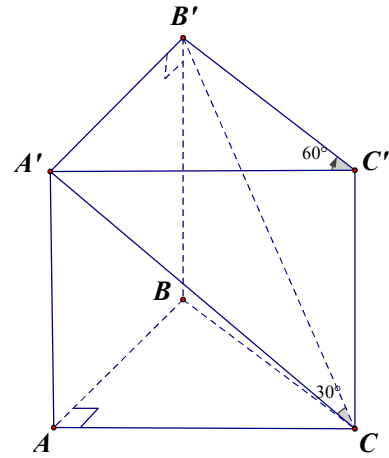
Đáp án C

$\Delta B'A'C' \perp$ tại $A' \Rightarrow B'A' \perp (A'ACC') \Rightarrow$ góc $B'CA' = 30^\circ$

$$B'C' = \frac{B'A'}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}; B'C = \frac{A'B'}{\sin 30^\circ} = 2A'B' = 2a$$

$$\Rightarrow CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{ABCA'B'C'} &= dt_{A'B'C'} \cdot C'C \\ &= \frac{1}{2} B'A' \cdot B'C' \cdot C'C = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{6}a}{3} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3} \end{aligned}$$



Câu 173. Cho hình chóp S.ABC có mặt bên SAB vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SAB đều cạnh a, tam giác BAC vuông cân tại A. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và SC.

- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $h = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. D. $h = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Đáp án A

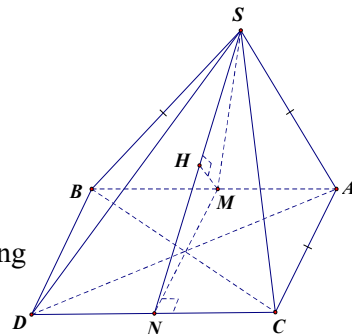
Dựng điểm D sao cho ABCD là hình vuông khi đó:

AB song song với (SDC) \Rightarrow khoảng cách giữa AB và SC

Bằng khoảng cách giữa AB và (SDC)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và DC ta có MN song song với AC nên MN vuông góc với AB.

Mà SM vuông góc với AB nên AB vuông góc với (SMN). Do CD song song với AB nên CD vuông góc với (SMN) suy ra (SDC) vuông góc với (SMN)



Vì SN là giao tuyến của hai mặt phẳng trên \Rightarrow Kẻ MH vuông góc với SN thì MH là khoảng

cách cần tìm. Ta có $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = a$,

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Câu 174. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = a. Thể tích V của khối chóp SBCD là.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{8}$.

Đáp án B

$$V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

Câu 175. Cho lăng trụ ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm H của BC, góc giữa AA' và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ ABCA'B'C'.

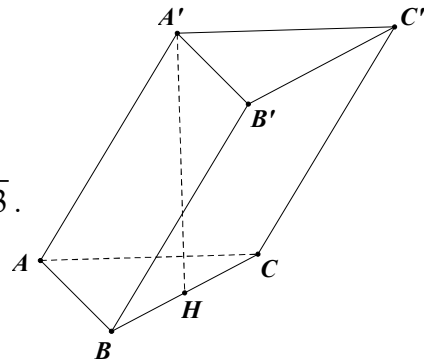
- A. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{12}$. D. $V = 3a^3$

Đáp án D

Ta có $(\widehat{AA'}, (ABC)}) = (\widehat{AA'}, AH) = \widehat{A'AH} = 45^\circ$.

Lại có $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 45^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCA'B'C'} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{(2a^2)\sqrt{3}}{4} = 3a^3$.



Câu 176. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = a, BAC = 120° , BB' = a, I là trung điểm CC'. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I). Tính $\cos \alpha$.

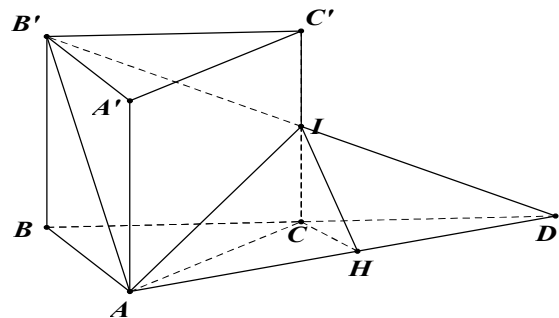
- A. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}$. B. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. C. $\cos \alpha = \frac{3}{10}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Đáp án A

Gọi D là giao điểm của BC và B'I.

$\Rightarrow (ABC) \cap (AB'I) = AD$

Kẻ $CH \perp AD (H \in AD)$.



$$\Rightarrow (CIH) \perp AD \Rightarrow \left((\widehat{AB'I}), (\widehat{ABC}) \right) = \widehat{CHI} = \alpha$$

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Có } B'C' \parallel CD \Rightarrow \frac{B'C'}{CD} = \frac{C'I}{IC} = 1 \Rightarrow CD = B'C' = BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 150^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{CD^2 + CA^2 - 2CD \cdot CA \cdot \cos \widehat{ACD}} = a\sqrt{7}$$

$$\text{Mặt khác ta có } \frac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = \frac{AD}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \frac{a}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{Mà } \sin \widehat{ADC} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow IH = \sqrt{IC^2 + CH^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{CH}{IH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}.$$

Câu 177. Cho hình cầu đường kính $AA' = 2a$. Gọi H là một điểm nằm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{4a}{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn (C) .

Tính diện tích S của hình tròn (C) .

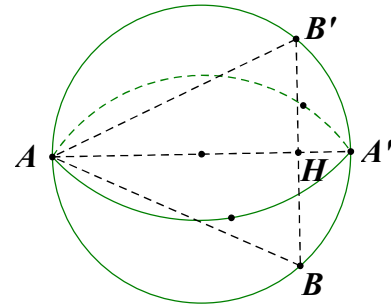
A. $S = \frac{8\pi a^2}{9}$. B. $S = \frac{5\pi a^2}{9}$. C. $S = \frac{11\pi a^2}{9}$. D. $S = \frac{\pi a^2}{9}$.

Đáp án A

Ta có $\triangle ABA'$ vuông tại B có BH là đường cao nên

$$BH^2 = AH \cdot A'H = \frac{4a}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{8a^2}{9} \Rightarrow R_{(C)} = BH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{(C)} = \pi R^2 = \frac{8\pi a^2}{9}.$$



Câu 178. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ biết $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = a\sqrt{14}$.

A. $V = 2a^3$. B. $V = 6a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{3}$. D. $V = a^3\sqrt{5}$.

Đáp án B

Câu 179. Tính thể tích V của khối nón có chiều cao $a\sqrt{3}$, độ dài đường sinh bằng $2a$.

A. $V = 3\pi a^3$. B. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 2\pi a^3$. D. $V = \frac{2\pi a^3}{3}$.

Đáp án B

$$R = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a, \quad V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$$

Câu 180. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy R , chiều cao $R\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua OO' cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{2}R^2$. B. $2\sqrt{2}R^2$. C. $4\sqrt{2}R^2$. D. $3\sqrt{2}R^2$.

Đáp án B

Câu 181. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có chiều cao a , cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

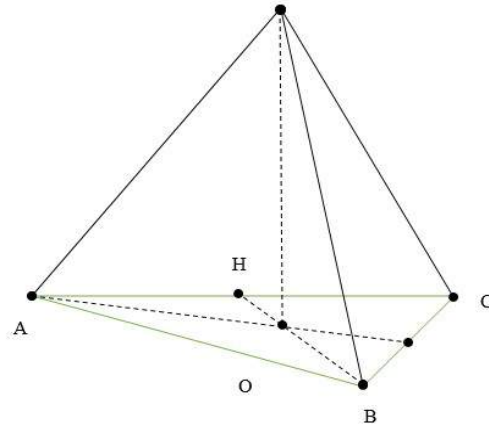
- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{9a^3 \sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Đáp án C

$$AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3},$$

$$AH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}, \quad AB = \frac{AH}{\cos \frac{\pi}{6}} = 3a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}$$



Câu 182. Cho hình lập phương $ABCA'B'C'D'$ cạnh a . Điểm M di động trên đoạn BD , điểm N di động trên đoạn AB' . Đặt $BM = B'N = t$. Đoạn MN bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$ khi t bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Đáp án A

Kẻ $MM' \parallel CD \parallel NN'$.

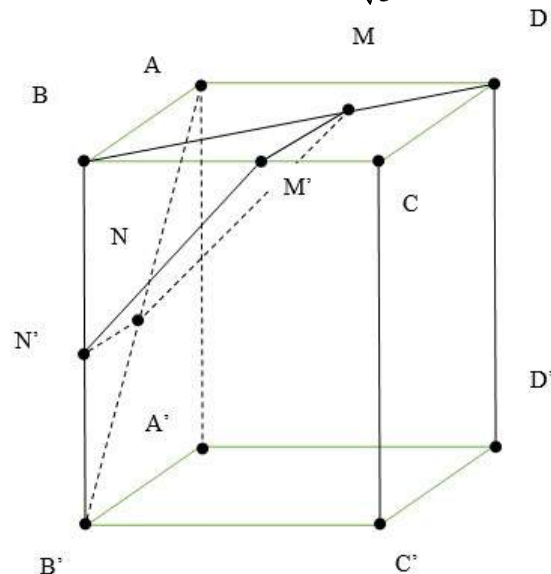
Dễ thấy $\triangle BNN' = \triangle BMM' \Leftrightarrow MM' = NN'$.

Lại có $MM' \parallel NN'$

$\Leftrightarrow MM'N'N$ là hình bình hành $\Leftrightarrow M'N' = MN$

Ta có: $BM' = \frac{t\sqrt{2}}{2}$, $B'N' = a - \frac{t\sqrt{2}}{2}$,

$$M'N' = \sqrt{B'N'^2 + BM'^2} = \sqrt{a^2 - at\sqrt{2} + t^2}$$



Giải phương trình $MN = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 - at\sqrt{2} + t^2} \Leftrightarrow a^2 - 2at\sqrt{2} + 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 183. Cho khối trụ (μ) có bán kính đáy bằng 5 và có diện tích xung quanh bằng 30π .
 Tính thể tích V của khối trụ (μ).

- A. $V = 65\pi$. B. $V = 56\pi$. C. $V = 75\pi$. D. $V = 57\pi$.

Đáp án C

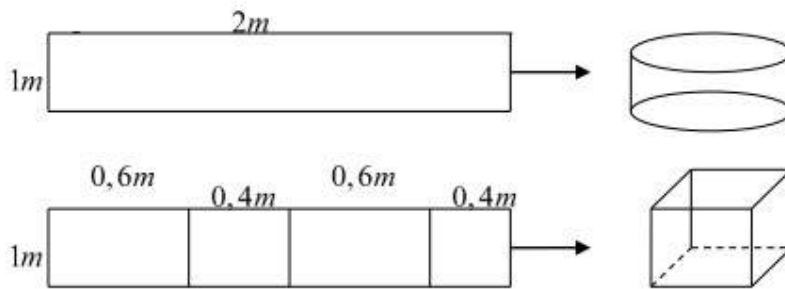
$$S_{xq} = 2\pi.R.h = 30\pi \Leftrightarrow h = 3. \quad V = \pi.R^2.h = 75\pi$$

Câu 184. Từ một tấm tôn có kích thước $1m \times 2m$, người ta làm ra chiếc thùng đựng nước theo hai cách (xem hình minh họa dưới đây)

– Cách 1: làm ra thùng hình trụ có chiều cao $1m$, bằng cách gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

– Cách 2: làm ra thùng hình hộp chữ nhật có chiều cao $1m$, bằng cách chia tấm tôn ra thành 4 phần rồi gò thành các mặt bên của hình hộp chữ nhật.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng được gò theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng được gò theo cách 2. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{0,24\pi}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{0,27\pi}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{0,7\pi}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{0,2\pi}$.

Đáp án A

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 h_1}{a.b.h_2} = \frac{\pi \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 \cdot 1}{0,6 \cdot 0,4 \cdot 1} = \frac{1}{0,24\pi}$$

Câu 185. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Tính khoảng cách h từ điểm C tới mặt phẳng (B'DM).

- A. $h = \frac{a}{\sqrt{14}}$ B. $h = \frac{2a}{\sqrt{14}}$ C. $h = \frac{3a}{\sqrt{14}}$ D. $h = \frac{a}{12}$

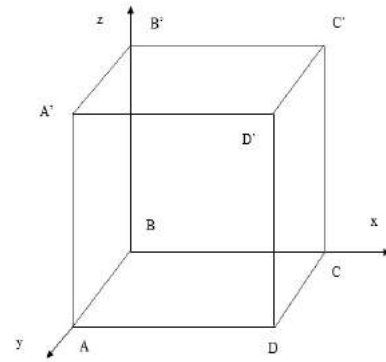
Đáp án C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có

$$B(0;0;0), A(0;a;0), C(a;0;0), D(a;a;0), B'(0;0;a).$$

$$\text{Do } BM = \frac{2}{3}BA \Rightarrow M\left(0; \frac{2a}{3}; 0\right).$$



$$\text{Mặt phẳng } (B'MD) \text{ có 1 VTPT là } [\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{B'M}] = \left(-\frac{a^2}{3}; a^2; \frac{2a^2}{3}\right) = 3a^2(-1; 3; 2).$$

Do đó phương trình mặt phẳng $(B'MD)$ là $x - 3y - 2z + 2a = 0$.

$$\text{Vậy } d(C, (B'MD)) = \frac{|a + 2a|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{3a}{\sqrt{14}}.$$

Câu 186. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, biết thể tích của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ bằng a^3 . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.

A. $h = \frac{4a}{\sqrt{3}}$.

B. $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $h = a$.

D. $h = a\sqrt{3}$.

Đáp án B

Câu 187. Cho hình lập phương $ABCD_1B_1C_1D_1$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1 . Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Đáp án C

Kẻ $MQ \parallel NC'$ (Q nằm trên $A'B'$)

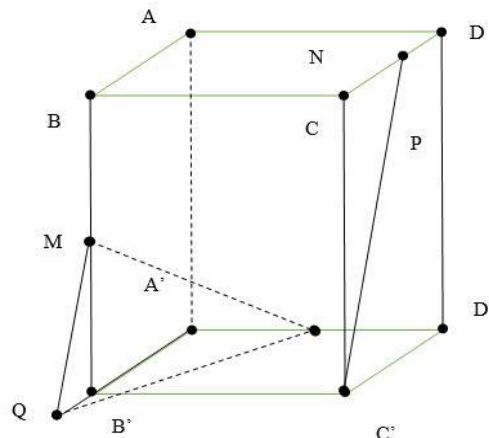
$$\widehat{(MP, C'N)} = \widehat{(MP, MQ)}, B'Q = \frac{a}{4}$$

$$MQ = \sqrt{B'Q^2 + B'M^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$QP = \sqrt{A'Q^2 + A'P^2} = \frac{a\sqrt{29}}{4}$$

$$A'D' \perp (ABB'A') \Leftrightarrow A'D' \perp A'M$$

$$MP = \sqrt{MA'^2 + A'P^2} = \sqrt{MB'^2 + B'A'^2 + A'P^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \cos \widehat{QMP} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2 \cdot MP \cdot MQ} = 0$$



Câu 188. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có thể tích bằng a^3 . Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên và G là trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích V của khối tứ diện $GMNP$.

A. $V = \frac{a^3}{24}$.

B. $V = \frac{a^3}{8}$.

C. $V = \frac{a^3}{12}$.

D. $V = \frac{a^3}{16}$.

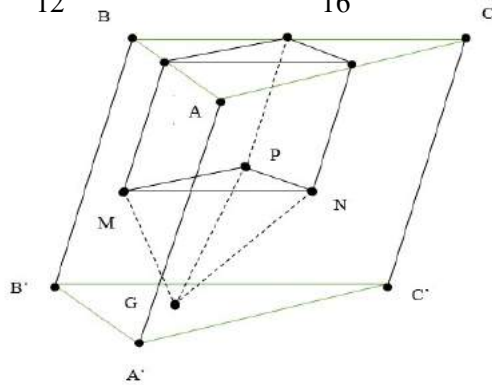
Đáp án A

$$V_{ABCA'B'C'} = h \cdot S_{\Delta ABC} = a^3$$

$$V_{G.MNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{\Delta MNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{24}$$

Ta có

$$d(AB, B'C') = d(A, (A'B'C')) = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{a^3}{\frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Câu 189. Cho hình nón đỉnh S , chiều cao $SO = h$, bán kính đáy bằng R . Gọi M là điểm nằm trên đoạn SO , đặt $OM = x (0 < x < h)$ Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với SO , thiết diện thu được là đường tròn (C) . Tìm x để thể tích của khối nón đỉnh O đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) đạt giá trị lớn nhất

A. $x = \frac{h}{2}$

B. $x = \frac{h}{3}$

C. $x = \frac{h}{4}$

D. $x = \frac{h}{5}$

Đáp án B

Gọi AB là đường kính của đường tròn (C) ; CD là đường kính của đường tròn (O) sao cho $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow AB = CD \cdot \frac{SM}{SO} = 2R \cdot \frac{h-x}{h} \text{ với } 0 < x < h.$$

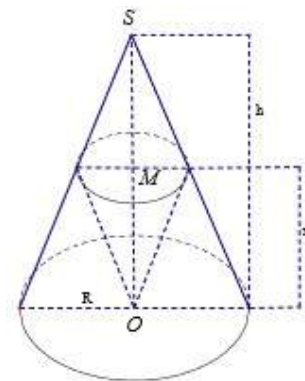
Khi đó thể tích hình chóp đỉnh O là:

$$V = \frac{1}{3} x \cdot \pi \left[R \frac{h-x}{h} \right]^2 = \frac{1}{3h^2} \pi R^2 x (h-x)^2.$$

$$\text{Đặt } f(x) = x(h-x)^2 = x^3 - 2hx^2 + h^2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2.$$

$$V \text{ max} \Leftrightarrow f(x) = x(h-x)^2 \text{ max} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h(l) \\ x = \frac{h}{3} (t/m) \end{cases}$$

Vậy với $x = \frac{h}{3}$ thì thể tích khối chóp đỉnh O là lớn nhất.



Câu 190. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, BC = 2a; \angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của $BC, SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ điểm S tới mặt phẳng (ABC) .

- A. a B. $2a$ C. $a\sqrt{3}$ D. $a\sqrt{2}$

Đáp án B

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) .

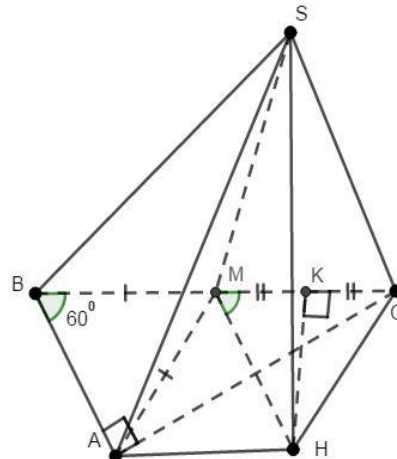
Vì $SA = SC = SM \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MAC$.

Gọi K là trung điểm của $MC \Rightarrow \begin{cases} MK = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{a}{2}. \\ HK \perp MC = \{K\} \end{cases}$

Dễ thấy: $\triangle MHK$ đồng dạng với $\triangle BCA (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{MH}{BC} = \frac{MK}{BA} \Rightarrow MH = BC \cdot \frac{MK}{BA} = 2a \cdot \frac{\frac{a}{2}}{a} = a.$$

Do đó: $SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a.$



Câu 191. Cho tứ diện ABCD cạnh $2a$. Tính thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện ABCD.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$

Đáp án C

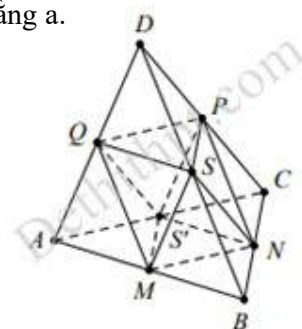
Khối bát diện đều có cạnh là a .

Chia bát diện đều thành hai hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

Thể tích khối chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ là

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3} d(S; (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Vậy thể tích cần tính là $V = 2 \times V_{S.MNPQ} = 2 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$



Câu 192. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, AD = a, SA$ vuông góc với mặt đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{13\sqrt{13}}{6}\pi a^3$ B. $V = \frac{5\sqrt{10}}{3}\pi a^3$ C. $V = \frac{13\sqrt{13}}{24}\pi a^3$ D. $V = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$

Đáp án A

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SBC);(ABCD)} = \widehat{SBA}$

Tam giác SAB vuông tại A, có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot a\sqrt{3} = 3a$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là $R_{ABCD} = \frac{AC}{2}a$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD là

$$R = \sqrt{R_{ABCD}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{(3a)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}$$

Câu 193. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $5SM = 2SC$, mặt phẳng (α) qua A, M và song song với đường thẳng BD cắt hai

cạnh SB, SD lần lượt tại H, K. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.AHMK}}{V_{S.ABCD}}$?

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{8}{35}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{6}{35}$

Đáp án D

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, nối $SO \cap AM = I$

Qua I kẻ đường thẳng d, song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại H, K suy ra

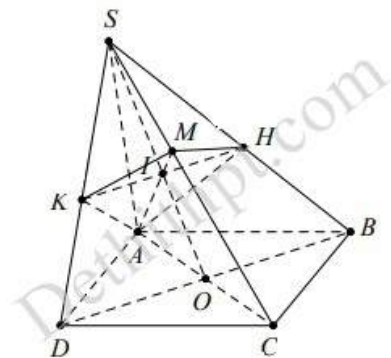
$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{SI}{SO}$$

Điểm $M \in SC$ thỏa mãn $5SM = 2SC \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{2}{5}$

Xét tam giác SAC, có $\frac{MS}{MC} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{SI} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{3}{7}$

Khi đó $\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SM}{SC}$; $\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SM}{SC}$

Suy ra $\frac{V_{S.AHMK}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SH}{SB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \Rightarrow V_{S.AHMK} = \frac{6}{35} V_{S.ABCD}$



Câu 194. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. O là trực tâm tam giác ABC B. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
 C. O là trọng tâm tam giác ABC D. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Đáp án D

Ta có $SO \perp (ABC) \Rightarrow \Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $OA = OB = OC$ hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Câu 195. Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) . M là một điểm nằm ngoài hai mặt phẳng trên. Qua M dựng được bao nhiêu mặt phẳng đồng thời vuông góc với (α) và (β) ?

- A. Vô số B. 1 C. 2 D. 0

Đáp án B

Gọi (γ) là mặt phẳng qua M và đồng thời vuông góc với (α) và (β)

Khi đó $(\gamma) \perp d$ (với d là giao tuyến của (α) và (β))

Mặt khác có duy nhất 1 mặt phẳng qua M và vuông góc với d . Do đó có 1 mặt phẳng (γ)

Câu 196. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$ B. $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ P \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (\beta)$
 C. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$ D. $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

Đáp án B

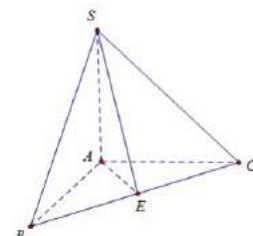
$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ P \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (\beta)$ là khẳng định đúng

Câu 197. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại $A, SA = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Đáp án C

Dựng $AE \perp BC$. Lại có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$



Do đó $BC \perp (SEA) \Rightarrow \overline{(SBC);(ABC)} = \overline{SEA}$

Mặt khác $AE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \overline{SEA} = \frac{SA}{AE} = \sqrt{2}$

Câu 198. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3\sqrt{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

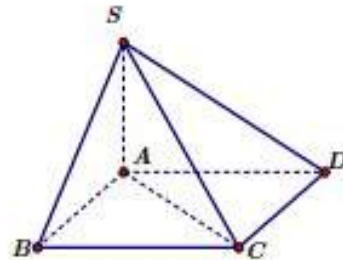
Đáp án D

Do đáy hình vuông cạnh a nên đường chéo $AC = a\sqrt{2}$

$\overline{(SC);(ABCD)} = \overline{(AC,SC)} = \overline{SCA} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$



Câu 199. Cho 2 đường thẳng phân biệt a và b không nằm trong mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

- A. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$ B. Nếu $b \perp (P)$ thì b cắt a
 C. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$ D. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$

Đáp án B

Các khẳng định A, C và D sai; khẳng định B đúng.

Câu 200. Một hình trụ có bán kính đáy $r = a$, chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ.

- A. $S_{xq} = 2\pi a^2$ B. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ C. $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{3}$ D. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$

Đáp án C

Ta có $S_{xq} = C \cdot h = 2\pi r h = 2\pi a^2\sqrt{3}$

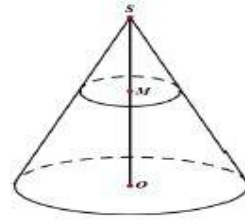
Câu 201. Một hình nón có chiều cao $SO = 50cm$ và có bán kính đáy bằng $10cm$. Lấy điểm M thuộc đoạn SO sao cho $OM = 20cm$. Một mặt phẳng qua M vuông góc với SO cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn xác định bởi (C) (xem hình vẽ).

- A. $16\pi\sqrt{26}(cm^2)$ B. $26\pi\sqrt{26}(cm^2)$ C. $36\pi\sqrt{26}(cm^2)$ D. $46\pi\sqrt{26}(cm^2)$

Đáp án C

Gọi $R = 10$ và r lần lượt là bán kính đáy của hình nón lớn và hình nón nhỏ.

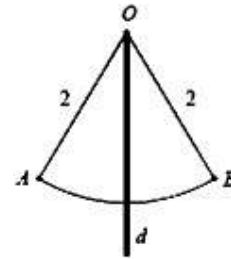
$$\text{Ta có } \frac{r}{R} = \frac{SM}{SO} = \frac{SO - MO}{SO} \Leftrightarrow \frac{r}{10} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow r = 6cm$$



Diện tích xung quanh của hình nón nhỏ là $S_{xq} = \pi r \sqrt{SM^2 + r^2} = 36\pi\sqrt{26}(cm^2)$

Câu 202. Gọi (H) là khối tròn xoay tạo thành khi quay hình quạt OAB (hình vẽ bên) quanh đường thẳng d đi qua O và vuông góc với AB . Biết $OA = OB = 2$, góc $AOB = 60^\circ$. Thể tích V của khối tròn xoay (H) gần với giá trị nào sau đây nhất ?

- A. 1,75 B. 2,25
C. 1,55 D. 3,15



Đáp án B

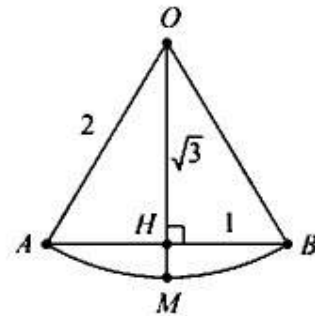
Gọi H, M lần lượt là giao điểm của d với AB và dây cung \widehat{AB}

$$\text{Tam giác } OAB \text{ đều cạnh } 2 \Rightarrow OH = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow HM = 2 - \sqrt{3}$$

Quay tam giác OAB quanh trục d ta được khối nón (N) có

bán kính đáy $r = AH = 1$ và chiều cao $h = OH = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \text{Thể tích khối nón } (N) \text{ là } V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$



Quay phần hình còn lại quanh trục d ta được chòm cầu (C) có bán kính đáy $r = AH = 1$ và chiều cao $h = HM = 2 - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \text{Thể tích khối nón } (C) \text{ là } V_{(C)} = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{16 - 9\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$\text{Vậy thể tích khối tròn xoay } (H) \text{ là } V = V_{(N)} + V_{(C)} = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3}\pi \approx 2,24$$

Câu 203. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ biết tất cả các cạnh của lăng trụ đều bằng a

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ B. a^3 C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Đáp án D

Diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao của lăng trụ là $h = a$

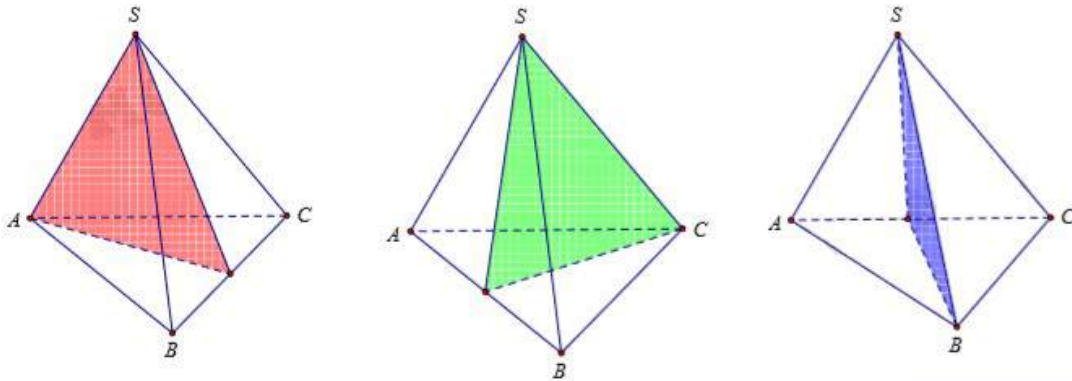
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = Sh = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 204. Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $3a$ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 9

Đáp án A

Khối chóp đã cho có 3 mặt phẳng đối xứng



Câu 205. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $6a^3$ B. a^3 C. $\frac{a^3}{3}$ D. $3a^3$

Đáp án B

$$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}3a.a^2 = a^3$$

Câu 206. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là

- A. $S = \frac{4\pi R^3}{3}$ B. $S = \pi R^2$ C. $S = \frac{4\pi R^2}{3}$ D. $S = 4\pi R^2$

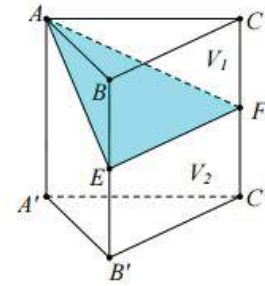
Đáp án D

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$

Câu 207. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Mặt phẳng (AEF) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ. Tỉ số

$\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$



Đáp án A

$$V_1 = \frac{1}{3} d(A; (BCC'B')) \cdot S_{BEFC} = \frac{1}{3} d(A; (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'} = \frac{1}{2} V_{ABCC'B'}$$

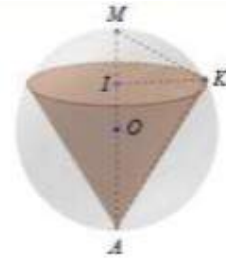
Mà

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} \Rightarrow V_{ABC'C'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Mặt khác } V_1 + V_2 = V_{ABC.A'B'C'} \rightarrow V_2 = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Câu 208. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kỳ nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1 ; thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2 . Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{81}{32}$ B. $\frac{76}{32}$ C. $\frac{32}{81}$ D. $\frac{32}{76}$



Đáp án D

Kí hiệu như hình vẽ bên

Chuẩn hóa $R = 1$ và gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón \Rightarrow Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Tam giác AMK vuông tại K, có $IK^2 = IM \cdot IA \Leftrightarrow r^2 = h(2R - h) = h(2 - h)$

Để $\frac{V_1}{V_2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_C - V_1}{V_1} = \frac{V_C}{V_1} - 1$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow V_1$ đạt giá trị lớn nhất

Khi đó $V_1 = \frac{\pi}{3} h^2 (2 - h) \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{32}{27} = \frac{32\pi}{81}$ (khảo sát hàm số $f(h) = 2h^2 - h^3$)

Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = 1 : \left(\frac{V_C}{V_1} - 1 \right) = 1 : \left(\frac{4\pi}{3} : \frac{32\pi}{81} - 1 \right) = \frac{8}{19}$

Câu 209. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Lấy điểm M thuộc đoạn AD', điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$ với $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất

- A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $x = \frac{a}{2}$

Đáp án A

$$\text{Kẻ } MH \perp AD \Rightarrow MH = AH = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HD = a - \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Tam giác HND có $HN^2 = DN^2 - 2DN \cdot HD \cdot \cos^2 \widehat{NDH}$

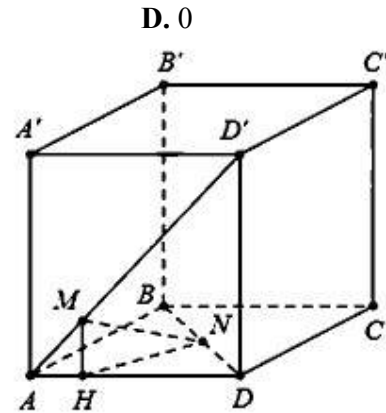
$$= \left(a - \frac{x\sqrt{2}}{2} \right)^2 + x^2 - \sqrt{2}x \left(a - \frac{x\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5}{2}x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2$$

Vì $MH \perp AD \Rightarrow MH // AA' \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp HN$

Tam giác MHN vuông tại H, có $MN^2 = MH^2 + HN^2$

$$= \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = \frac{1}{3} \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow MN \geq \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MN_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$



Câu 210. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với O là tâm đa giác đáy ABCD. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $BD \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $OS \perp (ABCD)$.

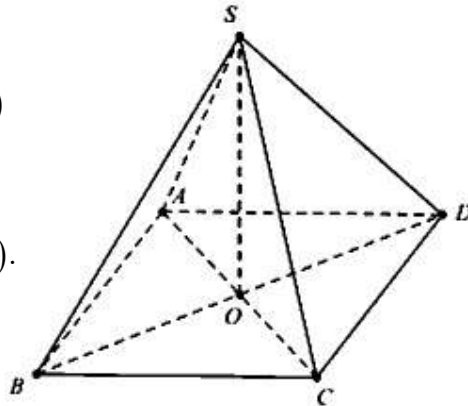
Đáp án B.

Do hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

Mặt khác ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$

$$\text{Vì } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD), \text{ tương tự } BD \perp (SAC).$$

Suy ra đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.



Câu 211. Cho hình nón có đỉnh S, tâm đáy là O, bán kính đáy là a, góc tạo bởi một đường sinh SM và đáy là 60° . Tìm kết luận **sai**.

- A. $S_{tp} = 4\pi a^2$. B. $l = 2a$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. D. $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Đáp án A.

$$\text{Ta có } \tan 60^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sqrt{3} \text{ và } \cos 60^\circ = \frac{a}{l} \Rightarrow l = 2a.$$

Khi đó $S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2 = 3\pi a^2$; $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$; $S_{\text{xq}} = \pi Rl = 2\pi a^2$.

Câu 212. Cho hình nón đỉnh S và O là tâm đáy. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác cân có đường cao $h = 3\text{cm}$, biết hai cạnh bên dài gấp đôi cạnh đáy. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

- A. $\frac{36}{17} \pi (\text{cm}^2)$. B. $\frac{36}{17} \pi (\text{m}^2)$. C. $\frac{18}{5} \pi (\text{cm}^2)$. D. $\frac{12}{5} \pi (\text{m}^2)$.

Đáp án D.

Gọi thiết diện qua trục là tam giác cân SAB có $SA = 2AB$.

Ta có: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4AB^2 - OA^2 = 15r^2 = h^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{5} \text{cm}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \frac{12}{5} \text{cm}^2$.

Câu 213. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, đáy nhỏ của hình thang là CD, cạnh bên $SC = a\sqrt{15}$. Tam giác SAD là tam giác đều cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABCD?

- A. $V = 8a^3 \sqrt{6}$. B. $V = 12a^3 \sqrt{6}$. C. $V = 4a^3 \sqrt{6}$. D. $V = 24a^3 \sqrt{6}$.

Đáp án C.

Ta có SAD là tam giác đều nên $SH \perp AD$

Mặt khác $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

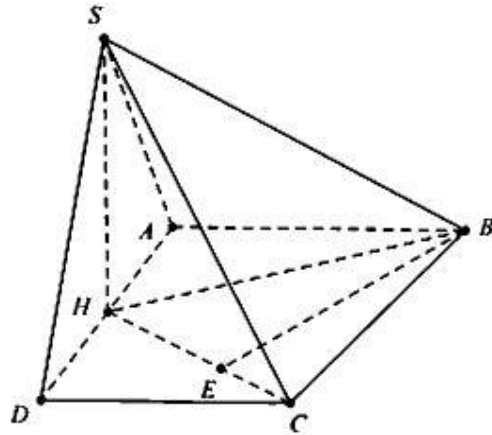
Dựng $BE \perp HC$, do $BE \perp SH \Rightarrow BE \perp (SHC)$

Do đó $d = BE = 2a\sqrt{6}$; $SH = a\sqrt{3}$; $AD = 2a$

Do $SC = a\sqrt{15} \Rightarrow HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = 2a\sqrt{3}$.

Do $S_{\text{AHB}} + S_{\text{CHD}} = \frac{1}{2} a (AB + CD) = \frac{S_{\text{ABCD}}}{2}$ suy ra

$$V_{\text{S.ABCD}} = 2V_{\text{S.HBC}} = \frac{2}{3} \cdot SH \cdot S_{\text{BCH}} = \frac{3}{2} a \sqrt{3} \cdot \frac{BE \cdot CH}{2} = 4a^3 \sqrt{6}.$$



Câu 214. Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC là tam giác cân với $BAC = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Hình chiếu của D trên mặt phẳng ABC là trung điểm của BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD biết thể tích của tứ diện ABCD là

$$V = \frac{a^3}{16}.$$

A. $R = \frac{\sqrt{91}a}{8}$. B. $R = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. C. $R = \frac{13a}{2}$. D. $R = 6a$.

Đáp án A.

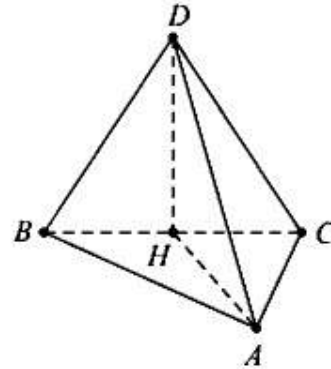
Gọi H là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC suy ra H là trung điểm của AO.

Ta có $DH = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Khi đó $JO \perp (ABC)$. Do $JA = R, OA = a$ nên $JO = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Mặt khác $HO \perp JO, HO \perp HD$ nên ta có $\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{R^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{91}}{8}$.



Câu 215. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. πa^2 . B. $4\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. $2\pi a^2$.

Đáp án B.

Đường kính đáy $d = 2R = 2a\sqrt{2}$.

Do góc ở đỉnh bằng 60° nên thiết diện qua trục là tam giác đều.

Độ dài đường sinh là: $l = d = 2a\sqrt{2}$

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi R l = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a\sqrt{2} = 4\pi a^2$.

Câu 216. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên $AA' = h$ và diện tích của tam giác ABC bằng S Thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng

A. $V = \frac{1}{3}Sh$. B. $V = \frac{2}{3}Sh$. C. $V = Sh$. D. $V = 2Sh$.

Đáp án D.

Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2S \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2Sh$.

Câu 217. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $h = \sqrt{2}R$. B. $h = 2R$. C. $R = h$. D. $R = 2h$.

Đáp án C.

Ta có $S_{tp} = 2S_{xq} \Leftrightarrow 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow R = h$.

Câu 218. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, $AC = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{3a^2}{2}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Tính theo a thể tích khối chóp H.ABCD.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$.

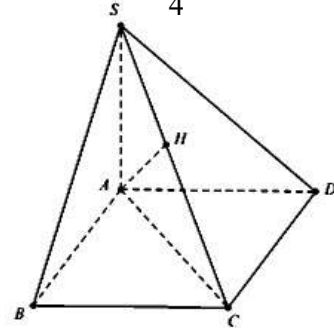
Đáp án C.

Do $\widehat{SC; (ABC)} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

Ta có: ΔSAC vuông tại A có đường cao AH.

Khi đó $SA^2 = SH \cdot SC \Rightarrow \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SH}{SC} = \frac{6a^2}{6a^2 + 2a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{HC}{SC} = \frac{1}{4}$.

Do đó $d(H; (ABCD)) = \frac{1}{4}d(C; (ABCD)) \Rightarrow V_{H.ABCD} = \frac{3}{4}V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.



Câu 219. Khi cắt khối nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối nón (N).

- A. $V = 3\sqrt{6}\pi a^3$. B. $V = \sqrt{6}\pi a^3$. C. $V = \sqrt{3}\pi a^3$. D. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

Đáp án C.

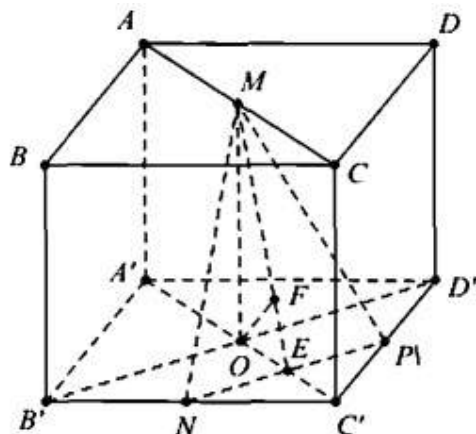
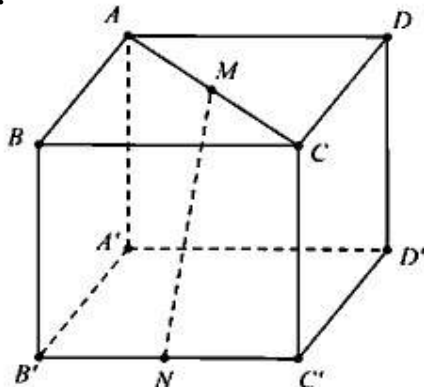
Bán kính đáy của hình nón là $r = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, chiều cao hình nón là $h = \frac{1}{2}$, cạnh

huyền = $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối nón (N) là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi a^3 \sqrt{3}$.

Câu 220. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và B'C' (như hình dưới). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và B'D' bằng

- A. $\sqrt{5}a$ B. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. C. $3a$. D. $\frac{a}{3}$.

Đáp án D.



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ với $A'(0;0;0)$; $B'(1;0;0)$; $D'(0;1;0)$; $A(0;0;1)$

Ta có: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$; $N\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$. Khi đó $\overline{B'D'} = (-1; 1; 0)$; $\overline{MN} = \left(\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

Suy ra $[B'D'; MN] = -\frac{1}{2}(2; 2; 1)$

Phương trình mặt phẳng chứa $B'D'$ và song song với MN là: $(P): 2x + 2y + z - 2 = 0$

$\Rightarrow d = d(N; (P)) = \frac{1}{3}$. Vậy $d = \frac{a}{3}$.

Cách 2: Gọi P là trung điểm của $C'D'$ suy ra $d = d(O; (MNP))$

Kẻ $OA \perp NP$; $OF \perp ME \Rightarrow d = OF = \frac{MO \cdot NE}{\sqrt{MO^2 + NE^2}}$ trong đó $MO = a$; $NE = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d = \frac{a}{3}$.

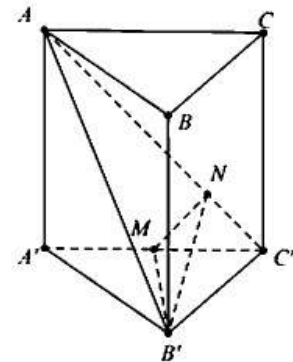
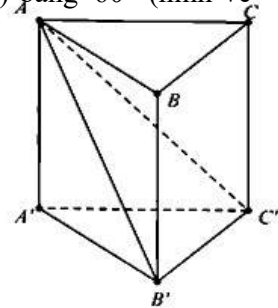
Câu 221. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° (hình vẽ bên). Thể tích của khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.



Đáp án A.

Dựng $B'M \perp AC' \Rightarrow B'M \perp (ACC'A')$

Dựng $MN \perp AC' \Rightarrow AC' \perp (MNB')$

Khi đó $\widehat{((AB'C'); (AC'A'))} = \widehat{MNB'} = 60^\circ$

Ta có: $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = \frac{B'M}{\tan \widehat{MNB'}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Mặt khác $\tan \widehat{AC'A'} = \frac{MN}{C'N} = \frac{AA'}{A'C'}$

Trong đó $MN = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $MC' = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C'N = \sqrt{C'M^2 - MN^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $AA' = a$

Thể tích lăng trụ $V = \frac{AB^2}{2} \cdot h = \frac{a^3}{2} \Rightarrow V_{B'.ACC'A'} = V - V_{B'.BAC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2}{3}V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 222. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=1, AC=2, AA'=3$ và $BAC=120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM=3B'M; CN=2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

- A. $\frac{9\sqrt{138}}{184}$ B. $\frac{3\sqrt{138}}{46}$ C. $\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$ D. $\frac{9\sqrt{138}}{46}$

Đáp án D.

Tam giác ABC có $\widehat{BAC}=120^\circ \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $BC = \sqrt{7}$.

Ta có $\frac{S_{\Delta A'BM}}{S_{\Delta A'BB'}} = \frac{BM}{BB'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_{N.A'BM}}{V_{N.A'B'B}} = \frac{3}{4}$ mà $V_{N.A'B'B} = V_{C'.A'B'B} = \frac{1}{2} V_{C'.ABB'A'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$

Suy ra $V_{N.A'BM} = \frac{3}{4} V_{N.A'B'B} = \frac{1}{4} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{4} \cdot AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Tam giác $A'BN$ có $A'B = \sqrt{10}, BN = \sqrt{11}$ và $A'N = \sqrt{5} \longrightarrow S_{\Delta A'BN} = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

Khi đó $V_{N.A'BM} = \frac{1}{3} \cdot d(M; (A'BN)) \cdot S_{\Delta A'BN} \Rightarrow d(M; (A'BN)) = \frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \frac{9\sqrt{138}}{46}$.

Câu 223. Một hình lăng trụ có 2018 mặt. Hỏi hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

- A. 6057. B. 6051. C. 6045. D. 6048.

Đáp án D.

Hình lăng trụ đã cho có 2 mặt đáy và 2016 mặt bên.

Do đó có 2016 cạnh bên và 2 mặt đáy, mỗi mặt đáy có 2016 cạnh.

Do đó hình lăng trụ đã cho có: $2016 \cdot 3 = 6048$ cạnh.

Câu 224. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 B. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì song song với đường thẳng kia.
 C. Cho hai đường thẳng song song với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
 D. Cho hai mặt phẳng song song với nhau, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Đáp án B

Hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì song song hoặc chứa đường thẳng kia.

với SC và chia khối chóp S.ABCD thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có chứa điểm S và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tìm tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

Đáp án C.

Vì $SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM, DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp MA$

$\Rightarrow AM \perp (SDC) \Rightarrow AM \perp SD$

ΔSAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

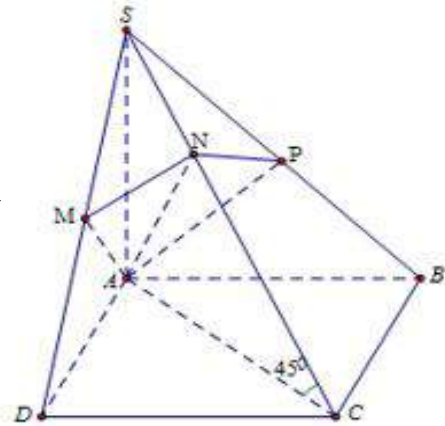
$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Ta có: $SA^2 = SM \cdot SD \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$;

$SA^2 = SN \cdot SC \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}$

Do đó $\frac{V_{SAMN}}{V_{SADC}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$

Do tính chất đối xứng $\Rightarrow \frac{V_{SAMNP}}{V_{SABCD}} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{SAMNP}}{V_{ABCDMNP}} = \frac{1}{2}$



Câu 229. Trong không gian, cho hình (H) gồm mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ đi qua tâm I của mặt cầu (S). Số mặt phẳng đối xứng của hình (H) là:

- A. 2 B. 1 C. Vô số D. 3

Đáp án C.

Ta có do (H) là mặt cầu nên có vô số mặt phẳng đối xứng.

Câu 230. Trong không gian, cho hai đường thẳng l, Δ vuông góc và cắt nhau tại O. Hình tròn xoay khi quay đường thẳng l quanh trục Δ là:

- A. Mặt phẳng B. Mặt trụ tròn xoay C. Mặt cầu D. Đường thẳng

Đáp án A. Khi quay đường thẳng l quanh trục Δ ta được một mặt phẳng

Câu 231. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'A, BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{3}a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

Đáp án D.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC

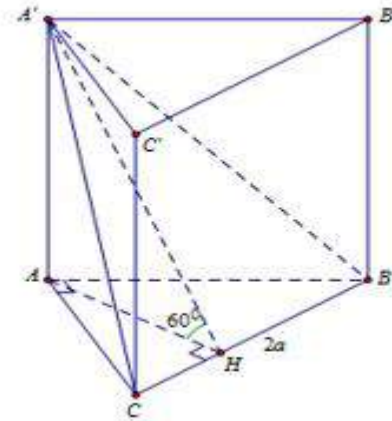
$$\Rightarrow d(A'A; BC) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A'A = AH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' là:

$$V = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$$



Câu 232. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a ($a > 0$). Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 45° . Biết $SB = a$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) nằm trong hình vuông ABCD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

A. $\frac{2a^3}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

C. $\frac{a^3}{4}$

D. $\frac{2a^3}{9}$

Đáp án D.

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABCD), I và J lần lượt là hình chiếu của H lên CD và BC

$$\Rightarrow IH = HJ (= SH) \Rightarrow HICJ \text{ là hình vuông.}$$

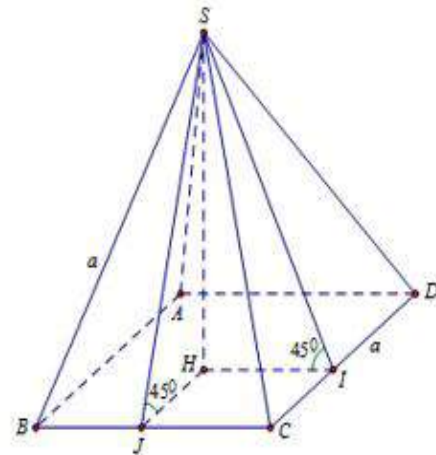
$$\text{Đặt } BJ = x \Rightarrow CJ = a - x = HJ$$

$$\text{Ta có: } BS^2 = BJ^2 + SJ^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2HJ^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2(a-x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = \frac{a}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì H nằm trong hình vuông ABCD nên } x = \frac{a}{3} \Rightarrow SH = HJ = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp S.ABCD là: } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a^2 = \frac{2a^3}{9}$$



Câu 233. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm A, N, M, B.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

B. $2a\sqrt{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

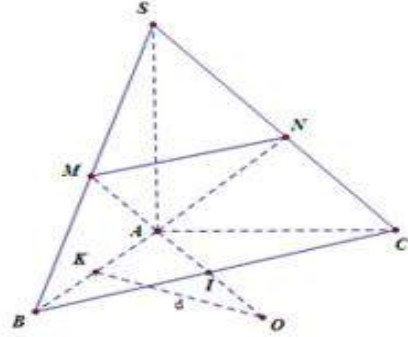
D. $a\sqrt{3}$

Đáp án A.

Gọi I là trung điểm của BC. Do tính chất đối xứng dễ thấy $MN \parallel BC, SM = SN$ khi đó (SAI) là mặt phẳng trung trực của MN và BC

Từ trung điểm K của AB ta dựng đường thẳng qua K và vuông góc với AB đường thẳng này cắt mặt phẳng (SAI) tại O suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối ABCNM.

$$\text{Khi đó } OA = R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{2a}{2 \sin 120^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



Câu 234. Trong không gian mặt cầu (S) tiếp xúc với 6 mặt của một hình lập phương cạnh a, thể tích khối cầu (S) bằng

- A. $V = \frac{\pi a^3}{24}$ B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$ C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$ D. $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

Đáp án C.

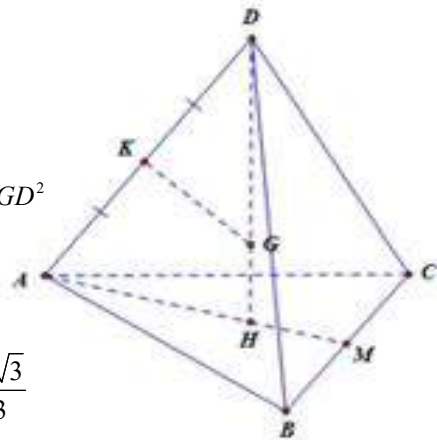
Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \frac{a}{2}$. Thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$

Câu 235. Cho tứ diện ABCD đều có cạnh bằng a và trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{11a^2}{2}$ là mặt cầu.

- A. $S(G; a)$ B. $S(G; 2a)$ C. $S(B; a)$ D. $S(C; 2a)$

Đáp án A.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$
 $= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2$
 $= 4MG^2 + \overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$
 $= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{11a^2}{2}$



Mặt khác xét tứ diện đều hình vẽ ta có: $AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \Delta DGK \sim \Delta DAH \Rightarrow \frac{DG}{DA} = \frac{DK}{DH}$$

Suy ra $GD = \frac{DA^2}{2DH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = GB = GC = GD \Rightarrow MG^2 = a^2 \Rightarrow MG = a$. Vậy $S(G; a)$

Câu 236. Cho hình chóp đều n cạnh ($n \geq 3$). Cho biết bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là R và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° , thể tích khối chóp bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^3$. Tìm n

- A. $n = 4$ B. $n = 8$ C. $n = 10$ D. $n = 6$

Đáp án D.

Giả sử đáy là đa giác đều $A_1A_2\dots A_n, O$ là tâm của đáy, chóp có chiều cao là SH.

Gọi I là trung điểm của A_1A_2 .

$$\text{Ta có: } IA_2 = R \sin \frac{\pi}{n}, OI = R \cos \frac{\pi}{n} \Rightarrow SO = OI \tan 60^\circ = R \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{3} = R \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \text{diện tích đáy là: } S = \frac{3V}{SO} = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} R^3}{R \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{9R^2}{4 \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$\text{Mà } S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{9R^2}{4 \cos \frac{\pi}{n}} = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{9}{2}$$

Thử các giá trị của n ở các phương án $\Rightarrow n = 6$

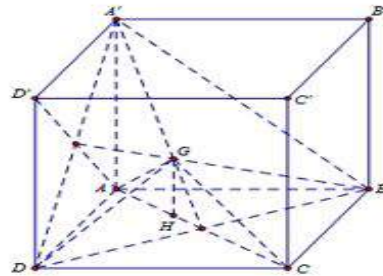
Câu 237. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Tìm thể tích khối tứ diện $GABD$

- A. $\frac{a^3}{18}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{9}$ D. $\frac{a^3}{24}$

Đáp án A.

Thể tích khối tứ diện $GABD$ là:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD} GH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} A'A = \frac{1}{18} a^2 a = \frac{a^3}{18}$$



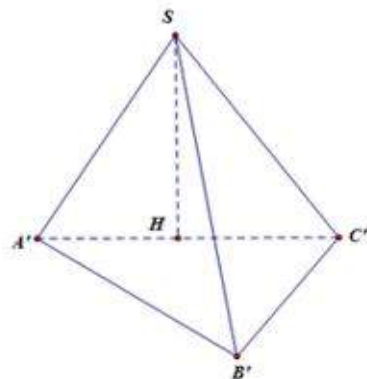
Câu 238. Tìm thể tích của hình chóp $S.ABC$ biết $SA = a, SB = a\sqrt{2}, SC = 2a$ và có $\widehat{BSA} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 60^\circ$

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3}{3}$

Đáp án D.

Trên SA, SB, SC ta lần lượt thấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = SB' = SC' = 1$. Khi đó $A'B' = 1; B'C' = \sqrt{2}$;

$A'C' = \sqrt{SA'^2 + SC'^2 - 2SA'SB' \cos \widehat{CSA}} = \sqrt{3}$ nên tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' . Mặt khác $SA' = SB' = SC' = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S xuống $(A'B'C')$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ khi đó H là trung điểm của $A'C'$



Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 - A'H^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. Suy ra $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

Mặt khác: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{a^3}{3}$

Câu 239. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a với $SA = \frac{a}{2}$, $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, BC . Thể tích tứ diện $K.SDC$ có giá trị là:

- A. $V = \frac{a^3}{4}$ B. $V = \frac{a^3}{16}$ C. $V = \frac{a^3}{8}$ D. $V = \frac{a^3}{32}$

Đáp án D.

Từ giả thiết ta có $AB = a$, $SA = \frac{a}{2}$, $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Nên $\triangle ASB$ vuông tại S

$\Rightarrow SH = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle SAH$ đều.

Gọi M là trung điểm của AH thì $SM \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Vậy $V_{KSDC} = V_{S.KCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{\triangle KCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle BAD}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a^3}{32}$ (đvtt)

Bình luận: Công thức cần nhớ:

➤ **Thể tích hình chóp:** $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

S: Diện tích đáy

h: Độ dài đường cao.

➤ **Thể tích khối lăng trụ**

$V = S \cdot h$

S: Diện tích đáy

h: Độ dài đường cao.

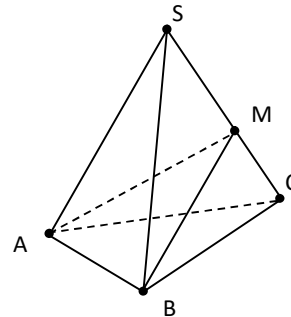
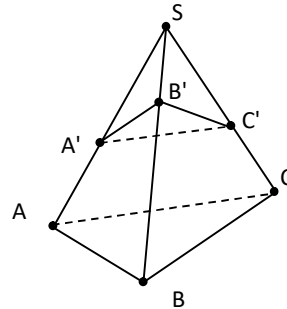
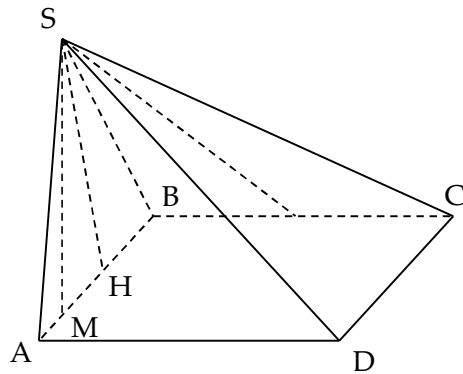
➤ **Tỉ số thể tích:**

Cho hình chóp $S.ABC$:

* $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$

Suy ra $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC \Rightarrow \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'}$

* $M \in SC$ ta có: $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SM}{SC}$.



Câu 240. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BCD} = 120^\circ$ và

$AA' = \frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $ABCD$ trùng với giao điểm của AC

và BD . Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$:

A. $V = 12a^3$

B. $V = 3a^3$

C. $V = 9a^3$

D. $V = 6a^3$

Đáp án B.

Gọi $O = AC \cap BD$.

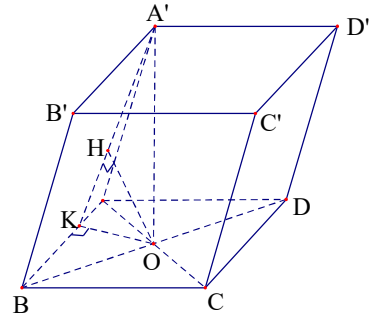
Từ giả thuyết suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

$$S_{ABCD} = BC \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Vì $\widehat{BCD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$$\Rightarrow AC = a \Rightarrow A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{3}a.$$

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3a^3$.



Câu 241. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

Chọn A

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc AA_1H là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$

Theo giả thiết thì góc AA_1H bằng 30° .

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a$, $AA_1H = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$

Xét AHA_1 có $AA_1 = a$, góc $AA_1H = 30^\circ \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

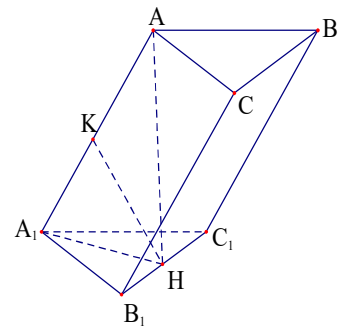
Do $A_1B_1C_1$ đều cạnh a , H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra A_1H vuông góc B_1C_1 .

$AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1 .

Ta có $AA_1 \cdot HK = A_1H \cdot AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H \cdot AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Câu 242. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{9}$

B. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Đáp án C.

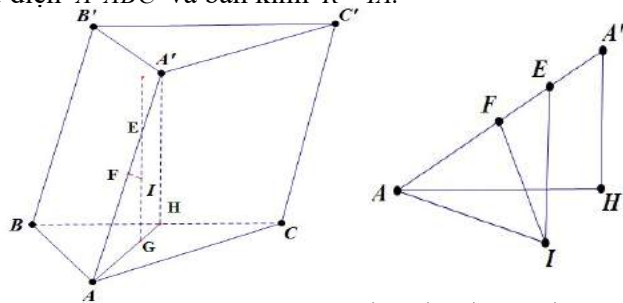
Tìm bán kính mặt cầu: Ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$.

- Gọi G là tâm của tam giác ABC , qua G kẻ đường thẳng $d \parallel A'H$ cắt AA' tại E .
- Gọi F là trung điểm AA' , trong mp($AA'H$) kẻ đường thẳng trung trực của AA' cắt (d) tại $I \Rightarrow I$ là **tâm mặt cầu** ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ và bán kính $R = IA$.
Ta có: Góc AEI bằng 60° ,

$$EF = \frac{1}{6} AA' = \frac{a}{6}$$

$$IF = EF \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \sqrt{AF^2 + FI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Câu 243. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $(SAB) \perp (ABCD)$. H là trung điểm của AB , $SH = HC$, $SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị của $\tan \alpha$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D. $\sqrt{2}$

Đáp án A.

Ta có $AH = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$, $SA = AB = a$, $SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Có $SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = SH^2 \Rightarrow \Delta SAH \Rightarrow SA \perp AB$.

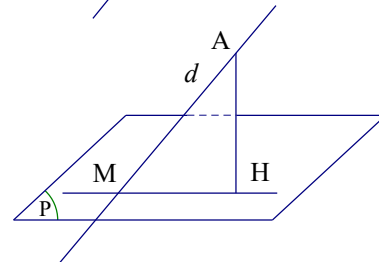
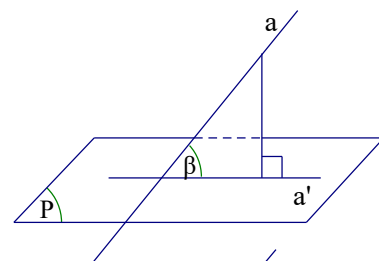
$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$ và $AC = hc(SC; (ABCD))$. Ta có $(\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA}$, $\tan \widehat{SCA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bình luận: Bài toán này thực chất là tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Cách tìm:

- Tìm điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng
- Tìm hình chiếu của một điểm thứ 2 trên mặt phẳng từ đó tìm được hình chiếu của đường thẳng và tìm được góc.
Cách tìm hình chiếu: Nếu có đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) . Kẻ MH song song với đường thẳng d thì H là hình chiếu vuông góc của M trên (P)

Nếu không có sẵn đường thẳng vuông góc:

- Chọn mặt phẳng (Q) chứa điểm M sao cho mp (Q) vuông góc với mp (P)
- Từ M kẻ MH vuông góc với giao tuyến a thì H là hình chiếu vuông góc của M trên (P)



Câu 244. Cho mặt nón tròn xoay đỉnh O có góc ở đỉnh bằng 60° . Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục của mặt nón tại H , biết $OH = a$. Khi đó, (P) cắt mặt nón theo đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Đáp án D.

Nếu điểm M nằm trên đường tròn giao tuyến thì OHM là tam giác vuông tại H, và góc tại đỉnh O bằng 30° . Vậy bán kính đường tròn là $R = HM = OH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 245. Gọi l và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện. Hỏi rằng trong số các tứ diện, tứ diện nào thì tỉ số $\frac{l}{R}$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó?

- A. Tứ diện vuông và $\frac{l}{R} = 4\sqrt{3}$ B. Tứ diện vuông và $\frac{l}{R} = 4\sqrt{6}$
 C. Tứ diện đều và $\frac{l}{R} = 4\sqrt{3}$ D. Tứ diện đều và $\frac{l}{R} = 4\sqrt{6}$

Đáp án D.

Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$I^2 = (BC + CA + AB + DA + DB + DC)^2 \leq 6(BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2) \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có:

$$\begin{aligned} & BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2 \\ &= (\overline{OC} - \overline{OB})^2 + (\overline{OA} - \overline{OC})^2 + (\overline{OB} - \overline{OA})^2 + (\overline{OA} - \overline{OD})^2 + (\overline{OB} - \overline{OD})^2 + (\overline{OC} - \overline{OD})^2 \\ &= 16R^2 - (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})^2 = 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta được $I^2 \leq 6 \cdot 16R^2$ hay $\frac{l}{R} \leq 4\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} BC = CA = AB = DA = DB = DC \\ G \equiv O \end{cases} \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện đều.

Câu 246. Hình tứ diện đều có số mặt phẳng đối xứng là:

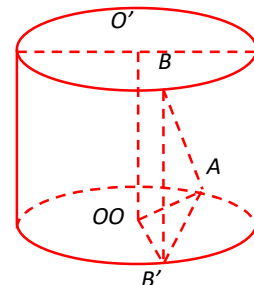
- A. 3. B. 6. C. 4. D.0.

Chọn B.

Câu 247. Cho hình trụ T có trục OO' . Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho $AB = a$ và đường thẳng AB tạo với đáy của hình trụ góc 60° . Gọi hình chiếu của B trên mặt phẳng đáy chứa đường tròn (O) là B' . Biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và OO' .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.
 C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{16}$.

Chọn B.



+ Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABB')$

+ Ta có: $OO' \parallel BB' \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABB')) = d(O, (ABB')) = OH$

+ Xét tam giác ABB' vuông tại B' có: $AB' = AB \cos \widehat{BAB'} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$

+ Xét tam giác OAH vuông tại H có: $OH = AH \cdot \cot \widehat{AOH} = \frac{AB'}{2} \cot \frac{AOB'}{2} = \frac{a}{4} \cot 60$

Câu 248. Các trung điểm của các cạnh của một tứ diện đều cạnh a là các đỉnh của khối đa diện đều. Tính thể tích V của khối đa diện đều đó.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

Chọn C.

+ Gọi G là trọng tâm tam giác đều BCD $\Rightarrow AG \perp (BCD)$

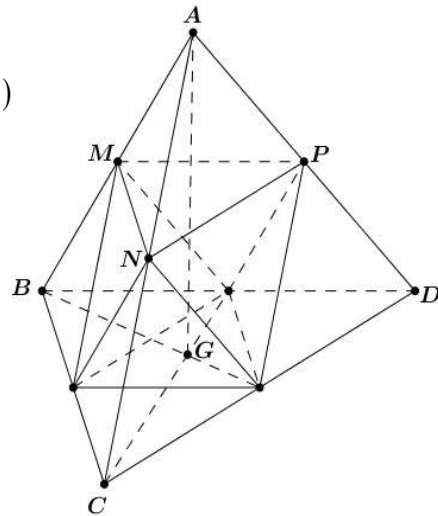
+ Ta có: $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

+ Khi đó: $V_{A.BCD} = \frac{1}{3} AG \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

+ Lại có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$V_{A.MNP} = \frac{1}{8} V_{A.BCD} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{96}$

+ Mặt khác: $V = V_{A.BCD} - 4 \cdot V_{A.MNP} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{96} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$



Câu 249. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a, AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

B. $R = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

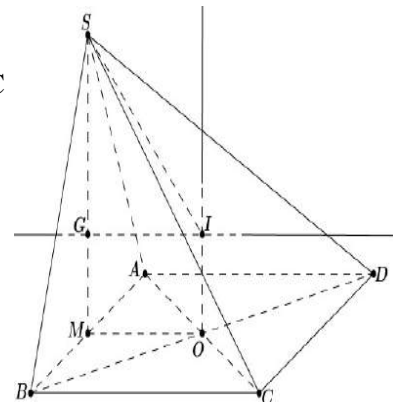
Chọn C.

Gọi M là trung điểm AB; G là trọng tâm tam giác đều ABC

Kẻ $Gx \perp (SAB)$ và $Oy \perp (ABCD)$. Gọi $I = Gx \cap Oy$

Theo đề ra, ta có: $SM \perp (ABCD)$

Vì $IO \perp (ABCD) \Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)



$$\text{Vì } IG \perp (SAB) \Rightarrow IA = IB = IS \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$$

Do đó suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp S.ABCD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SG = \frac{2}{3} SM = \frac{3}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ IG = MO = \frac{BC}{2} = a \end{cases} \Rightarrow IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp chóp S.ABCD có bán kính $R = IS = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 250. Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD. Mặt phẳng chứa AB, đi qua điểm C' nằm trên cạnh SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Chọn C.

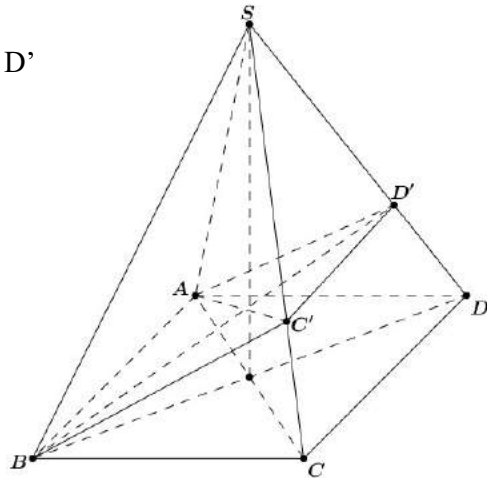
+ Mặt phẳng (P) chứa AB cắt SC tại C', cắt SD tại D'

$$\Rightarrow C'D' \parallel CD$$

+ Theo đề ra thì: $\frac{V_{S.ABC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$

+ Đặt $x = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} \Rightarrow x \in (0;1)$

+ Khi đó:
$$\begin{cases} \frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = x \\ \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = x^2 \end{cases}$$



+ Suy ra: $x + x^2 = \frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.ABC'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABC}} = \frac{2V_{S.ABCD'}}{V_{S.ABCD}} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 251. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B.

$AB = BC = a; AD = 2a; SA \perp (ABCD)$. Nhận định nào sau đây đúng

A. tam giác SCD vuông

B. tam giác SCD cân

C. tam giác SCD đều

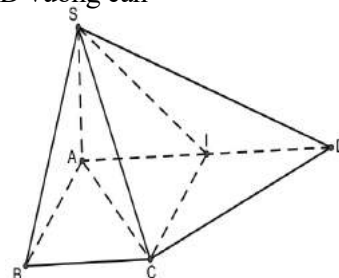
D. tam giác SCD vuông cân

Chọn A.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD \quad (1)$

Gọi I là trung điểm của AD. Tứ giác ABCI là hình vuông.

Do đó $\widehat{ACI} = 45^\circ (*)$



Mặt khác, tam giác CID là tam giác vuông cân tại I nên $\widehat{BCI} = 45$ (**)

Từ *, ** $\Rightarrow \widehat{ACD} = 90 \Rightarrow AC \perp CD$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD$ vuông.

Câu 252. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}, BC = 3a, \widehat{ACB} = 30$.
Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm H trên cạnh BC sao cho $BC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{4a^3}{9}$ B. $\frac{19a^3}{4}$ C. $\frac{9a^3}{4}$ D. $\frac{4a^3}{19}$

Chọn C.

Từ giả thiết, áp dụng định lí cosin trong tam giác AHC ta tính được $AH = a$.

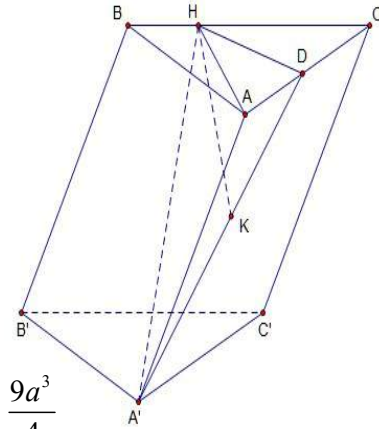
Do $\begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'AH) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

góc $A'AH = 60^\circ$

Do $\Delta AA'H$ vuông tại H

suy ra $A'H = d(A'; (ABC)) = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot d(A'; (ABC)) = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{4}$



Câu 253. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm của $A'C'$. biết rằng cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

- A. $\frac{9a^3}{4}$ B. a^3 C. $\frac{9a^3}{2}$ D. $\frac{3a^3}{2}$

Chọn A.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác $A'B'D'$ suy ra $\widehat{B'A'D'} = 120^\circ$.

Do đó $A'B'C'$, $A'C'D'$ là các tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$.

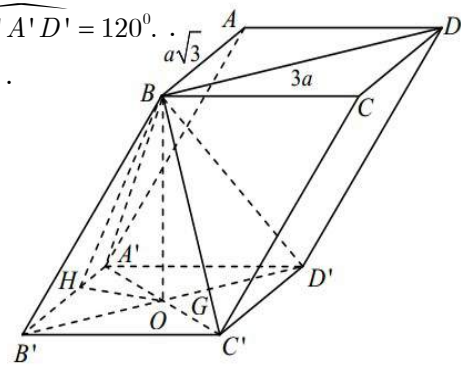
Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, Ta có $BO \perp (A'B'C'D')$.

Kẻ $OH \perp A'B'$ tại H , suy ra $A'B' \perp (BHO)$.

Do đó $((ABCD), (CDD'C')) = \widehat{BHO}$

Từ $\cos \widehat{BHO} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BHO} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BO = HO \cdot \tan \widehat{BHO} = A'O \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{9a^3}{4}.$$

Câu 254. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$. Biết rằng $((ABC), (A'B'C')) = 60^\circ$ và hình chiếu A lên $(A'B'C')$ là trung điểm H của $A'B'$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AHB'C'$.

- A. $\frac{a\sqrt{86}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{82}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{68}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{62}}{8}$

Chọn A.

* **Phương pháp:** Với hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, ta tìm tâm O đường tròn ngoại tiếp đáy, dựng đường song song với chiều cao và cắt trung trực của chiều cao tại tâm

I của hình cầu cần tìm $R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (r = OA)^2}$.

* **Lời giải:**

Ta có: $((ABC), (A'B'C')) = ((A'B'C'), (A'B'C'))$

Giao tuyến của chúng là $B'C'$. Từ H dựng HK vuông góc với $B'C'$ thì ta có:

$$B'C' \perp (AHK) \rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = \widehat{AKH} = 60^\circ$$

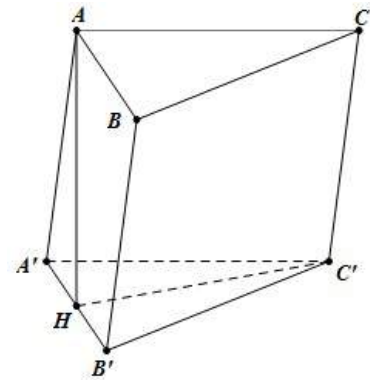
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3} \rightarrow \sin ABC = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{HK}{HB}$$

$$\rightarrow HK = \frac{a}{\sqrt{6}} HC = \sqrt{AH^2 + AC^2} = \frac{3a}{2}$$

Ta gọi O của đường tròn ngoại tiếp tam giác $HB'C'$ thì áp dụng:

$$S = \frac{abc}{4R'} \rightarrow S_{HB'C'} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{a}{\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{2}}{4R'} \rightarrow R' = \frac{3a}{4}$$

$$\rightarrow R = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{82}}{4}$$



Câu 255. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45° . Thể tích của hình trụ bằng:

- A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$ B. $\frac{\pi a^3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$ D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$

Chọn A.

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó $OM \perp AB$ và $O'N \perp CD$.

Giả sử I là giao điểm của MN và OO' .

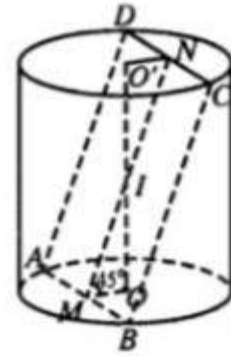
Đặt $R = OA$ và $h = OO'$

Khi đó tam giác IOM vuông cân tại O nên

$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{Ta có } R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$$



Câu 256. Hình bên cho ta hình ảnh của một đồng hồ cát với các kích thước kèm theo $OA = OB$. Khi đó tỉ số tổng thể tích của hai hình nón (V_n) và thể tích hình trụ (V_t) bằng

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{5}$

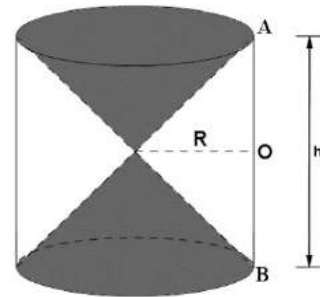
D.

Chọn D.

Chiều cao của hình nón là $\frac{h}{2}$

$$\text{Tổng thể tích của 2 hình nón là } V_{\text{nón}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\text{Thể tích của hình trụ } V_t = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{V_n}{V_t} = \frac{1}{3}$$



Câu 257. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$

B. $V = \frac{125\pi}{6}$

C. $V = \frac{32\pi}{3}$

D. $V = \frac{108\pi}{3}$

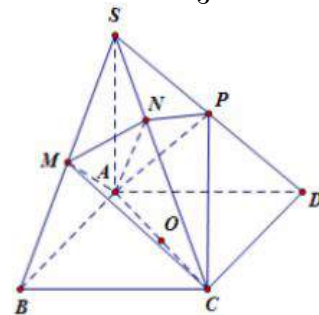
Chọn C.

Ta có: $SC \perp AM$ mặt khác $AM \perp SB$ do đó $AM \perp MC$

Như vậy $\widehat{AMC} = 90^\circ$ tương tự $\widehat{APC} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{ANC} = 90^\circ$ vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$ là trung điểm của AC suy ra

$$R = \frac{AC}{2} = 2 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi$$



Câu 258. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2MS$. Biết $AB = 3, BC = 3\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

B. $V = \frac{9\sqrt{6}}{4}$

C. $V = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

D. $V = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Chọn B.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (do ΔSAB đều).

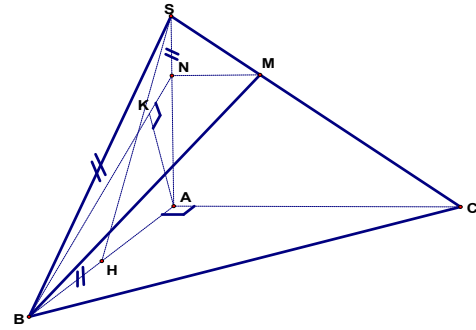
Do $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Do ΔABC đều cạnh bằng 3

$$\text{nên } SH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AB \cdot AC = \frac{3^3 \sqrt{6}}{12} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$$



Câu 259. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua M song song với AC, SB và cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để diện tích thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a}{4}$.

B. $x = \frac{a}{3}$.

C. $x = \frac{a}{2}$.

D.

Chọn C.

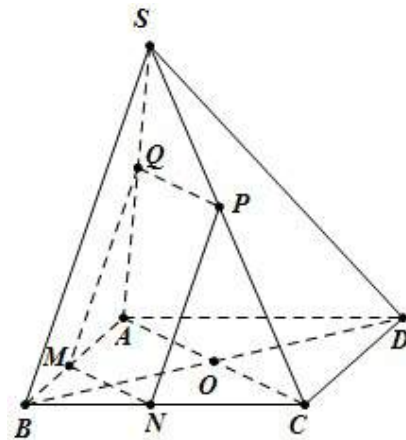
Ta có: $MN \parallel AC \Rightarrow MN = \frac{BM}{BA} \cdot AC = (a-x)\sqrt{2}$

Tam giác SAB có $MQ \parallel SB \Rightarrow MQ = \frac{AM}{BA} \cdot SB = \frac{bx}{a}$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a} (a-x)x$$

Ta có: $(a-x)x \leq \frac{(a-x+x)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

Do đó S_{MNPQ} max khi $a-x = x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$



Câu 260. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được một khối đá có hình tứ diện MNPQ. Biết rằng $MN = 60cm$ và thể tích của khối tứ diện MNPQ bằng $30dm^3$. Hãy tính thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)

A. $111,4dm^3$

B. $121,3dm^3$

C. $101,3dm^3$

D. $141,3dm^3$

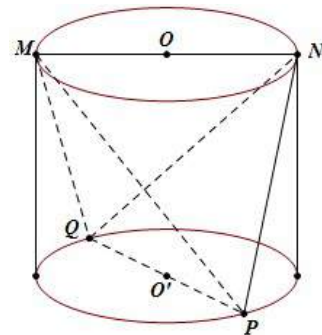
Chọn A

Áp dụng công thức diện tích tứ diện:

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN \cdot PQ \cdot d(MN, PQ) \cdot \sin(\widehat{(MN, PQ)}) = 3000cm^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot 60^2 \cdot h = 30000 \Rightarrow h = 50(cm)$$

Khi đó lượng bị cắt bỏ là $V = V_T - V_{MNPQ} = \pi r^2 h - 30 = 111,4dm^3$



Câu 261. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a .

- A. $S = \frac{17\pi a^2}{13}$ B. $\frac{7\pi a^2}{3}$ C. $17\pi a^2$ D. $S = 7\pi a^2$

Chọn B.

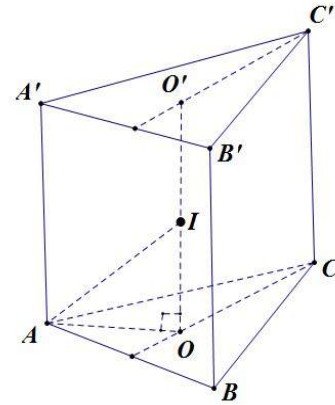
Thể tích lăng trụ là: $V = AA'.S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$

Khi đó tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là trung điểm I của OO' .

Mặt cầu này có bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$$



Câu 262. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S , đáy là một hình tròn tâm O bán kính R , chiều cao của hình nón bằng $2R$. Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $IO = 2R$. Giả sử A là điểm trên đường tròn (O) sao cho $OA \perp OI$.

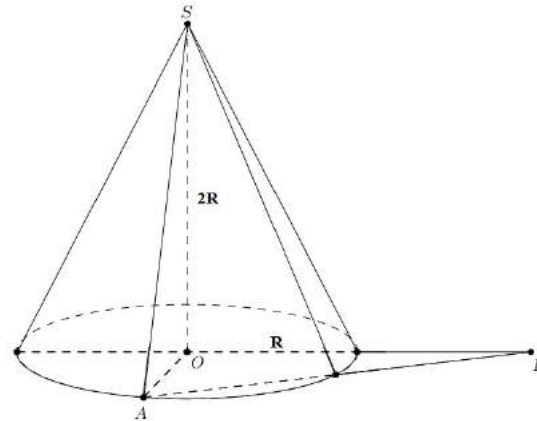
Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

- A. $\pi R^2\sqrt{2}$ B. $\pi R^2\sqrt{3}$
C. $\pi R^2 2\sqrt{5}$ D. $\pi R^2\sqrt{5}$

Chọn D.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{3}, \quad S_{xq} = \pi Rl,$$

trong đó $l = SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5} \Rightarrow S_{xq} = \pi R \cdot R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$



Câu 263. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB = 2AD = 2CD$, SA vuông góc với đáy ($ABCD$). Góc giữa SC và đáy bằng 60° . Biết khoảng

cách từ B đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{42}}{7}$, khi đó tỉ số $\frac{V_{S.ABCD}}{a^3}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

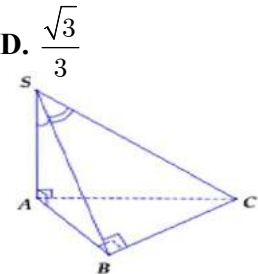
Đặt $AD = x$ thì $CD = x, AB = 2x$.

1. $SA \perp (ABCD), BA \parallel CD$ nên $k = 1$.

2. $d(B, CD) = AD = x$.

3. $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = x\sqrt{2} \Rightarrow h = AC \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{6}$.

$$\frac{1}{[d(B, SCD)]^2} = \frac{1}{[d(B, CD)]^2} + \frac{k^2}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6x^2} = \frac{7}{6x^2} \Rightarrow d(B, SCD) = \frac{x\sqrt{42}}{7} = \frac{a\sqrt{42}}{7} \Rightarrow x = a$$



$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot S_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} x \cdot (x + 2x) = \frac{x^3\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \text{Chọn C.}$$

Câu 264. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa SB và AD bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{4}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Chọn B.

1. $d(A, BC) = AB = a$

2. H là trung điểm AB nên $k = \frac{1}{2}$.

3. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{1}{[d(SB, AD)]^2} = \frac{1}{[d(B, AD)]^2} + \frac{k^2}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow d(SB, AD) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 265. Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có BC = $\sqrt{3}a$, SA = $\sqrt{2}a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

- A. $a\sqrt{5}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_d = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \\ R = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \frac{(\sqrt{2}a)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

với l là độ dài cạnh huyền của đáy, R_d là bán kính đáy của hình chóp, h là chiều cao, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. \Rightarrow **Chọn B.**

Câu 266. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều có cạnh bằng a, cạnh bên tạo với đáy góc 30° . Biết hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Chọn D.

Gọi H là trung điểm BC

$$\Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'AH} = 30^\circ$$

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{2}$

Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$

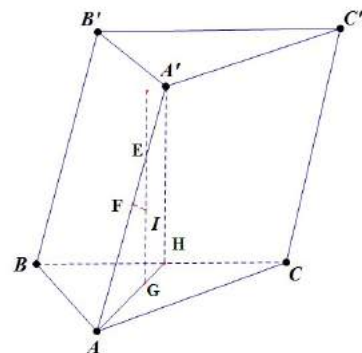
Gọi G là tâm của tam giác ABC, qua G kẻ đt (d) //

$A'H$ cắt AA' tại E

Gọi F là trung điểm AA' , trong mp(AA'H) kẻ đường

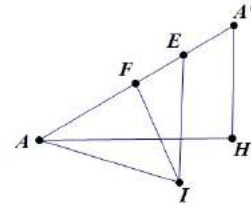
trung trực của AA' cắt (d) tại I \Rightarrow I là tâm mặt cầu

ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ và bán kính $R = IA$.



Ta có: $\widehat{AEI} = 60^\circ; EF = \frac{1}{6} AA' = \frac{a}{6}$.

$$IF = EF \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow R = \sqrt{AF^2 + FI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Câu 267. Diện tích và chu vi của một hình chữ nhật $ABCD$ ($AB > AD$) theo thứ tự là $2a^2$ và $6a$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng, ta được một hình trụ. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ này.

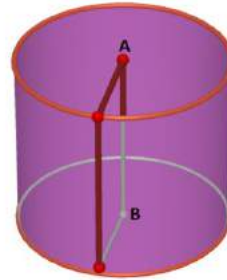
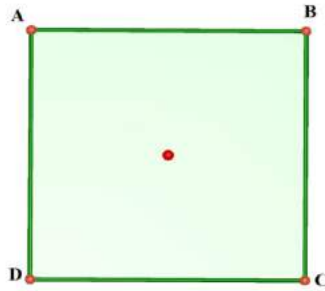
A. $2\pi a^3; 4\pi a^2$

B. $4\pi a^3; 4\pi a^2$

C. $2\pi a^3; 2\pi a^2$

D. $4\pi a^3; 2\pi a^2$

Chọn A.



Nếu ta xem độ dài của các cạnh AB và AD như là các ẩn thì chúng sẽ là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

Giải phương trình bậc hai này, đối chiếu với điều kiện của đề bài, ta có

$$AB = 2a \text{ và } AD = a$$

Thể tích hình trụ: $V = \pi AD^2 \cdot AB = 2\pi a^3$

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi AD \cdot AB = 4\pi a^2$

Câu 268. Một chiếc cốc dạng hình nón chứa đầy rượu. **Trương Phi** uống một lượng rượu nên “chiều cao” của rượu còn lại trong cốc bằng một nửa chiều cao ban đầu. Hỏi **Trương Phi** đã uống bao nhiêu phần rượu trong cốc?

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

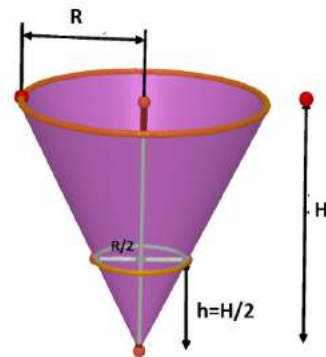
Chọn B.

Trả lời: $V \text{ nón} = V \text{ ban đầu} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi R^2$;

$$V \text{ sau} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Tỉ lệ thể tích: $V \text{ sau} : V \text{ đầu} = \frac{1}{8}$

Trương Phi đã uống $\frac{7}{8}$ lượng rượu trong cốc.



Đề ý rằng lượng rượu còn lại sau khi uống là $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ (Thể tích ban đầu)

Câu 269. Xét các hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = BC = a$. Giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3}{12}$

B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{a^3}{4}$

D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Cho $a = 1$ và đặt $x = \widehat{ABC}$ ($0^\circ < x < 180^\circ$), ta có diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \sin x$

Và theo định lí hàm cosin $AC = \sqrt{2(1 - \cos x)}$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , bán kính đường tròn này là:

$$R = OB = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos x)}}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{2} \sin x}$$

Vì S cách đều A, B, C nên $SO \perp (ABC)$ và $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x + \cos x - 1}{2 \sin^2 x}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ cho bởi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin x \cdot \sqrt{\frac{2 \sin^2 x + \cos x - 1}{2 \sin^2 x}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2 x + \cos x - 1} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{-\left(\sqrt{2} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{8}} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{1}{8}. \text{ Vậy thể tích lớn nhất bằng } \frac{a^3}{8} \end{aligned}$$

• **Cách khác:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{S.ABC} &= \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ASB} - \cos^2 \widehat{BSC} - \cos^2 \widehat{CSA} + 2 \cos \widehat{ASB} \cos \widehat{BSC} \cos \widehat{CSA}} \\ &= \frac{a^3}{6} \sqrt{1 - \cos^2 60 - \cos^2 60 - \cos^2 \widehat{CSA} + 2 \cos 60 \cdot \cos 60 \cdot \cos \widehat{CSA}} \\ &= \frac{a^3}{6} \sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2 \widehat{CSA} + \frac{1}{2} \cos \widehat{CSA}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} \sqrt{-2 \cos^2 \widehat{CSA} + \cos \widehat{CSA} + 1} \leq \frac{a^3}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{a^3}{8} \end{aligned}$$

Do đó thể tích lớn nhất của hình chóp là $\frac{a^3}{8}$

Câu 270. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I . Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, góc $\angle ACB = 30^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$

B. $\frac{a^3}{3}$

C. $\frac{a^3}{6}$

D. $\frac{4a^3}{3}$

Chọn B.

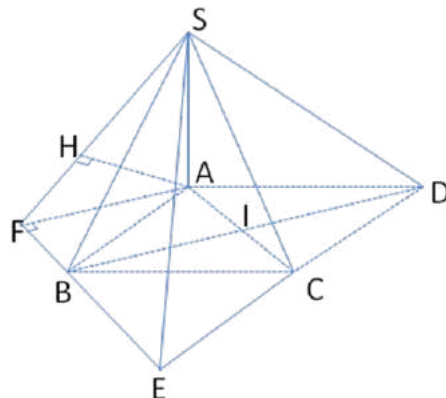
Ta có $AC = 2AI = 2R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $BC = AC \cdot \cos 30^\circ = a$;

$AB = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$.



Câu 271. Một cái rổ (trong môn thể thao bóng rổ) dạng một hình trụ đứng, bán kính đường tròn đáy là r (cm), chiều cao $2r$ (cm), người đặt hai quả bóng như hình. Như vậy diện tích toàn bộ của rổ và phần còn lại nhô ra của 2 quả cầu là bao nhiêu. Biết rằng mỗi quả bóng bị nhô ra một nửa.

A. $4\pi r^2 \text{ cm}^2$

B. $6\pi r^2 \text{ cm}^2$

C. $8\pi r^2 \text{ cm}^2$

D. $10\pi r^2 \text{ cm}^2$

Chọn C.

Do hình vẽ ta thấy diện tích toàn bộ khối trên = diện tích $R\hat{O}$ + 2 nửa cầu

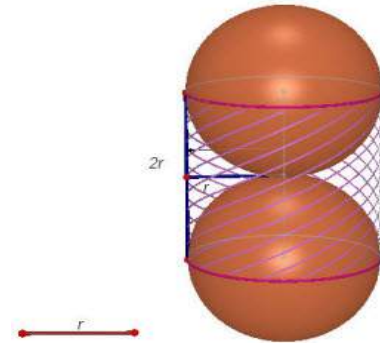
Cần tính bằng diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao $2r$ (cm) : $S_1 = h.2\pi.r = 4\pi.r^2$

Bán kính đường tròn đáy r (cm)

Diện tích mặt cầu bán kính r (cm).

Diện tích của quả cầu là : $4\pi.r^2$

Vậy tổng thể tích là: $8\pi.r^2$



Câu 272. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Gọi I là trung điểm của AB ; J là trung điểm của CD . Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt DA và CB kéo dài tại M, N . Các nhận định sau đây.

(1) Tam giác SIJ là tam giác có \widehat{SIJ} tù.

(2) $\sin \widehat{SIH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) \widehat{MSN} là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

(4) $\cos \widehat{MSN} = \frac{1}{3}$

Chọn đáp án **đúng**:

A. (1), (2) đúng, (3) sai

B. (1), (2), (3) đúng (4) sai

C. (3), (4) đúng (1) sai

D. (1), (2), (3), (4) đúng

Chọn D.

Từ giả thiết ta có $IJ = a$; $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có

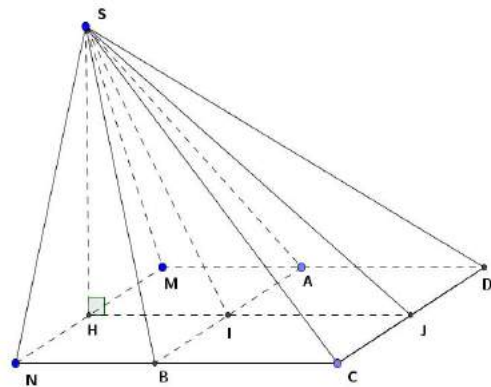
$$\begin{aligned} \cos(\widehat{SIJ}) &= \frac{IJ^2 + IS^2 - SJ^2}{2.IJ.IS} \\ &= \frac{a^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \end{aligned}$$

Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có \widehat{SIJ} tù.

Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S , ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $\widehat{H} = 90^\circ$; góc I nhọn và $\cos \widehat{I} = \cos \widehat{SIH}$

$$= -\cos \widehat{SIJ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\widehat{SIJ} \text{ và } \widehat{SIH} \text{ kề bù})$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{SIH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Từ giả thiết giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d qua S và song song với AD . Theo định lý ba đường vuông góc ta có $SN \perp BC, SM \perp AD \Rightarrow SM \perp d; SN \perp d \Rightarrow \widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng. (SBC) và (SAD), $MN = AB = a$.

Xét tam giác HSM vuông tại H có

$$SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HM = \frac{a}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SN$$

Theo định lý cosin cho tam giác SMN cân tại S có

$$\cos \widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 273. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a .

A. $\frac{5\pi a^2}{3}$

B. $\frac{7\pi a^2}{3}$

C. $3\pi a^2$

D. $\frac{11\pi a^2}{3}$

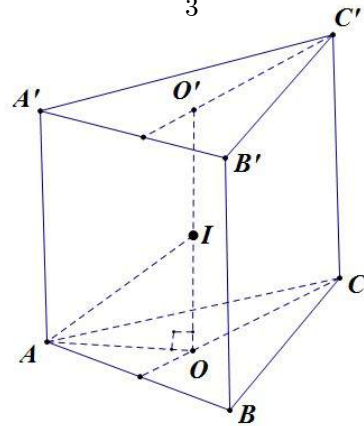
Chọn B.

Thể tích lăng trụ là:

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ khi đó tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là trung điểm I của OO' . Mặt cầu này có bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$$



Câu 274. Một vật thể có dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy và độ dài của nó đều bằng $2r$ (cm). Người ta khoan một lỗ cũng có dạng hình trụ như hình, có bán kính đáy và độ sâu đều bằng r (cm). Thể tích phần vật thể còn lại (tính theo cm^3) là:

A. $4\pi r^3$

B. $7\pi r^3$

C. $8\pi r^3$

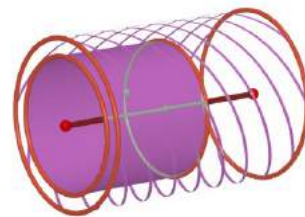
D. $9\pi r^3$

Chọn B.

Thể tích vật thể hình trụ là $\pi \cdot (2r)^2 \cdot 2r = 8\pi r^3 (cm^3)$

Thể tích lỗ khoan của hình trụ là: $\pi \cdot r^2 \cdot r = \pi r^3 (cm^3)$

Thể tích phần vật thể còn lại là: $8\pi r^3 - \pi r^3 = 7\pi r^3 (cm^3)$



Câu 275. Một lọ nước hoa thương hiệu **Quang Baby** được thiết kế vỏ dạng nón, phần chứa dung dịch nước hoa là hình trụ nội tiếp hình nón trên. Hỏi để vẫn vỏ lọ nước hoa là hình nón trên. Tính tỉ lệ giữa x và chiều cao hình nón để cho lọ nước hoa đó chứa được nhiều dung dịch nước hoa nhất.

A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

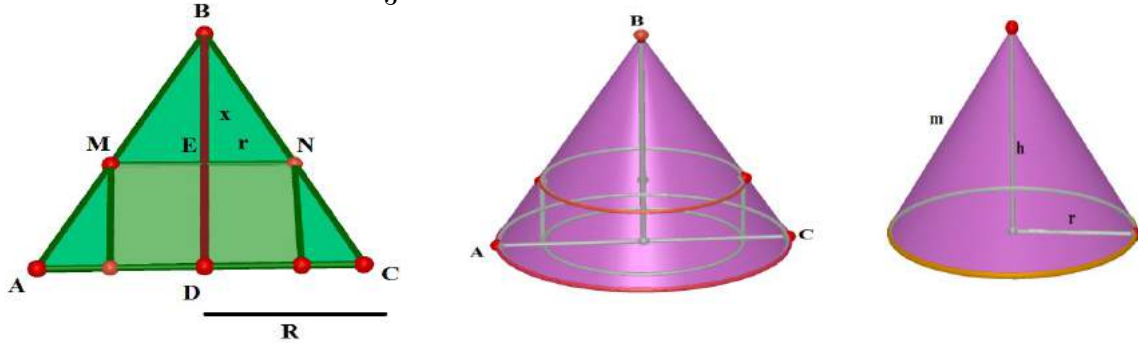
D. $\frac{3}{2}$

Chọn A.

(H.118) Đặt $BE = x$ thì có $\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}$ hay $\frac{r}{R} = \frac{x}{h} \Rightarrow r = \frac{Rx}{h}$

Thể tích hình trụ là $V = \pi \cdot \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x)$ Ta có $\frac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x)$

Vì h, π, R là các hằng số nên V sẽ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 (2h - 2x)$ lớn nhất. Vì $x + x + (2h - 2x) = 2h$ (là hằng số) nên tích của nó $x^2 (2h - 2x)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2h - 2x$ hay $x = \frac{2}{3}h$.



Câu 276. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (ABCD) bằng 30° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

- A. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{9}$ D. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{7}$

Chọn B.

Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $\widehat{SCH} = 30^\circ$

Ta có: $\triangle SHC = \triangle SHD \Rightarrow SC = SD = 2a\sqrt{3}$. Xét tam giác SHC vuông tại H ta có:

$$SH = SC \cdot \sin \widehat{SCH} = SC \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}; \quad HC = SC \cdot \cos \widehat{SCH} = SC \cdot \cos 30^\circ = 3a.$$

Vì tam giác SAB đều mà $SH = a\sqrt{3}$ nên $AB = 2a$. Suy ra $BC = \sqrt{HC^2 - BH^2} = 2a\sqrt{2}$

$$\text{Do đó, } S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4a^2\sqrt{2}. \text{ Vậy, } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$$

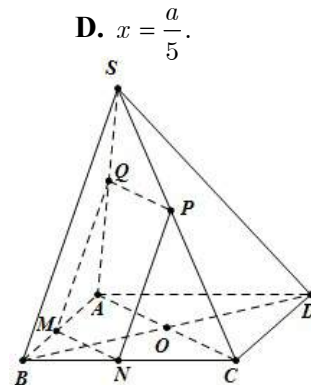
Câu 277. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua M song song với AC, SB và cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để diện tích thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $x = \frac{a}{4}$. B. $x = \frac{a}{3}$. C. $x = \frac{a}{2}$. D. $x = \frac{a}{5}$.

$$\text{Ta có: } MN \parallel AC \Rightarrow MN = \frac{BM}{BA} \cdot AC = (a - x)\sqrt{2}$$

$$\text{Tam giác SAB có } MQ \parallel SB \Rightarrow MQ = \frac{AM}{BA} \cdot SB = \frac{bx}{a}$$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a} (a - x)x$$



Ta có: $(a-x)x \leq \frac{(a-x+x)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Do đó S_{MNPQ} max khi $a-x=x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

Chọn C.

Câu 278. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a ; chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Tính khoảng cách từ điểm A đến (P) .

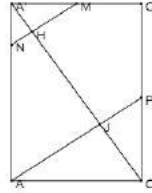
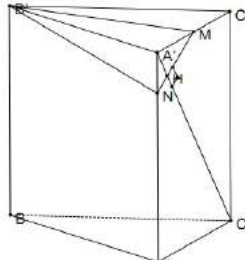
A. $\frac{9a\sqrt{5}}{10}$

B. $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{7a\sqrt{5}}{10}$

D. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$

Chọn C.



Trong $(ACC'A')$, kẻ AP song song với MN (P thuộc CC'), AP cắt $A'C$ tại J . Chỉ ra khoảng cách cần tìm bằng HJ .

Tính được $A'H = \frac{a\sqrt{5}}{10}$; $CJ = \frac{a\sqrt{5}}{5}$; $A'C = a\sqrt{5}$ ta được $HJ = \frac{7a\sqrt{5}}{10}$

Khoảng cách cần tìm là $\frac{7a\sqrt{5}}{10}$

Câu 279. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm của $A'C'$. Biết rằng cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'BC'D'$.

A. a

B. $2a$

C. $3a$

D. $\frac{a}{2}$

Chọn A.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'B'D'$ suy ra $\widehat{B'A'D'} = 120^\circ$.

Do đó $A'B'C'$, $A'C'D'$ là các tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, Ta có $BO \perp (A'B'C'D')$.

Kẻ $OH \perp A'B'$ tại H , suy ra $A'B' \perp (BHO)$. Do đó $(\widehat{ABCD}), (\widehat{CDD'C'}) = \widehat{BHO}$.

Từ $\cos \widehat{BHO} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BHO} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow BO = HO \cdot \tan \widehat{BHO} = A'O \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

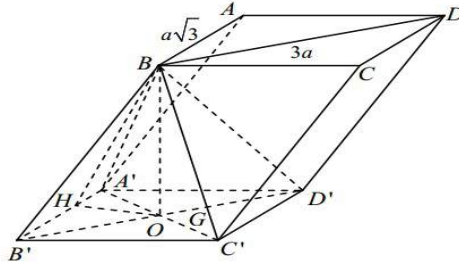
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'BC'D'$.

Vì $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}A'C'$ nên tam giác $A'BC'$ vuông tại B

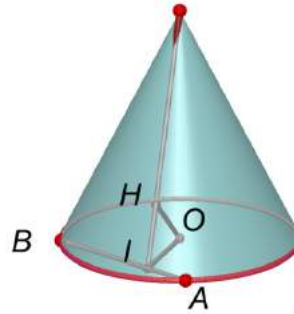
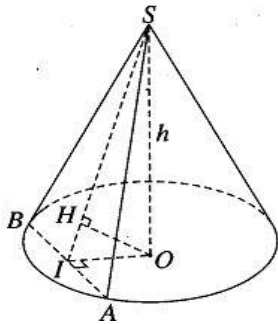
Vì $B'D' \perp (A'BC')$ nên $B'D'$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BC'$.

Gọi G là tâm của tam giác đều $A'C'D'$. khi đó $GA' = GC' = GD'$ và $GA' = GB = GC'$ nên G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'BC'D'$.

Mặt cầu này có bán kính $R = GD' = \frac{2}{3}OD' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a$



- Câu 280.** Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20 \text{ cm}$, bán kính đáy $r = 25 \text{ cm}$. Một mặt phẳng (P) chứa đỉnh S và giao tuyến với mặt phẳng đáy là AB. Khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt phẳng (P) là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:
- A. 500 cm^2 B. 475 cm^2 C. 450 cm^2 D. 550 cm^2



Chọn A.

Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$. Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12 \text{ cm}$. Xét tam giác vuông SOI ta

$$\text{có: } \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} \Rightarrow OI = 15 (\text{cm})$$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có: $OS \cdot OI = SI \cdot OH$

$$\text{Do đó } SI = \frac{OS \cdot OI}{OH} = \frac{20 \cdot 15}{12} = 25 (\text{cm})$$

Gọi S_t là diện tích của thiết diện SAB. Ta có: $S_t = \frac{1}{2} AB \cdot SI$, trong đó $AB = 2AI$

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20 \text{ cm}$ và $AB = 40 \text{ cm}$

Vậy thiết diện SAB có diện tích là: $S_t = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500 (\text{cm}^2)$.

Câu 281. Một lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng b. Khi đó thể tích V của khối lăng trụ đó là

A. $V = \frac{a^2 b \sqrt{3}}{4}$ B. $V = \frac{a^2 b \sqrt{3}}{12}$ C. $V = \frac{a^2 b}{2}$ D. $V = \frac{ab^2 \sqrt{3}}{4}$

Đáp án A.

$$V_{\text{lt}} = S_{\text{day}} \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot b = \frac{a^2 b \sqrt{3}}{4}$$

Câu 282. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{39}}{7}$ B. $R = \frac{a\sqrt{35}}{7}$ C. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$ D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$

Gọi O là tâm của mặt cầu, khi đó O nằm trên đường thẳng Δ qua C và vuông góc với (ABD) . Gọi H là hình chiếu của O lên SG , với G là trọng tâm tam giác ABC , tính được $SG = a$. Đặt $HG = x, x > 0$

- **TH1:** O và S nằm cùng phía đối với (ABD) .

$$\text{Khi đó, } OA = OS \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + (a-x)^2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$$

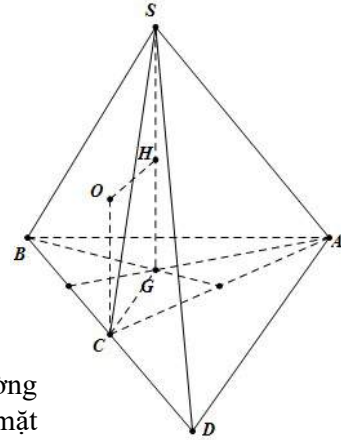
$$\text{Do đó, } R = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{37}}{6}$$

- **TH2:** O và S nằm khác phía đối với (ABD)

$$\text{Khi đó, } OA = OS \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + (a+x)^2}, \text{ phương}$$

trình này không có nghiệm dương.

Dĩ nhiên, khi đã tìm được bán kính ở trường hợp 1 rồi thì trường hợp 2 ta cũng không cần xét đến vì tồn tại một và chỉ một mặt cầu đi qua 4 điểm không đồng phẳng. **Chọn C.**



Câu 283. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

- A. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $V = \frac{125\pi}{6}$ C. $V = \frac{32\pi}{3}$ D. $V = \frac{108\pi}{3}$

Chọn C.

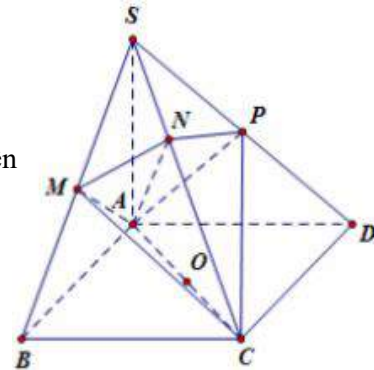
Ta có: $SC \perp AM$ mặt khác $AM \perp SB$ do đó $AM \perp MC$

Như vậy $\widehat{AMC} = 90^\circ$ tương tự $\widehat{APC} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{ANC} = 90^\circ$ vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$C.MNP$ là trung điểm của AC suy ra

$$R = \frac{AC}{2} = 2 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$$



Câu 284. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2MS$. Biết $AB = 3, BC = 3\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

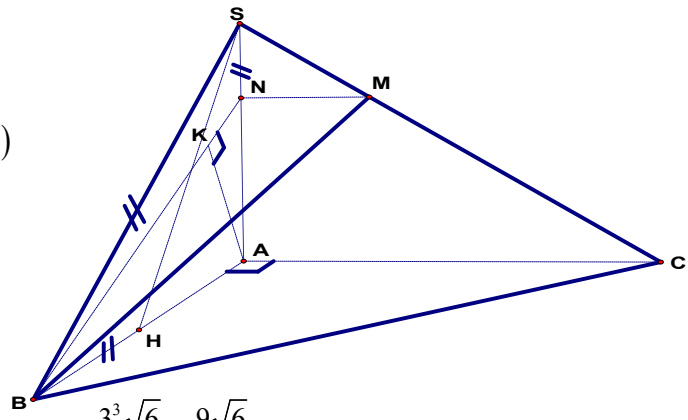
- A. $V = \frac{9\sqrt{6}}{2}$ B. $V = \frac{9\sqrt{6}}{4}$ C. $V = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ D. $V = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Chọn B.

Gọi H là trung điểm AB
 $\Rightarrow SH \perp AB$ (do ΔSAB đều).
 Do $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$
 Do ΔABC đều cạnh bằng 3
 nên $SH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AB \cdot AC = \frac{3^3 \sqrt{6}}{12} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$$



Câu 285. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S . Trên cạnh AB lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua M song song với AC , SB và cắt BC , SC , SA lần lượt tại N , P , Q . Xác định x để diện tích thiết diện $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $x = \frac{a}{4}$. B. $x = \frac{a}{3}$. C. $x = \frac{a}{2}$. D. $x = \frac{a}{5}$.

Chọn C.

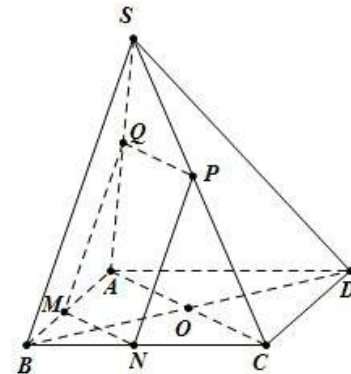
Ta có: $MN \parallel AC \Rightarrow MN = \frac{BM}{BA} \cdot AC = (a - x)\sqrt{2}$

Tam giác SAB có $MQ \parallel SB \Rightarrow MQ = \frac{AM}{BA} \cdot SB = \frac{bx}{a}$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a} (a - x)x$$

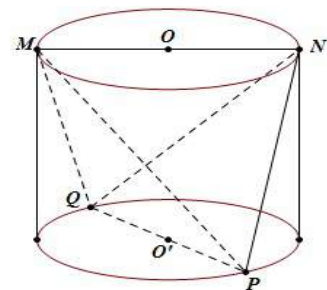
Ta có: $(a - x)x \leq \frac{(a - x + x)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

Do đó S_{MNPQ} max khi $a - x = x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$



Câu 286. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN , PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M , N , P , Q để thu được một khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60\text{cm}$ và thể tích của khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30dm^3 . Hãy tính thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)

- A. $111,4\text{dm}^3$ B. $121,3\text{dm}^3$ C. $101,3\text{dm}^3$ D. $141,3\text{dm}^3$



Áp dụng công thức diện tích tứ diện:

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN, PQ \cdot d(MNPQ) \cdot \sin(\widehat{MN;PQ}) = 30000 (\text{cm}^3) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot 60^2 \cdot h = 30000 \Rightarrow h = 50 (\text{cm})$$

Khi đó lượng bị cắt bỏ là $V = V_T - V_{MNPQ} = \pi r^2 h - 30 = 111,4\text{dm}^3$

Câu 287. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a .

A. $S = \frac{17\pi a^2}{13}$

B. $\frac{7\pi a^2}{3}$

C. $17\pi a^2$

D. $S = 7\pi a^2$

Chọn B.

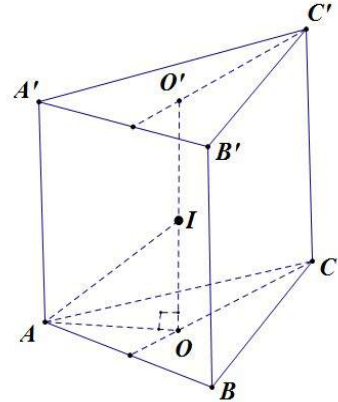
Thể tích lăng trụ là: $V = AA' \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$

Khi đó tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là trung điểm I của OO'.

Mặt cầu này có bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$$



Câu 288. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là một hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao của hình nón bằng 2R. Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $IO = 2R$. Giả sử A là điểm trên đường tròn (O) sao cho $OA \perp OI$.

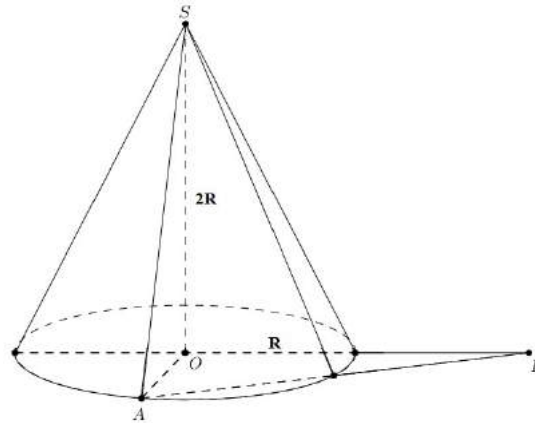
Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\pi R^2\sqrt{2}$

B. $\pi R^2\sqrt{3}$

C. $\pi R^2 2\sqrt{5}$

D. $\pi R^2\sqrt{5}$



Chọn D.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{3}, S_{xq} = \pi Rl,$$

trong đó $l = SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5} \Rightarrow S_{xq} = \pi R \cdot R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$

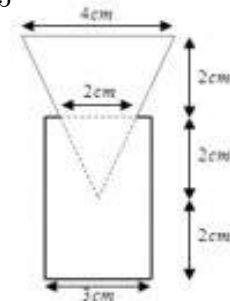
Câu 289. Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục (H) cắt (H) theo một thiết diện cho trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị: cm^3)

A. $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$

B. $V_{(H)} = 13\pi$

C. $V_{(H)} = 23\pi$

D. $V_{(H)} = 17\pi$



Thể tích khối trụ có đường kính đáy 3 cm, chiều cao 4 cm là $V_1 = 9\pi cm^3$

Thể tích khối nón có đường kính đáy 4 cm, chiều cao 4 cm là $V_2 = \frac{16}{3}\pi cm^3$

Thể tích khối nón có đường kính đáy 2 cm, chiều cao 2 cm là $V_3 = \frac{2}{3}\pi cm^3$

Thể tích của (H) xác định bởi: $V_{(H)} = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{41\pi}{3} cm^3$

Câu 290. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ABCD là hình vuông cạnh a, góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Mặt phẳng (α) qua A và vuông

góc với SC và chia khối chóp S.ABCD thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có chứa điểm S và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tìm tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

Đáp án C.

Vì $SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM, DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp MA$

$\Rightarrow AM \perp (SDC) \Rightarrow AM \perp SD$

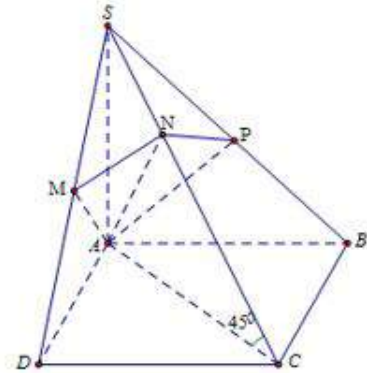
ΔSAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Ta có: $SA^2 = SM \cdot SD \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$;

$SA^2 = SN \cdot SC \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}$

Do đó $\frac{V_{SAMN}}{V_{SADC}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$. Do tính chất đối xứng $\Rightarrow \frac{V_{SAMNP}}{V_{SABCD}} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{SAMNP}}{V_{ABCDMNP}} = \frac{1}{2}$



Câu 291. Trong không gian, cho hình (H) gồm mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ đi qua tâm I của mặt cầu (S). Số mặt phẳng đối xứng của hình (H) là:

- A. 2 B. 1 C. Vô số D. 3

Đáp án C.

Ta có do (H) là mặt cầu nên có vô số mặt phẳng đối xứng.

Câu 292. Trong không gian, cho hai đường thẳng I, Δ vuông góc và cắt nhau tại O. Hình tròn xoay khi quay đường thẳng I quanh trục Δ là:

- A. Mặt phẳng B. Mặt trụ tròn xoay C. Mặt cầu D. Đường thẳng

Đáp án A. Khi quay đường thẳng I quanh trục Δ ta được một mặt phẳng

Câu 293. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'A, BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{3}a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

Đáp án D.

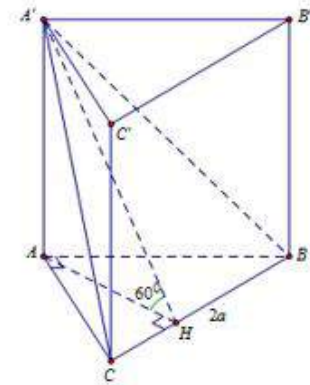
Gọi H là hình chiếu của A trên BC $\Rightarrow d(A'A; BC) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow A'A = AH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$$



Câu 294. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ($a > 0$). Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Biết $SB = a$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

- A. $\frac{2a^3}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{2a^3}{9}$

Đáp án D.

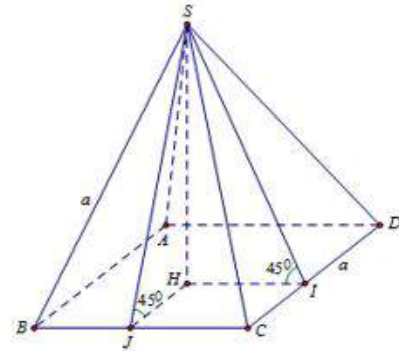
Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, I và J lần lượt là hình chiếu của H lên CD và BC

$\Rightarrow IH = HJ (= SH) \Rightarrow HICJ$ là hình vuông.

Đặt $BJ = x \Rightarrow CJ = a - x = HJ$

Ta có: $BS^2 = BJ^2 + SJ^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2HJ^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2(a-x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = \frac{a}{3} \end{cases}$$



Vì H nằm trong hình vuông $ABCD$ nên $x = \frac{a}{3} \Rightarrow SH = HJ = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$

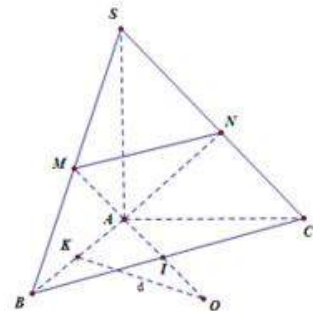
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a^2 = \frac{2a^3}{9}$

Câu 295. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm A, N, M, B .

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ B. $2a\sqrt{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Đáp án A.

Gọi I là trung điểm của BC . Do tính chất đối xứng dễ thấy $MN \parallel BC, SM = SN$ khi đó (SAI) là mặt phẳng trung trực của MN và BC



Từ trung điểm K của AB ta dựng đường thẳng qua K và vuông góc với AB đường thẳng này cắt mặt phẳng (SAI) tại O suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối ABCNM.

$$\text{Khi đó } OA = R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2a}{2\sin 120^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 296. Trong không gian mặt cầu (S) tiếp xúc với 6 mặt của một hình lập phương cạnh a, thể tích khối cầu (S) bằng

A. $V = \frac{\pi a^3}{24}$ B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$ C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$ D. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

Đáp án C.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \frac{a}{2}$. Thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$

Câu 297. Cho tứ diện ABCD đều có cạnh bằng a và trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{11a^2}{2}$ là mặt cầu.

A. $S(G; a)$ B. $S(G; 2a)$ C. $S(B; a)$ D. $S(C; 2a)$

Đáp án A.

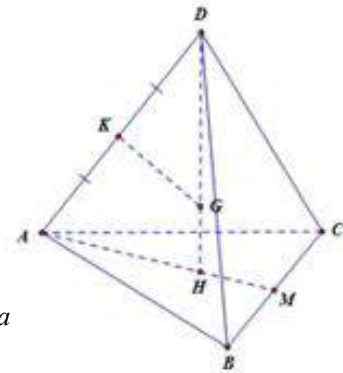
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + \overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{11a^2}{2} \end{aligned}$$

Mặt khác xét tứ diện đều hình vẽ ta có: $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \Delta DGK \sim \Delta DAH \Rightarrow \frac{DG}{DA} = \frac{DK}{DH}$$

Suy ra $GD = \frac{DA^2}{2DH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = GB = GC = GD \Rightarrow MG^2 = a^2 \Rightarrow MG = a$

Vậy $S(G; a)$



Câu 298. Cho hình chóp đều n cạnh ($n \geq 3$). Cho biết bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là R và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° , thể tích khối chóp bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}.R^3$. Tìm n?

A. $n = 4$ B. $n = 8$ C. $n = 10$ D. $n = 6$

Đáp án D.

Giả sử đáy là đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$, O là tâm của đáy, chóp có chiều cao là SH.

Gọi I là trung điểm của A_1A_2 .

$$\text{Ta có: } IA_2 = R \sin \frac{\pi}{n}, OI = R \cos \frac{\pi}{n} \Rightarrow SO = OI \tan 60^\circ = R \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{3} = R\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \text{diện tích đáy là: } S = \frac{3V}{SO} = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} R^3}{R\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{9R^2}{4 \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$\text{Mà } S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{9R^2}{4 \cos \frac{\pi}{n}} = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{9}{2}$$

Thử các giá trị của n ở các phương án $\Rightarrow n = 6$

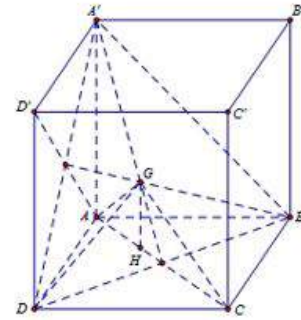
Câu 299. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Tìm thể tích khối tứ diện GABD

- A. $\frac{a^3}{18}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{9}$ D. $\frac{a^3}{24}$

Đáp án A.

Thể tích khối tứ diện GABD là:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD} GH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} A'A = \frac{1}{18} a^2 a = \frac{a^3}{18}$$



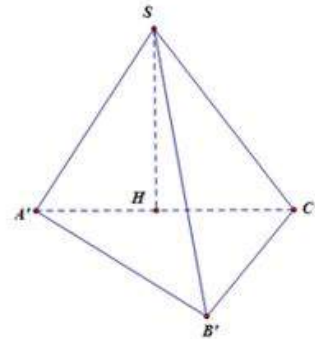
Câu 300. Tìm thể tích của hình chóp S.ABC biết $SA = a, SB = a\sqrt{2}, SC = 2a$ và có $\widehat{BSA} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3}{3}$

Đáp án D.

Trên SA, SB, SC ta lần lượt thấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = SB' = SC' = 1$. Khi đó $A'B' = 1; B'C' = \sqrt{2}$;

$A'C' = \sqrt{SA'^2 + SC'^2 - 2SA'SB'\cos \widehat{C'SA}} = \sqrt{3}$ nên tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' . Mặt khác $SA' = SB' = SC' = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S xuống $(A'B'C')$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ khi đó H là trung điểm của $A'C'$



$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{SA'^2 - A'H^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{a^3}{3}$$

Câu 301. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a với $SA = \frac{a}{2}$, $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, BC . Thể tích tứ diện $K.SDC$ có giá trị là:

A. $V = \frac{a^3}{4}$

B. $V = \frac{a^3}{16}$

C. $V = \frac{a^3}{8}$

D. $V = \frac{a^3}{32}$

Đáp án D.

Từ giả thiết ta có $AB = a$, $SA = \frac{a}{2}$, $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Nên $\triangle ASB$ vuông tại S

$$\Rightarrow SH = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle SAH \text{ đều.}$$

Gọi M là trung điểm của AH thì $SM \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{KSDC} &= V_{S.KCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{\triangle KCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle BAD} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a^3}{32} \quad (\text{đvtt}) \end{aligned}$$

Bình luận: Công thức cần nhớ:

➤ **Thể tích hình chóp:** $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

S : Diện tích đáy

h : Độ dài đường cao.

➤ **Thể tích khối lăng trụ**

$$V = S \cdot h$$

S : Diện tích đáy

h : Độ dài đường cao.

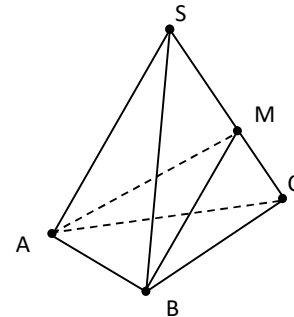
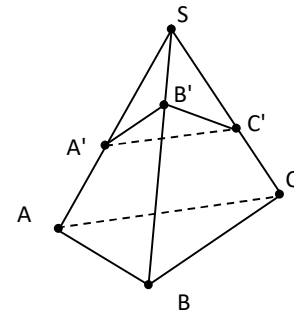
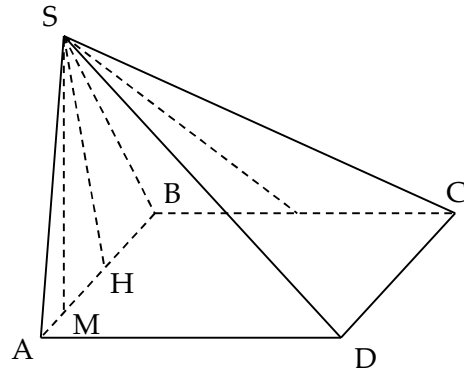
➤ **Tỉ số thể tích:**

Cho hình chóp $S.ABC$:

* $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$

$$\text{Suy ra } A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC}$$

* $M \in SC$ ta có: $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SM}{SC}$



Câu 302. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BCD} = 120^\circ$ và $AA' = \frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $ABCD$ trùng với giao điểm của AC và BD . Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$:

A. $V = 12a^3$

B. $V = 3a^3$

C. $V = 9a^3$

D. $V = 6a^3$

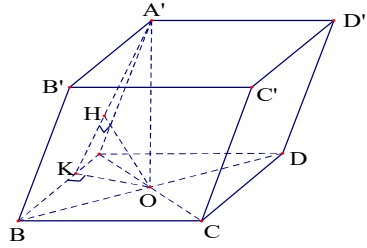
Đáp án B.

Gọi $O = AC \cap BD$. Từ giả thuyết suy ra $A'O \perp (ABCD)$. $S_{ABCD} = BC \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vì $\widehat{BCD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$$\Rightarrow AC = a \Rightarrow A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{3}a.$$

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D.} = 3a^3$.



Câu 303. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a là:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

Đáp án B.

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc AA_1H là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$

Theo giả thiết thì góc AA_1H bằng 30° .

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a$, $AA_1H = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$

Xét AHA_1 có $AA_1 = a$, góc $AA_1H = 30^\circ \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

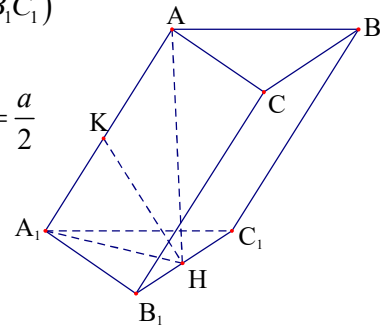
Do $A_1B_1C_1$ đều cạnh a , H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra A_1H vuông góc B_1C_1 .

$AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1 .

Ta có $AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Câu 304. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'.ABC$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{9}$ B. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Đáp án C.

Tìm bán kính mặt cầu: Ngoại tiếp tứ diện $A'.ABC$.

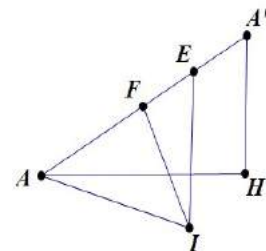
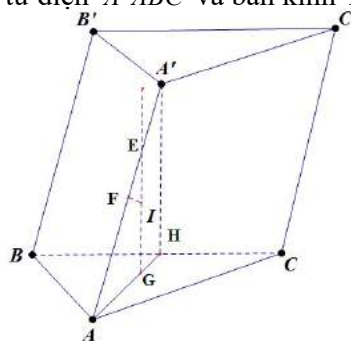
- Gọi G là tâm của tam giác ABC , qua G kẻ đường thẳng $d \parallel A'H$ cắt AA' tại E .
- Gọi F là trung điểm AA' , trong mp $(AA'H)$ kẻ đường thẳng trung trực của AA' cắt (d) tại $I \Rightarrow I$ là **tâm mặt cầu** ngoại tiếp tứ diện $A'.ABC$ và bán kính $R = IA$.

Ta có: Góc AEI bằng 60° ,

$$EF = \frac{1}{6} AA' = \frac{a}{6}$$

• $IF = EF \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

• $R = \sqrt{AF^2 + FI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



Câu 305. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $(SAB) \perp (ABCD)$. H là trung điểm của AB , $SH = HC$, $SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị của $\tan \alpha$ là:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{2}$

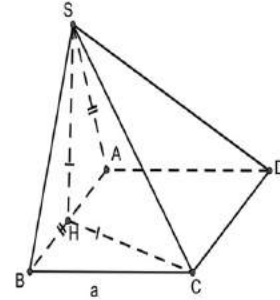
Đáp án A.

Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$, $SA = AB = a$, $SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Có $SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = SH^2 \Rightarrow \triangle SAH \Rightarrow SA \perp AB$.

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$ và $AC = hc(SC; (ABCD))$.

Ta có $(SC; (ABCD)) = \widehat{SCA}$, $\tan \widehat{SCA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

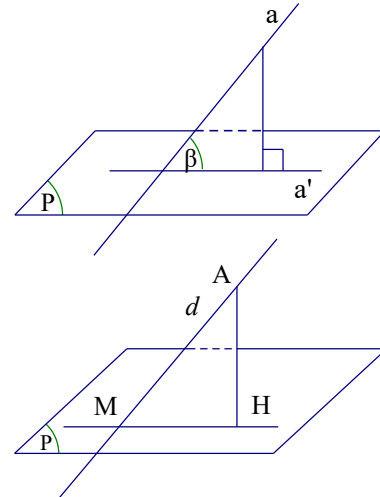


Bình luận: Bài toán này thực chất là tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Cách tìm:

- Tìm điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng
- Tìm hình chiếu của một điểm thứ 2 trên mặt phẳng từ đó tìm được hình chiếu của đường thẳng và tìm được góc. Cách tìm hình chiếu: Nếu có đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) . Kẻ MH song song với đường thẳng d thì H là hình chiếu vuông góc của M trên (P)

Nếu không có sẵn đường thẳng vuông góc:

- Chọn mặt phẳng (Q) chứa điểm M sao cho $mp (Q)$ vuông góc với $mp (P)$
- Từ M kẻ MH vuông góc với giao tuyến a thì H là hình chiếu vuông góc của M trên (P)



Câu 306. Cho mặt nón tròn xoay đỉnh O có góc ở đỉnh bằng 60° . Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục của mặt nón tại H , biết $OH = a$. Khi đó, (P) cắt mặt nón theo đường tròn có bán kính bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Đáp án D.

Nếu điểm M nằm trên đường tròn giao tuyến thì OHM là tam giác vuông tại H , và góc tại đỉnh O bằng 30° . Vậy bán kính đường tròn là $R = HM = OH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 307. Cho tam giác vuông ABC đỉnh A , có $AC = 1 \text{ cm}$, $AB = 2 \text{ cm}$, M là trung điểm của AB . Quay tam giác BMC quanh trục AB . Gọi V và S tương ứng là thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn thu được qua phép quay trên. Lựa chọn phương án đúng.

- A. $V = \frac{1}{3}\pi$; $S = \pi(\sqrt{5} + \sqrt{2})$. B. $V = \pi$; $S = \pi(\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

C. $V = \frac{1}{3}\pi; S = \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

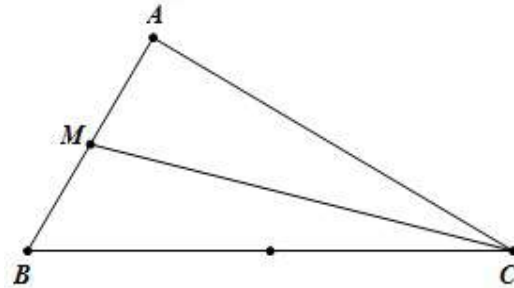
D. $V = \pi; S = \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

Đáp án A.

Thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB là:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot AB = \frac{2}{3}\pi$$

$$S_{xq1} = \pi r l = \pi AB \cdot AC = \pi\sqrt{5}.$$



Thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác AMC quanh cạnh AB là:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot AM = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{xq2} = \pi r l = \pi AC \cdot MC = \pi\sqrt{2}. \text{ Suy ra } V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}; S = S_1 + S_2 = \pi(\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

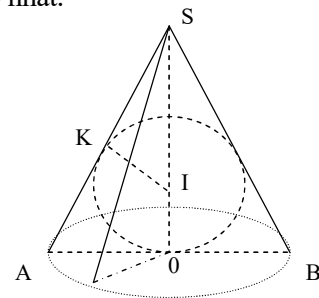
Câu 308. Một hạt ngọc trai hình cầu (S) bán kính R, được bọc trong một hộp trang sức dạng hình nón (N) ngoại tiếp mặt cầu. Hỏi nhà sản xuất phải thiết kế hộp trang sức hình nón có chiều cao và bán kính đáy như thế nào để hộp quả đó có thể tích nhỏ nhất.

A. Bán kính đáy $AO = 2R\sqrt{2}$ và chiều cao $SO = 2R$.

B. Bán kính đáy $AO = R\sqrt{2}$ và chiều cao $SO = 4R$.

C. Bán kính đáy $AO = R$ và chiều cao $SO = 3R$.

D. Bán kính đáy $AO = \frac{1}{2}R$ và chiều cao $SO = 3R$.



Chọn B.

Đặt $SI = x; x > R$. Ta có $SO = x + R$.

$$SK = \sqrt{x^2 - R^2}. \text{ Do } \triangle SIK \sim \triangle SAO \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{IK}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{SO \cdot IK}{SK} = \frac{R(R+x)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

Suy ra thể tích V của hình nón là

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{\pi R^2 (R+x)^2}{3(x^2 - R^2)}(R+x) \Rightarrow V(x) = \frac{\pi R^2 (R+x)^2}{3(x-R)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{(R+x)^2}{x-R}, \quad x > R.$$

$$\text{- Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 - 2Rx - 3R^2}{(x-R)^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3R \\ x = -R \end{cases}$$

Bảng biến thiên của f(x) trên khoảng $(R; +\infty)$

x	R	3R	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{8\pi R^3}{3}$	$+\infty$

Suy ra $V(x)$ đạt GTNN = $\frac{8\pi R^3}{3}$ khi $SO = x + 3R = 4R \Leftrightarrow AO = R\sqrt{2}$.

Vậy hình nón cần tìm có bán kính đáy $AO = R\sqrt{2}$ và chiều cao $SO = 4R$.

Câu 309. Hình tứ diện đều có số mặt phẳng đối xứng là:

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 0.

Chọn B.

Câu 310. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Quay tam giác đó (cùng với phần trong của nó) quanh đường thẳng BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng:

- A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{24}$. D. $V = \frac{2\pi a^3}{3}$.

Chọn A.

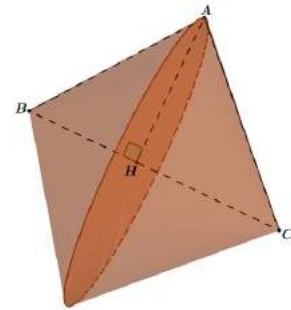
+ Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

+ Ta có: $AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{a}{2}$; $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \frac{3a}{2}$

+ Thể tích khối tròn xoay cần tính bằng:

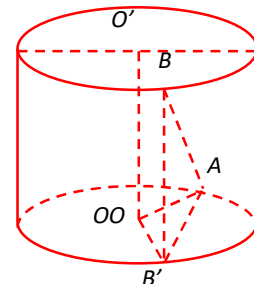
$$V = \frac{1}{3}BH \cdot \pi \cdot AH^2 + \frac{1}{3}CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^3}{2}$$



Câu 311. Cho hình trụ T có trục OO' . Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho $AB = a$ và đường thẳng AB tạo với đáy của hình trụ góc 60° . Gọi hình chiếu của B trên mặt phẳng đáy chứa đường tròn (O) là B' . Biết rằng $\widehat{AOB'} = 120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và OO' .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{16}$.

Chọn B.



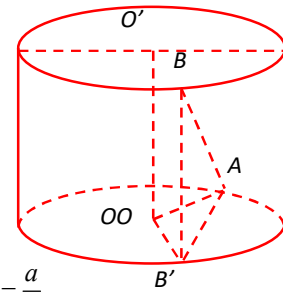
+ Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABB')$

+ Ta có:

$$OO' \parallel BB' \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABB')) = d(O, (ABB')) = OH$$

+ Xét tam giác ABB' vuông tại B' có: $AB' = AB \cos \widehat{BAB'} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$

+ Xét tam giác OAH vuông tại H có: $OH = AH \cot \widehat{AOH} = \frac{AB'}{2} \cot \frac{\widehat{AOB'}}{2} = \frac{a}{4} \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{12}$



Câu 312. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a, AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

B. $R = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn C.

Gọi M là trung điểm AB; G là trọng tâm tam giác đều ABC

Kẻ $Gx \perp (SAB)$ và $Oy \perp (ABCD)$. Gọi $I = Gx \cap Oy$

Theo đề ra, ta có: $SM \perp (ABCD)$

Vì $IO \perp (ABCD) \Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)

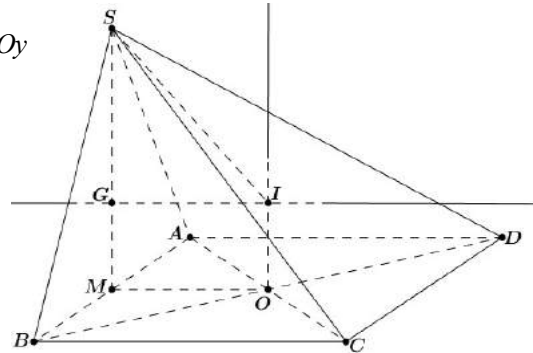
Vì $IG \perp (SAB) \Rightarrow IA = IB = IS$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$

Do đó suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SG = \frac{2}{3} SM = \frac{3}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ IG = MO = \frac{BC}{2} = a \end{cases} \Rightarrow IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ có bán kính $R = IS = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Câu 313. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng chứa AB , đi qua điểm C' nằm trên cạnh SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Chọn C.

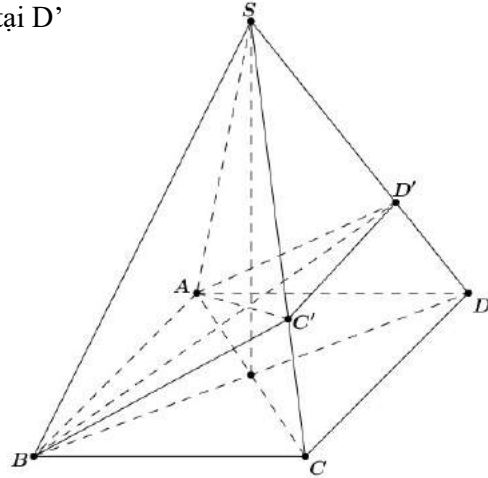
+ Mặt phẳng (P) chứa AB cắt SC tại C', cắt SD tại D'

$$\Rightarrow C'D' // CD$$

+ Theo đề ra thì: $\frac{V_{S.ABC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$

+ Đặt $x = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} \Rightarrow x \in (0;1)$

+ Khi đó:
$$\begin{cases} \frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = x \\ \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = x^2 \end{cases}$$



+ Suy ra: $x + x^2 = \frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.ABC'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.ABC'D'}}{V_{S.ABCD}} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 314. Các trung điểm của các cạnh của một tứ diện đều cạnh a là các đỉnh của khối đa diện đều. Tính thể tích V của khối đa diện đều đó.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

Chọn C.

+ Gọi G là trọng tâm tam giác đều BCD $\Rightarrow AG \perp (BCD)$

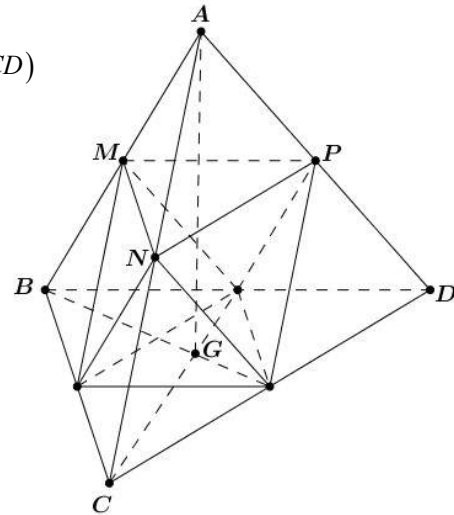
+ Ta có: $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

+ Khi đó: $V_{A.BCD} = \frac{1}{3} AG \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

+ Lại có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$V_{A.MNP} = \frac{1}{8} V_{A.BCD} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{96}$$

+ Mặt khác: $V = V_{A.BCD} - 4 \cdot V_{A.MNP} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{96} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$



Câu 315. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$. Nhận định nào sau đây đúng

A. $\triangle SCD$ vuông.

B. $\triangle SCD$ cân.

C. $\triangle SCD$ đều

D. $\triangle SCD$ vuông cân.

Chọn A.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (1)

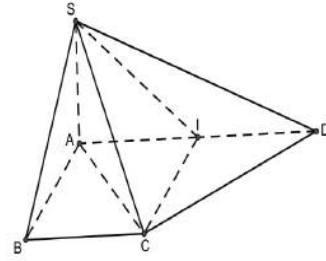
Gọi I là trung điểm của AD . Tứ giác $ABCI$ là hình vuông.

Do đó $\widehat{ACI} = 45^\circ$ (*).

Mặt khác, tam giác CID là tam giác vuông cân tại I nên $\widehat{BCI} = 45^\circ$ (**).

Từ (*),(**) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CD$ (2).

Từ (1),(2) $\Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \triangle SCD$ vuông.



Câu 316. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}, BC = 3a, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm H trên cạnh BC sao cho $BC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{4a^3}{9}$

B. $\frac{19a^3}{4}$

C. $\frac{9a^3}{4}$

D. $\frac{4a^3}{19}$

Chọn C.

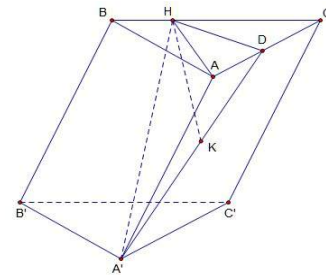
Từ giả thiết, áp dụng định lí cosin trong tam giác AHC ta tính được $AH = a$.

$$\text{Do } \begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'AH) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Do $\triangle AA'H$ vuông tại H suy ra $A'H = d(A';(ABC)) = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot d(A';(ABC)) = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{4}$$



Câu 317. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm của $A'C'$. biết rằng cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\frac{9a^3}{4}$

B. a^3

C. $\frac{9a^3}{2}$

D. $\frac{3a^3}{2}$

Chọn A.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'B'D'$ suy ra $\widehat{B'A'D'} = 120^\circ$.

Do đó $A'B'C', A'C'D'$ là các tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, Ta có $BO \perp (A'B'C'D')$.

Kẻ $OH \perp A'B'$ tại H , suy ra $A'B' \perp (BHO)$.

Do đó $\widehat{((ABCD), (CDD'C'))} = \widehat{BHO}$.

$$\text{Từ } \cos \widehat{BHO} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BHO} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$\Rightarrow BO = HO \cdot \tan \widehat{BHO} = A'O \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{9a^3}{4}.$$

Câu 318. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$. Biết rằng $((ABC), (A'B'C')) = 60^\circ$ và hình chiếu A lên $(A'B'C')$ là trung điểm H của $A'B'$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AHB'C'$.

- A. $\frac{a\sqrt{86}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{82}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{68}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{62}}{8}$

Chọn A.

* **Phương pháp:** Với hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, ta tìm tâm O đường tròn ngoại tiếp đáy, dựng đường song song với chiều cao và cắt trung trực của chiều cao tại tâm

I của hình cầu cần tìm $R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (r = OA)^2}$.

* **Lời giải:**

Ta có: $((ABC), (A'B'C')) = ((A'B'C'), (A'B'C'))$

Giao tuyến của chúng là $B'C'$. Từ H dựng HK vuông góc với $B'C'$ thì ta có:

$$B'C' \perp (AHK) \rightarrow ((A'B'C'), (A'B'C')) = \widehat{AKH} = 60^\circ$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3} \rightarrow \sin ABC = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{HK}{HB}$$

$$\rightarrow HK = \frac{a}{\sqrt{6}} HC = \sqrt{AH^2 + AC^2} = \frac{3a}{2}$$

Ta gọi O của đường tròn ngoại tiếp tam giác $HB'C'$ thì áp dụng:

$$S = \frac{abc}{4R'} \rightarrow S_{HB'C'} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{a}{\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{2}}{4R'} \rightarrow R' = \frac{3a}{4}$$

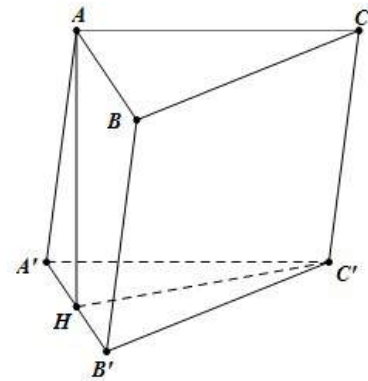
$$\rightarrow R = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{82}}{4}$$

Câu 319. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45° . Thể tích của hình trụ bằng:

- A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$ B. $\frac{\pi a^3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$ D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$

Chọn A.

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó $OM \perp AB$ và $O'N \perp CD$.



Giả sử I là giao điểm của MN và OO' .

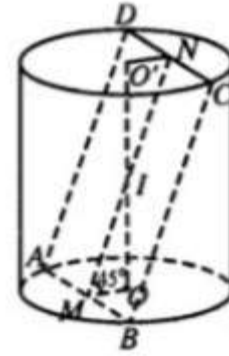
Đặt $R = OA$ và $h = OO'$

Khi đó tam giác IOM vuông cân tại O nên

$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{Ta có } R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$$



Câu 320. Hình bên cho ta hình ảnh của một đồng hồ cát với các kích thước kèm theo $OA = OB$. Khi đó tỉ số tổng thể tích của hai hình nón (V_n) và thể tích hình trụ (V_t) bằng

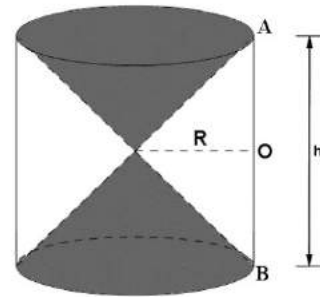
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

Chọn D.

Chiều cao của hình nón là $\frac{h}{2}$

$$\text{Tổng thể tích của 2 hình nón là } V_{\text{nón}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\text{Thể tích của hình trụ } V_t = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{V_n}{V_t} = \frac{1}{3}$$



Câu 321. Cho tam giác ABC đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần màu vàng nhạt (hình vẽ bên dưới) quay quanh đường thẳng AD bằng

- A. $\frac{23\pi a^3 \sqrt{3}}{216}$ B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ C. $\frac{20\pi a^3 \sqrt{3}}{217}$ D. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$

Chọn A.

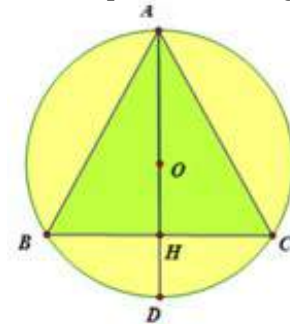
$$\text{Thể tích của khối cầu là } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$$

Thể tích của khối nón có tam giác ABC thiết diện qua trục là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}\pi$$

Khi đó thể tích khối vàng nhạt khi xoay quanh AD là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{23\pi a^3 \sqrt{3}}{216}$$



Câu 322. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC) bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích lăng trụ.

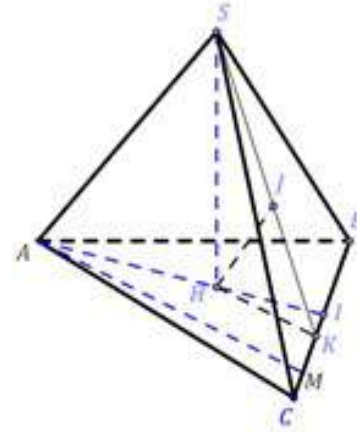
- A. $3\sqrt{3}a^3$ B. $\frac{3a^3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

Lý thuyết: Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $d(A;SBC)$ được tính nhanh theo công thức sau:

$$\frac{1}{[d(A,SBC)]^2} = \frac{1}{[d(A,BC)]^2} + \frac{(1-k)^2}{h^2}$$

$h = SH$ là đường cao hình chóp và $k = \frac{AH}{AI}$.

1. Nếu $H \equiv A$ thì $k = 0$.
2. Nếu $AH // BC$ thì $k = 0$.
3. Nếu $H \equiv I$, tức là $H \in BC$ thì $k = 1$.
4. Nếu H là trung điểm AB hoặc AC thì $k = \frac{1}{2}$.
5. Nếu H là trọng tâm ΔABC thì $k = \frac{2}{3}$.



Giải:

1. $d(A,BC) = AB = a$; 2. Hình chiếu A' xuống đáy trùng A nên $k = 0$.

$$\frac{1}{[d(A,A'BC)]^2} = \frac{1}{[d(A,BC)]^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{9}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

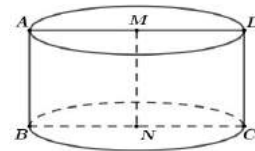
\Rightarrow Chọn C.

Câu 323. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và có các mặt bên đều là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $3a^3\sqrt{2}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} S_{\text{day}} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \\ h = 2a \end{cases} \longrightarrow V = S_{\text{day}} \cdot h = 2a^3\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 324. Trong không gian, cho hình chữ nhật ABCD có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ (tham khảo hình vẽ bên). Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.



- A. $S_{\text{tp}} = \frac{4\pi}{3}$. B. $S_{\text{tp}} = 3\pi$. C. $S_{\text{tp}} = 4\pi$. D. $S_{\text{tp}} = 6\pi$.

Lời giải. Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{\text{xq}} = 2\pi MA \cdot AB = 2\pi$.

Diện tích hai đáy của của hình trụ: $S_{\text{d}} = 2 \times \pi \cdot AM^2 = 2\pi$.

Vậy diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ: $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{d}} = 4\pi$. **Chọn C.**

Câu 325. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải. Xác định $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$ và $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC , kẻ $OK \perp SM$. Khi đó $d[O, (SBC)] = OK$.

Tam giác vuông SOM , có $OK = \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{\sqrt{42}}{14}$. **Chọn D.**

Câu 326. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, A'C', C'B'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và AB' bằng

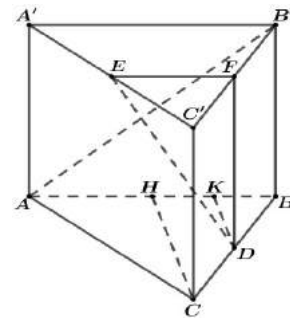
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng và hai mặt đáy là những tam giác đều cạnh a .

Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$) và $DK \perp AB$ ($K \in AB$).

Ta chứng minh được DK là đoạn vuông góc chung của DE và AB' nên

$$d[DE; AB'] = DK = \frac{1}{2}CH = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 327. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Côsin góc giữa đường thẳng SC và mặt (SBD) bằng

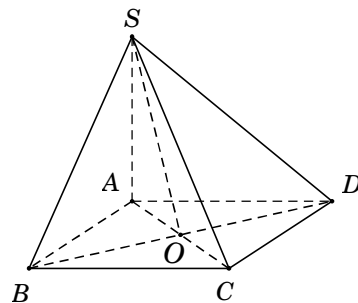
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải. Chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (CSO)$

$$\longrightarrow \widehat{SC, (SBD)} = \widehat{CSO}.$$

Ta tính được $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SC = a\sqrt{3}$

$$\longrightarrow \cos \widehat{SC, (SBD)} = \cos \widehat{CSO} = \frac{SO^2 + SC^2 - OC^2}{2 \cdot SO \cdot SC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 328. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc các cạnh AB, CD sao cho $MA = MB$, $NC = 2ND$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

- A. $V = 8$. B. $V = 20$. C. $V = 28$. D. $V = 40$.

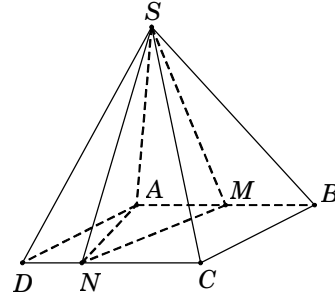
Lời giải. Gọi d là khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD .

Diện tích hình bình hành $S_{ABCD} = AB.d$.

Ta có $S_{MBCN} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta ADN}$

$$\begin{aligned} &= AB.d - \frac{1}{2}AM.d - \frac{1}{2}DN.d = AB.d - \frac{1}{4}AB.d - \frac{1}{6}AB.d \\ &= \frac{7}{12}AB.d = \frac{7}{12}S_{ABCD}. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.MBCN} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.48 = 28$. **Chọn C.**



Câu 329. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Cosin của góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{22}}{5}$.

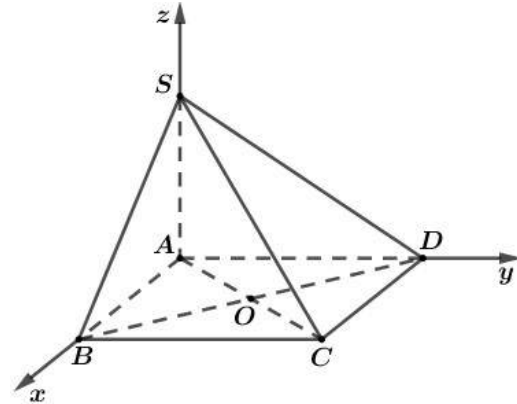
Lời giải. Để cho gọn ta chọn $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với

$A \equiv O(0;0;0)$ và $B(1;0;0)$, $D(0;\sqrt{3};0)$, $S(0;0;1)$.

Suy ra $C(1;\sqrt{3};0)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (1;0;-1) \\ \overrightarrow{BC} = (0;\sqrt{3};0) \end{cases}$



→ VTPT của mặt phẳng (SBC) là $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (\sqrt{3};0;\sqrt{3}) = \vec{n}$.

Đường thẳng BD có VTCP là $\overrightarrow{BD} = (-1;\sqrt{3};0)$.

Khi đó $\sin \widehat{BD, (SBC)} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos \widehat{BD, (SBC)} = \frac{\sqrt{14}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 330. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S) (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối nón (H)

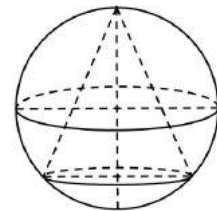
là V_1 ; thể tích phần còn lại là V_2 . Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{76}{32}$.

B. $\frac{81}{32}$.

C. $\frac{32}{76}$.

D. $\frac{32}{81}$.



Lời giải.

Thể tích mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

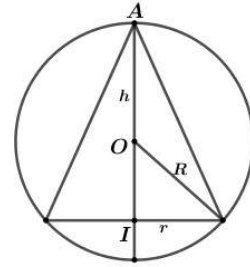
$$\text{Ta có } V_2 = V - V_1 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{\frac{V}{V_1} - 1}.$$

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}$ lớn nhất khi $\frac{V}{V_1}$ nhỏ nhất $\longrightarrow V_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Gọi h, r lần lượt là chiều cao, bán kính đáy của hình nón nội tiếp mặt cầu.

Gọi I, O lần lượt là tâm của đường tròn đáy hình nón và tâm của mặt cầu.

Gọi A là đỉnh của hình nón. Xét thiết diện qua trục của hình nón như hình vẽ bên.



$$\text{Ta có } r^2 = h.(2R - h), \text{ khi đó } V_1 = \frac{1}{3}h.\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h).$$

Xét hàm $f(h) = h^2(2R - h)$ trên $(0; 2R)$ ta được $\max_{(0, 2R)} f(h) = f\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32R^3}{27}$.

$$\text{Suy ra } \max V_1 = \frac{1}{3}\pi.\max f(h) = \frac{1}{3}\pi.\frac{32R^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

$$\text{Khi đó } V_2 = V - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{32}{81}\pi R^3 = \frac{76}{81}\pi R^3 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{76}. \text{ Chọn C.}$$

Cách 2. Đặt $0 \leq OI = x < R$.

TH1. Chiều cao của khối nón $h = R + x$ và bán kính đáy $r^2 = R^2 - x^2$.

Theo BĐT Cô si cho 3 số dương, ta có

$$V_1 = \frac{1}{3}(R + x).\pi.(R^2 - x^2) = \frac{\pi}{6}(2R - 2x)(R + x)^2 \leq \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max V_1 = \frac{32}{81}\pi R^3 \longrightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{32}{81}\pi R^3 = \frac{76}{81}\pi R^3 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{76}.$$

TH2. Chiều cao của khối nón $h = R - x$. Làm tương tự.

Câu 331. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Gọi H là trung điểm AB . Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC \perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

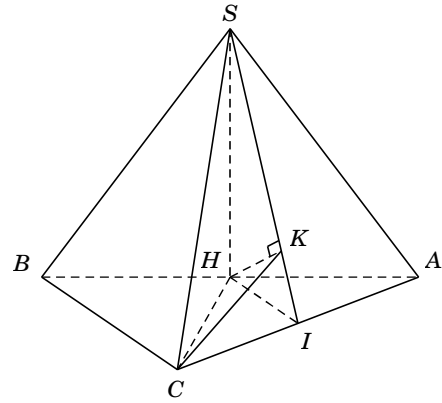
Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ ($K \in SI$). (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC .



Xét tam giác CHK vuông tại K , có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos \widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$. **Chọn D.**

Câu 332. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều có $d = \sqrt{3}$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng còn lại chứa một cạnh bên hình chóp. Thể tích nhỏ nhất V_{\min} của khối chóp là

- A. $V_{\min} = 3$. B. $V_{\min} = 9$. C. $V_{\min} = 9\sqrt{3}$. D. $V_{\min} = 27$.

Lời giải. Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đặt $AB = x$, $SO = h$. Với O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Qua O kẻ đường thẳng OH vuông góc với SA với $H \in SA$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$.

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SA và BD .

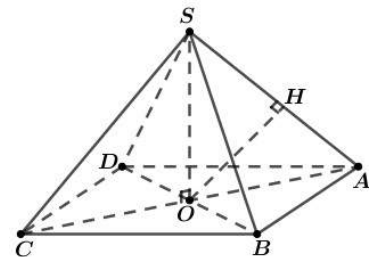
Theo bài ra, ta có $d = d(SA, BD) = OH \longrightarrow OH = \sqrt{3}$.

Tam giác SAO vuông tại O , có đường cao OH suy ra

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2}.$$

Lại có $\frac{1}{3} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \underset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt{\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{x^4}} \Leftrightarrow hx^2 \geq 27$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot hx^2 \geq 9 \longrightarrow V_{\min} = 9$. **Chọn B.**



Câu 333. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC , suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

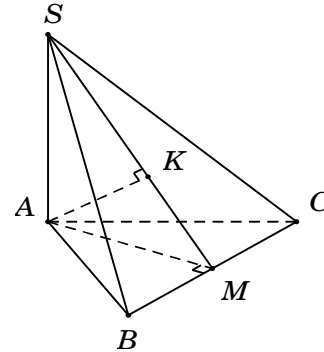
Gọi K là hình chiếu của A trên SM , suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d[A, (SBC)] = AK$.

Trong $\triangle SAM$, có $AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d[A, (SBC)] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. **Chọn A.**



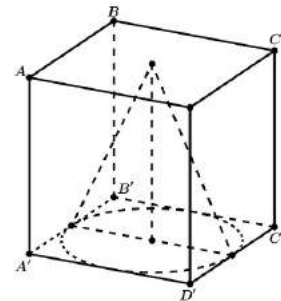
Câu 334. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b} + c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc .

A. $bc = 5$.

B. $bc = 7$.

C. $bc = 8$.

D. $bc = 15$.



Lời giải. Ta có bán kính hình nón $r = \frac{a}{2}$, đường cao $h = a$, đường sinh $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần $S_{\text{tp}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \frac{a^2 \sqrt{5}}{4} + \pi \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 1) \rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow bc = 5$. **Chọn A.**

Câu 335. Cho tứ diện $ABCD$ có $BD = 3$, hai tam giác ABD , BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 11, số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) là

A. $\arcsin\left(\frac{33}{40}\right)$.

B. $\arcsin\left(\frac{11}{40}\right)$.

C. $\arccos\left(\frac{33}{40}\right)$.

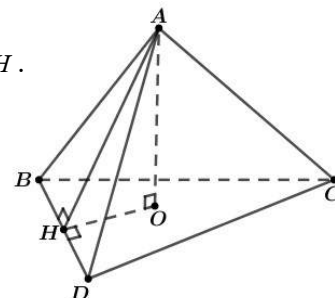
D. $\arccos\left(\frac{11}{40}\right)$.

Lời giải. Gọi O là chân đường vuông góc kẻ từ A đến mặt phẳng (BCD) ,

kẻ $OH \perp BD$ ($H \in BD$). Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ OH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOH) \Rightarrow BD \perp AH$.

Suy ra $\widehat{((ABD), (BCD))} = \widehat{AHO}$.

Ta có $AH = \frac{2S_{\triangle ABD}}{BD} = 4$, $AO = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{33}{10}$.



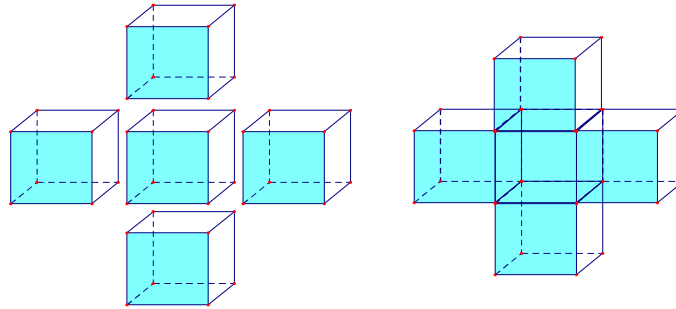
Khi đó ta tính được $\sin \widehat{AHO} = \frac{AO}{AH} = \frac{33}{40} \longrightarrow \widehat{AHO} = \arcsin\left(\frac{33}{40}\right)$. **Chọn A.**

Câu 336. Gọi ℓ, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $R^2 = h^2 + \ell^2$. B. $h = \ell$. C. $\ell^2 = h^2 + R^2$. D. $R = h$.

Lời giải. Chọn B.

Câu 337. Người ta ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối hộp chữ thập (tham khảo hình bên dưới). Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập đó.



- A. $S_{\text{tp}} = 20a^2$. B. $S_{\text{tp}} = 12a^2$. C. $S_{\text{tp}} = 30a^2$. D. $S_{\text{tp}} = 22a^2$.

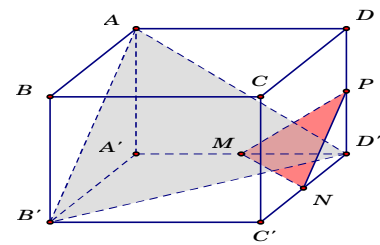
Lời giải. Diện tích mỗi mặt của một hình lập phương là a^2 .

Diện tích toàn phần của 5 khối lập phương là $5 \cdot 6a^2 = 30a^2$.

Khi ghép thành khối hộp chữ thập, đã có $4 \cdot 2 = 8$ mặt ghép vào phía trong, do đó diện tích toàn phần cần tìm là $30a^2 - 8a^2 = 22a^2$. **Chọn D.**

Câu 338. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4$, $AD = 5$, $AA' = 6$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$, $C'D'$ và DD' (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (MNP) bằng

- A. $\frac{181}{469}$. B. $\frac{120\sqrt{13}}{469}$. C. $\frac{19}{469}$. D. $\frac{60\sqrt{61}}{469}$.



Lời giải. Đối với những bài công kênh và tính toán rất phức tạp

thế này thì nên tọa độ hóa giải rất nhanh, khỏi phải mất nhiều

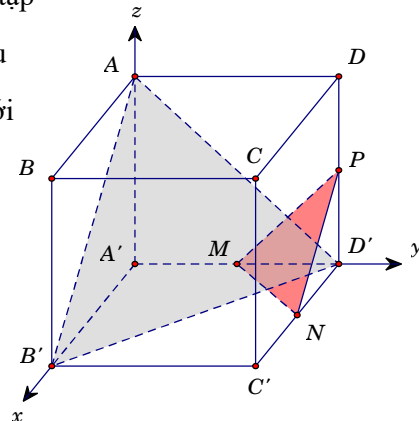
thời gian và tư duy. Gắn trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên với

● $A'(0;0;0)$, $D(0;5;6)$, $C'(4;5;0)$

$\longrightarrow \vec{n}_{(DA'C')} = (-30; 24; -20)$.

● $A(0;0;6)$, $B'(4;0;0)$, $D'(0;5;0)$

$\longrightarrow \vec{n}_{(AB'D')} = (30; 24; 20)$.

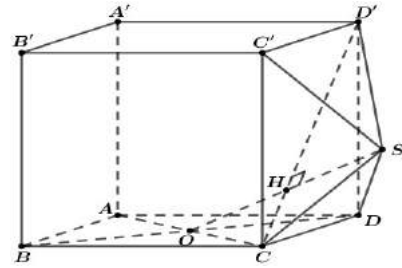


Vì $(MNP) \parallel (DA'C')$ $\rightarrow \cos((MNP), (AB'D')) = \cos((DA'C'), (AB'D')) = \frac{|-30.30 + 24.24 - 20.20|}{30^2 + 24^2 + 20^2} = \frac{181}{469}$

Chọn A.

Câu 339. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, S là điểm đối xứng với O qua CD' (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối đa diện $ABCDSA'B'C'D'$ bằng

- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{3a^3}{2}$. C. $\frac{7a^3}{6}$. D. $\frac{4a^3}{3}$.



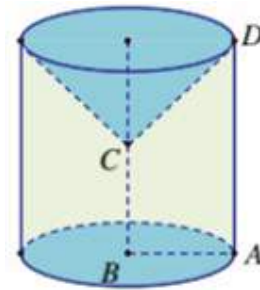
Lời giải. Ta có $V_{ABCDSA'B'C'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} + V_{S.CDD'C'}$.

Vì S là điểm đối xứng với O qua CD' nên $d_{(S, (CDD'C'))} = d_{(O, (CDD'C'))} = \frac{a}{2}$.

Do đó $V_{S.CDD'C'} = \frac{1}{3} d_{(S, (CDD'C'))} \cdot S_{CDD'C'} = \frac{a^3}{6}$. Vậy $V_{ABCDSA'B'C'D'} = \frac{a^3}{6} + a^3 = \frac{7a^3}{6}$. **Chọn B.**

Câu 340. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Tính thể tích V của khối nón tròn xoay được tạo thành.

- A. $V = \pi a^3$. B. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. C. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. D. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.



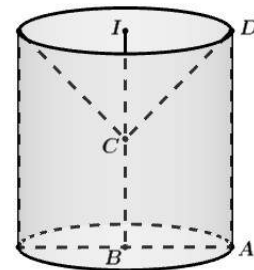
Lời giải. Thể tích của trụ có đường cao AD , bán kính đáy BA là:

$$V_1 = \pi BA^2 \cdot AD = 2\pi a^3.$$

Thể tích khối nón có đường cao IC , bán kính đáy ID là:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi ID^2 \cdot IC = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Vậy $V = V_1 - V_2 = \frac{5\pi a^3}{3}$. **Chọn C.**

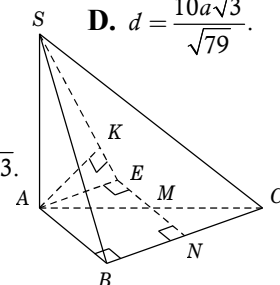


Câu 341. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM .

- A. $d = a\sqrt{3}$. B. $d = 5a\sqrt{3}$. C. $d = \frac{5a}{2}$. D. $d = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải.

Xác định được $60^\circ = \widehat{SC, (ABC)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.



Gọi N là trung điểm BC , suy ra $MN \parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M , suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $d[AB, SM] = d[AB, (SME)] = d[A, (SME)]$.

Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A, (SME)] = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. **Chọn D.**

Câu 342. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

A. 30° .

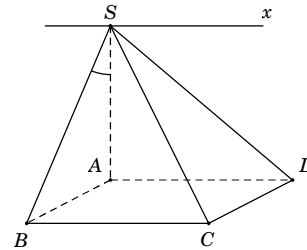
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải. Nhắc lại cách xác định góc giữa hai mặt phẳng: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến".

- Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là $Sx \parallel AD \parallel BC$.
- $\begin{cases} SA \perp AD \\ AD \parallel Sx \end{cases} \longrightarrow SA \perp Sx$.
- $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \longrightarrow AD \perp (SAB) \longrightarrow AD \perp SB \xrightarrow{AD \parallel Sx} Sx \perp SB$.



Vậy $\widehat{(SBC), (SAD)} = \widehat{SB, SA} = \widehat{BSA} = 45^\circ$ (do tam giác SAB vuông cân). **Chọn B.**

Câu 343. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B. $d = \frac{a}{2}$.

C. $d = a$.

D. $d = a\sqrt{3}$.

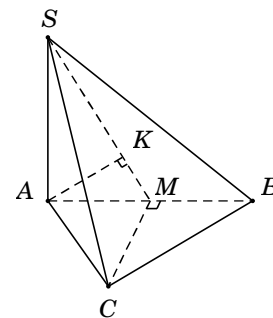
Lời giải. Xác định được $60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$ và $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Do M là trung điểm của cạnh AB nên $d[B, (SMC)] = d[A, (SMC)]$.

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $d[A, (SMC)] = AK$.

Tam giác vuông SAM , có $AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d[B, (SMC)] = AK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$. **Chọn A.**



Câu 344. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S , $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 2a^3$.

B. $V = 4a^3$.

C. $V = 6a^3$.

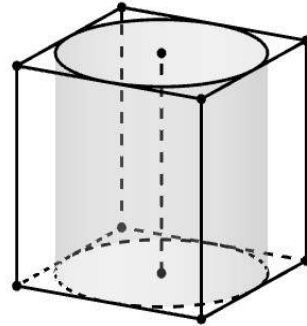
D. $V = 12a^3$.

Lời giải. Ta chọn (SBC) làm mặt đáy \longrightarrow chiều cao khối chóp là $d[A, (SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S_{\Delta SBC} \cdot d[A, (SBC)] = 2a^3$. **Chọn A.**

Câu 345. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương (tham khảo hình vẽ bên). Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích toán phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (cm²).



- A. $S = 4(2400 + \pi)$. B. $S = 4(2400 + 3\pi)$.
C. $S = 2400(4 + \pi)$. D. $S = 2400(4 + 3\pi)$.

Lời giải. Diện tích toàn phần của hình lập phương là $S_1 = 6 \cdot 40^2 = 9600$ (cm²).

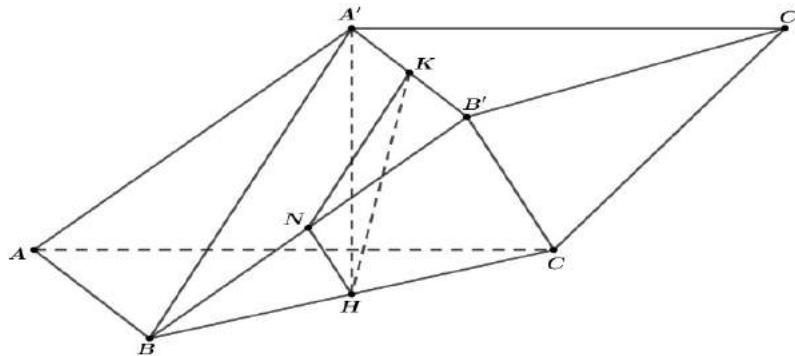
Hình trụ có bán kính đáy là 20cm và đường cao là 40cm nên diện tích toàn phần của hình trụ là $S_2 = 2 \cdot \pi \cdot 20^2 + 2\pi \cdot 20 \cdot 40 = 2400\pi$ (cm²).

Vậy $S = S_1 + S_2 = 2400(4 + \pi)$ (cm²). **Chọn C.**

Câu 346. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{48}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi N, K là trung điểm của $BB', A'B' \Rightarrow \begin{cases} NH // B'C \\ NK // A'B \end{cases} \longrightarrow \widehat{(A'B, B'C)} = \widehat{(HN, HK)} = \varphi$.

Ta tính được $A'B = a\sqrt{6}, B'C = 2a\sqrt{2} \longrightarrow NK = \frac{a\sqrt{6}}{2}, NH = a\sqrt{2}, HK = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

Áp dụng định lí hàm cosin ta suy ra $\cos \varphi = \frac{|NK^2 + NH^2 - HK^2|}{2 \cdot NH \cdot NK} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$. **Chọn D.**

Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $A'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$.

Từ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ $\longrightarrow B'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$.

Suy ra $\overline{A'B} = \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$ và $\overline{B'C} = \left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$. Tính được $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Câu 347. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 60° . Gọi M , N là trung điểm các cạnh bên SA và SB . Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (DMN) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{465}}{31}$.

B. $\frac{a\sqrt{31}}{\sqrt{60}}$.

C. $\frac{a\sqrt{60}}{31}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{31}}$.

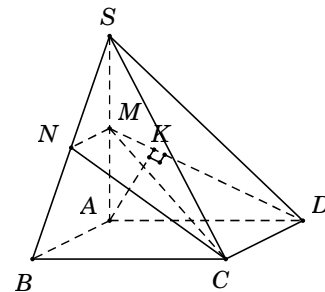
Lời giải. Xác định được $60^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SCA}$.

Vì M là trung điểm SA nên

$$d[S, (DMN)] = d[A, (DMN)] = d[A, (CDM)].$$

Kẻ $AK \perp DM$ và chứng minh được $AK \perp (CDM)$ nên

$$d[A, (CDM)] = AK.$$



Trong tam giác vuông MAD tính được $AK = \frac{2a\sqrt{465}}{31}$. **Chọn A.**

Câu 348. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^\circ$.

B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

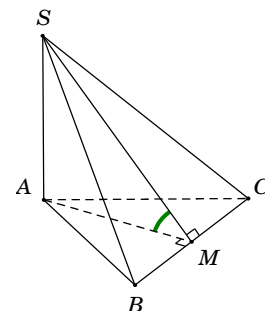
D. $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM.$$

Do đó $\widehat{(SBC), (ABC)} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA}$.

Tam giác ABC đều cạnh a , suy ra trung tuyến $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Tam giác vuông SAM , có $\sin \widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 349. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh B , với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

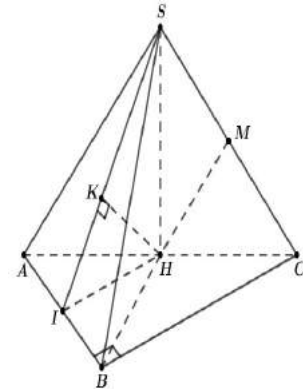
Lời giải. Gọi H là trung điểm của AC . Đỉnh S cách đều các điểm $A, B, C \longrightarrow SH \perp (ABC)$.

Xác định được $60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SBH}$.

Ta có $MH \parallel SA \longrightarrow d[M, (SAB)] = d[H, (SAB)]$.

Gọi I là trung điểm của $AB \longrightarrow HI \perp AB$.

Kẻ $HK \perp SI$ ($K \in SI$) và chứng minh được $HK \perp (SAB)$ nên $d[H, (SAB)] = HK$.



Trong tam giác vuông SHI tính được $HK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$. **Chọn A.**

Câu 350. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.

- A. $r = 4a$. B. $r = 6a$. C. $r = 4\pi$. D. $r = 8a$.

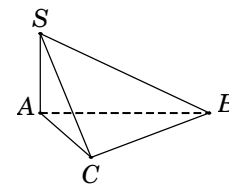
Lời giải. Ta có $S_{xq} = 2\pi r\ell \longrightarrow r = \frac{S_{xq}}{2\pi\ell} = \frac{16\pi a^2}{2\pi \cdot 2a} = 4a$. **Chọn A.**

Câu 351. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4, AB = 6, BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 40$. B. $V = 192$. C. $V = 32$. D. $V = 24$.

Lời giải. Tam giác ABC , có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$

\longrightarrow tam giác ABC vuông tại $A \longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$.

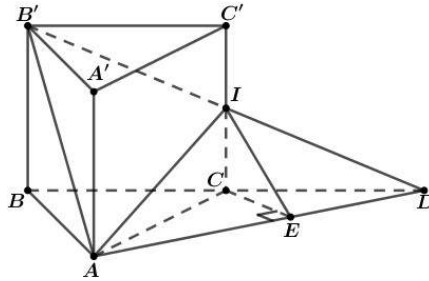


Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = 32$. **Chọn C.**

Câu 352. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB = AC = 1$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh CC' . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{70}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{20}$. D. $\frac{\sqrt{370}}{20}$.

Lời giải.



Gọi $D = B'I \cap BC$, kẻ $CE \perp AD$, ta chứng minh được $AD \perp IE \longrightarrow \widehat{(ABC), (AB'I)} = \widehat{IEC}$.

Ta tính được $BC = \sqrt{3} \Rightarrow CD = \sqrt{3}$, $AD = BD^2 + BA^2 - 2BD \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{7}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{ADB} = \frac{DB^2 + DA^2 - AB^2}{2DB \cdot DA} = \frac{9}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \sin \widehat{ADB} = \frac{\sqrt{7}}{14} = \frac{CE}{CD} \longrightarrow CE = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow IE = \frac{\sqrt{70}}{14}.$$

Vậy $\cos(\widehat{(ABC), (AB'I)}) = \cos \widehat{IEC} = \frac{CE}{IE} = \frac{\sqrt{30}}{10}$. **Chọn A.**

Câu 353. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12cm^3 . Tính thể tích của tứ diện $AB'CD'$.

A. 2cm^3 .

B. 3cm^3 .

C. 4cm^3 .

D. 5cm^3 .

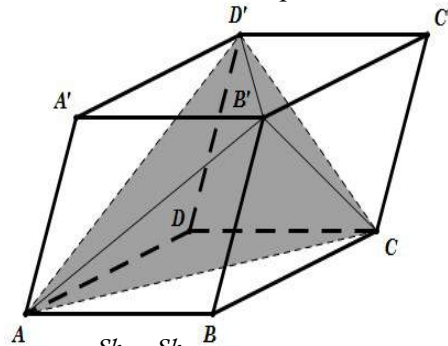
Lời giải. Gọi S là diện tích đáy của tứ giác $ABCD$ và h là chiều cao của khối hộp.

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành khối tứ diện $AB'CD'$

và 4 khối chóp $A.A'B'D'$, $C.B'C'D'$, $B'.BAC$, $D'.DAC$.

$$\text{Mà } S_{\Delta A'B'D'} = S_{\Delta B'C'D'} = S_{\Delta BAC} = S_{\Delta DAC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{S}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{A.A'B'D'} = V_{C.A'B'D'} = V_{B'.BAC} = V_{D'.DAC} = \frac{Sh}{6}.$$



$$\text{Vậy } V_{AB'CD'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - (V_{A.A'B'D'} + V_{C.A'B'D'} + V_{B'.BAC} + V_{D'.DAC}) = Sh - 4 \cdot \frac{Sh}{6} = \frac{Sh}{3} = 4\text{cm}^3. \text{ **Chọn C.**}$$

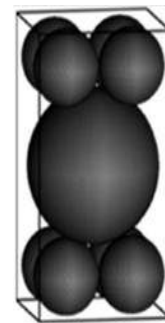
Câu 354. Một khối hộp chữ nhật có kích thước $4\text{cm} \times 4\text{cm} \times h\text{cm}$ chứa một quả cầu lớn và tám quả cầu nhỏ. Biết quả cầu lớn có bán kính bằng $R = 2\text{cm}$ và quả cầu nhỏ có bán kính bằng $r = 1\text{cm}$; các quả cầu tiếp xúc nhau và tiếp xúc các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Tìm h .

A. $h = 2(1 + 2\sqrt{2})$ (cm).

B. $h = 2(3 + \sqrt{7})$ (cm).

C. $h = 2(1 + \sqrt{7})$ (cm).

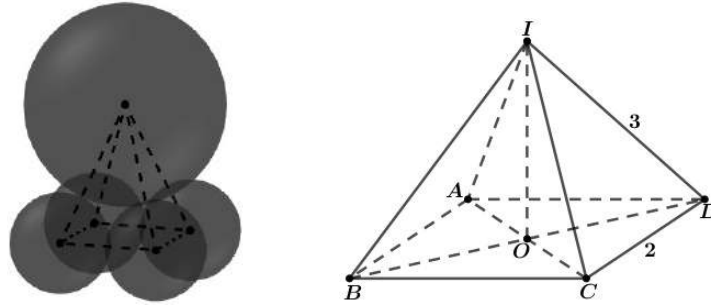
D. $h = 8$ (cm).



Lời giải.

Gọi tâm của quả cầu lớn là I . Tâm của 4 quả cầu nhỏ nằm bên dưới lần lượt là A, B, D, C .

Khi đó $I.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và có độ dài các cạnh như hình vẽ bên dưới.



Ta có $CD = r + r = 2\text{cm}$ và $ID = R + r = 3\text{cm}$.

Gọi $O = AC \cap BD \rightarrow SO = \sqrt{7}$. Vậy $h = 2(1 + \sqrt{7})$ (cm). **Chọn C.**

Câu 355. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

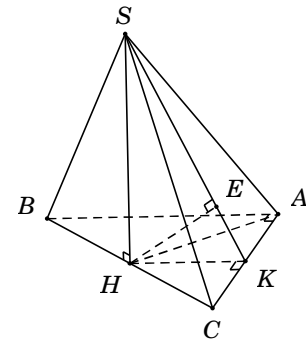
D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$).

Khi đó $d[B, (SAC)] = 2d[H, (SAC)] = 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.



Chọn C.

Câu 356. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \frac{5}{\sqrt{15}}$.

B. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

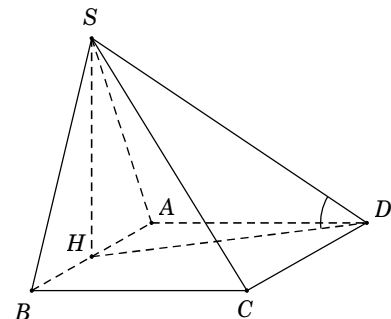
D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SD trên $(ABCD)$ là HD .

Do đó $\widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

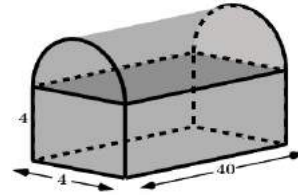
• Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



- $HD = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tam giác vuông SHD , có $\cot \widehat{SDH} = \frac{DH}{SH} = \frac{5}{\sqrt{15}}$. **Chọn A.**

Câu 357. Một thùng thư, được thiết kế như hình vẽ bên, phần phía trên là nửa hình trụ. Thể tích của thùng đựng thư là

- A. $640 + 160\pi$. B. $640 + 80\pi$.
C. $640 + 40\pi$. D. $320 + 80\pi$.



Lời giải. Thể tích phần phía dưới là $V_1 = 4.4.40 = 640$.

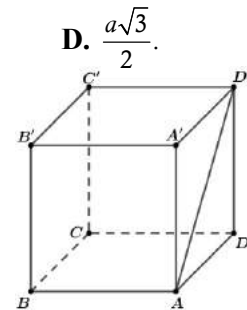
Thể tích phần bên trên là $V_2 = \frac{1}{2} \times (2^2 \pi \cdot 40) = 80\pi$. Vậy $V = V_1 + V_2 = 640 + 80\pi$. **Chọn B.**

Câu 358. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB, C'D'$ bằng

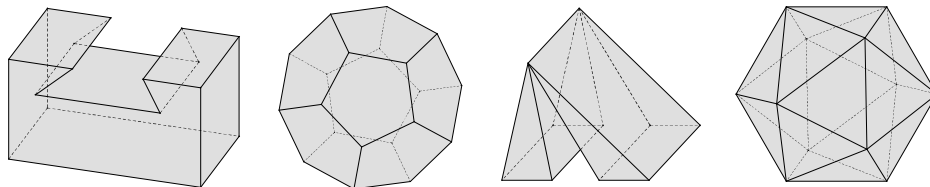
- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $d(AB, C'D') = AD' = a\sqrt{2}$. **Chọn B.**



Câu 359. Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?



- A. B. C. D.

Lời giải. Chọn C. Vì hình C vi phạm tính chất "Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác".

Câu 360. Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$; thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình tròn có diện tích bằng 3π . Thể tích của vật thể bằng

- A. $3\pi^2$. B. 6π . C. 6 . D. 2π .

Lời giải. Thể tích của vật thể: $V = \int_{-1}^1 3\pi dx = 6\pi$. **Chọn B.**

Câu 361. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD , góc giữa SM và mặt phẳng đáy bằng 60° . Độ dài cạnh SA bằng

A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{15}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

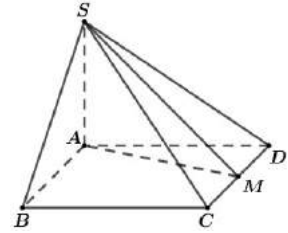
D. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải. Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AM là hình chiếu của SM lên $(ABCD)$.

Do đó góc giữa SM và $(ABCD)$ là $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

Ta có $AM^2 = AD^2 + MD^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A , có $SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2} \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.



Chọn D.

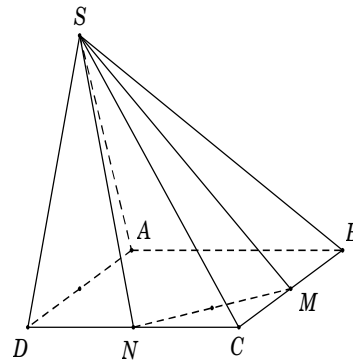
Câu 362. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD (tham khảo hình vẽ bên). Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$.

C. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$.



Lời giải. Áp dụng công thức tìm nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $R = \sqrt{x^2 + r^2}$ với

- r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- $x = \frac{SO^2 - r^2}{2h}$: S là đỉnh hình chóp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao khối chóp.

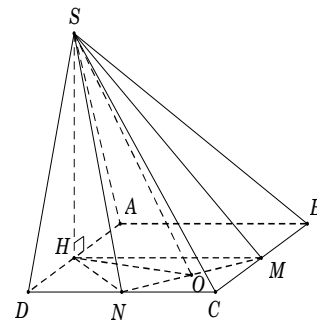
Cụ thể vào bài toán:

• Đáy là tam giác CMN vuông tại C nên $r = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

• Chiều cao $h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN là trung điểm MN ;

Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác HMN tính được $HO^2 = \frac{5a^2}{8}$.



Trong tam giác vuông SHO có $SO^2 = SH^2 + HO^2 = \frac{11a^2}{8}$.

Suy ra $x = \frac{SO^2 - r^2}{2h} = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$. Vậy $R = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{5a}{4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. **Chọn D.**

Câu 363. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM, BD = \frac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{26}{13}$. B. $\frac{26}{19}$. C. $\frac{3}{19}$. D. $\frac{15}{19}$.

Lời giải. Lời khuyên cho giáo viên nên cho học sinh biết định lý Menelaus để làm trắc nghiệm về phần này cho nhanh, việc chứng minh định lý cũng hoàn toàn đơn giản (dựa vào Talet).

Chắc chắn ta cần tính tỉ số $\frac{IB}{IA}$ và $\frac{DR}{DA}$.

Theo Menelaus, ta có

$$\begin{cases} \frac{PC}{PA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \\ \frac{RD}{RA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{ND} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{IA}{IB} = 2 \\ \frac{RD}{RA} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra M là trọng tâm $\triangle CAI$.

Ta có $V_{BMNAPR} = V_{LAPR} - V_{IBM} = \frac{4}{5}V_{ABCD} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}V_{ABCD} = \frac{26}{45}V_{ABCD} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. **Chọn B.**

• $V_{LAPR} = \frac{4}{5}V_{ABCD}$ vì $\begin{cases} S_{\triangle LAP} = S_{\triangle ABC} \\ d[R, (ABC)] = \frac{4}{5}d[D, (ABC)] \end{cases}$

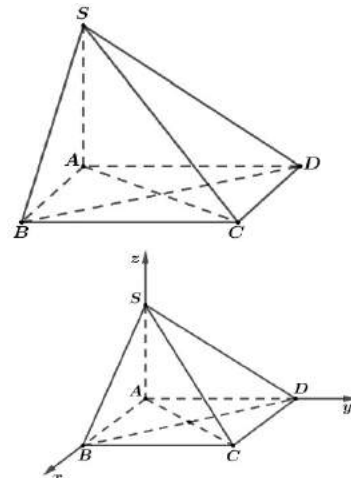
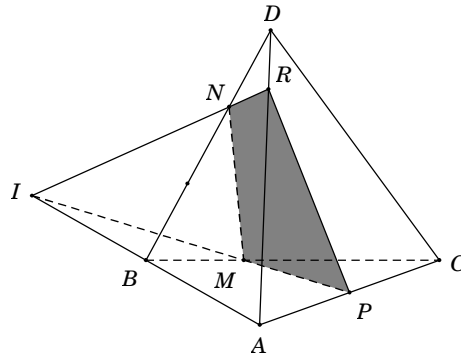
• $V_{IBM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}V_{ABCD}$ vì $\begin{cases} S_{\triangle IBM} = \frac{1}{3}S_{\triangle LAP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \\ d[N, (ABC)] = \frac{2}{3}d[D, (ABC)] \end{cases}$.

Câu 364. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc 60° .

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = a$. C. $x = \frac{3a}{2}$. D. $x = 2a$.

Lời giải. Để cho gọn ta chọn $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho



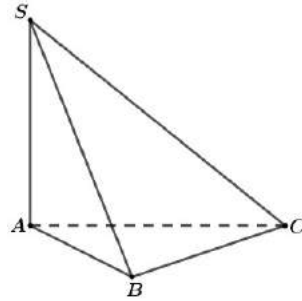
$A \equiv O(0;0;0)$ và $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;x)$ với $x = SA > 0$. Suy ra $C(1;1;0)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = (1;0;0) \\ \overrightarrow{SC} = (1,1,-x) \end{cases} \longrightarrow$ VTPT của mặt phẳng (SCD) là $[\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{SC}] = (0; x; 1) = \vec{n}_1$.

$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (0;1;0) \\ \overrightarrow{SB} = (1,0,-x) \end{cases} \longrightarrow$ VTPT của mặt phẳng (SBC) là $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}] = (x; 0; -1) = \vec{n}_2$.

Từ giả thiết bài toán, ta có $\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-1|}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = 1 = a$. **Chọn B.**

Câu 365. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Xác định được $60^\circ = \widehat{(ABC), (SBC)} = \widehat{SBA}$.

Khi đó ta tính được $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

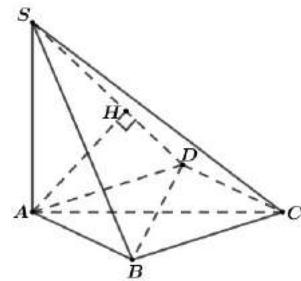
Trong mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật $\longrightarrow AB \parallel (SCD)$

nên $d[AB, SC] = d[AB, (SCD)] = d[A, (SCD)]$.

Kẻ $AH \perp SD$ ($H \in SD$). (1)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SCD)$ nên $d[A, (SCD)] = AH$.



Xét tam giác vuông SAD có $AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{SA \cdot BC}{\sqrt{SA^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d[AB, SC] = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

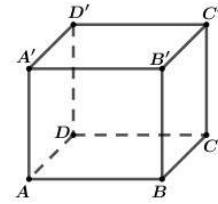
Câu 366. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Xét hình chóp $AA'BD$ có $AA' = AB = AD$ và đôi một vuông góc với nhau nên

$$\frac{1}{d^2[A, (A'BD)]} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = 3.$$

Vậy $d[A, (A'BD)] = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **Chọn D.**



Câu 367. Một khối nón và một khối trụ có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Tổng thể tích của khối nón và khối trụ đó là

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{10\pi}{3}$. D. 4π .

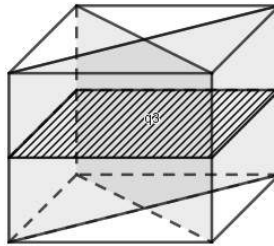
Lời giải. Thể tích khối nón $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}\pi$. Thể tích khối trụ $V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$.

Tổng thể tích $V = \frac{1}{3}\pi + \pi = \frac{4}{3}\pi$. **Chọn B.**

Câu 368. Hình hộp đứng đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.



Chọn C.

Câu 369. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng O). Biết $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C . Tính $T = a^2 + b^2$.

- A. $T = 4$. B. $T = 5$. C. $T = 9$. D. $T = 16$.

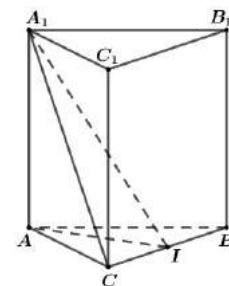
Lời giải. Gọi I là trung điểm của $BC \rightarrow I(0; 0; 1)$.

Do $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$, mà $BC \perp AA_1 \Rightarrow BC \perp (AA_1I) \Rightarrow BC \perp A_1I$
 $\rightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của A_1 trên Oz .

Ta có $d(A_1, Oz) = A_1I = 2 \rightarrow AI = \sqrt{A_1I^2 - AA_1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra $CI = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ (do tam giác ABC đều)

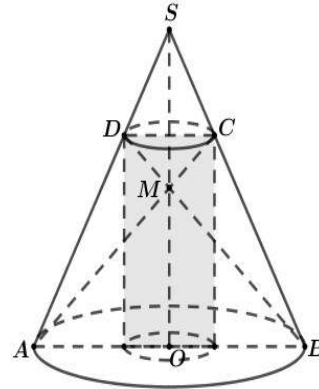
Vì $C \in Oz$ nên gọi $C(0; 0; c)$ với $c \neq 0$.



Từ $IC = 1 \Rightarrow (c-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0(\text{loại}) \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow C(0;0;2) \rightarrow \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3};1;1).$

Chọn VTCP của A_1C là $\vec{u}(-2\sqrt{3};2;2) \rightarrow T = a^2 + b^2 = 16$. **Chọn D.**

Câu 370. Xét một hình trụ nội tiếp trong hình nón như hình bên, trong đó S là đỉnh hình nón, O là tâm đường tròn mặt đáy. Các đoạn AB, CD lần lượt là đường kính của đường tròn đáy của hình nón và hình trụ. Biết AC, BD cắt nhau tại điểm $M \in SO$, tỉ số thể tích của hình trụ và hình nón là $\frac{4}{9}$.



Tính tỉ số $\frac{SM}{SO}$.

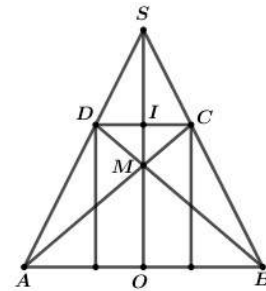
- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm DC .

Đặt $t = \frac{SI}{SO} = \frac{ID}{OA} = \frac{IM}{MO} \rightarrow \begin{cases} ID = t \cdot OA \\ IO = (1-t)SO \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $\frac{\pi \cdot t^2 \cdot OA^2 \cdot (1-t)SO}{\frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO} = \frac{4}{9} \rightarrow t = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{IM}{MO} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}$. **Chọn C.**



Câu 371. Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=1, OB=2, OC=3$. Tan của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

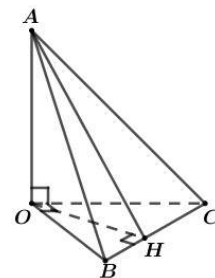
- A. $\frac{6}{7}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{6}$. C. $\frac{6\sqrt{13}}{13}$. D. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải. Kẻ $OH \perp BC$ ($H \in BC$), ta chứng minh được $(OAH) \perp (ABC)$

$\rightarrow \widehat{OA, (ABC)} = \widehat{OAH}$.

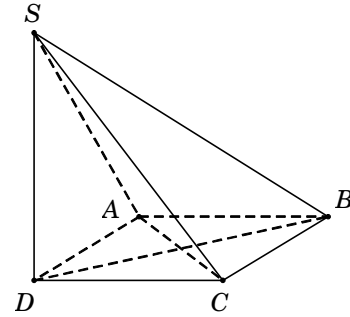
Ta có $OH = \frac{OB \cdot OC}{\sqrt{OB^2 + OC^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

Vậy $\tan \widehat{OA, (ABC)} = \tan \widehat{OAH} = \frac{OH}{OA} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$. **Chọn C.**

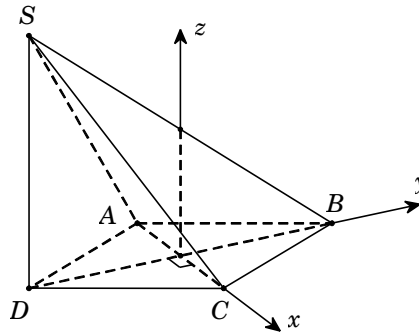


Câu 372. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên SD vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.
C. $\frac{a\sqrt{42}}{14}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{21}$.



Lời giải. Để cho gọn ta chọn $a = 2$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0)$ và $C(1;0;0)$, $B(0;\sqrt{3};0)$, $S(0;-\sqrt{3};x)$ với $x = SD > 0$.

Suy ra $A(-1;0;0)$ và $D(0;-\sqrt{3};0)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = (-1; \sqrt{3}; -x) \\ \overrightarrow{AB} = (1; \sqrt{3}; 0) \end{cases} \longrightarrow$ VTPT của mặt phẳng (SAB) là $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}] = (x\sqrt{3}; -x; -2\sqrt{3}) = \vec{n}_1$.

$\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (0; 2\sqrt{3}; -x) \\ \overrightarrow{BC} = (1; -\sqrt{3}; 0) \end{cases} \longrightarrow$ VTPT của mặt phẳng (SBC) là $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (-x\sqrt{3}; -x; -2\sqrt{3}) = \vec{n}_2$.

Từ giả thiết bài toán, ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \longrightarrow x = \sqrt{6}$.

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = (-1; \sqrt{3}; -\sqrt{6}) \\ \overrightarrow{AB} = (1; \sqrt{3}; 0) \\ \overrightarrow{DB} = (0; 2\sqrt{3}; 0) \end{cases} \longrightarrow d[SA, BD] = \frac{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{DB}]\|} = \frac{\sqrt{42}}{7} = \frac{2\sqrt{42}}{14} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$. **Chọn C.**

Câu 373. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, B'C'$. Côsin góc giữa hai đường thẳng MN và AC bằng

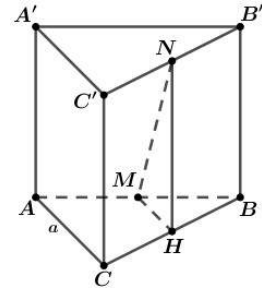
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $MH \parallel AC$

$$\longrightarrow \widehat{(MN, AC)} = \widehat{(MN, MH)} = \widehat{NMH}.$$

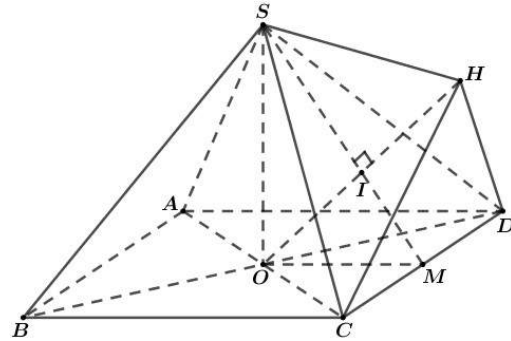
Ta có $MH = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, $NH = BB' = a \longrightarrow MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\cos \widehat{(MN, AC)} = \frac{MH}{MN} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**



Câu 374. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O ; cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của O qua SM (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối đa diện $ABCDSH$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.



Lời giải. Khối đa diện $ABCDSH$ được chia thành hai khối chóp $S.ABCD$ và $H.SCD$.

● $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SB^2 - OB^2}.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

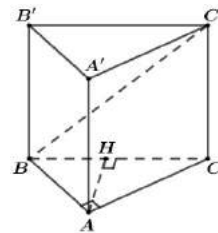
● Vì H là điểm đối xứng của O qua SM nên $d[O, (SCD)] = d[H, (SCD)]$

$$\longrightarrow V_{H.SCD} = V_{O.SCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{24}.$$

Vậy thể tích khối đa diện cần tính bằng $V_{S.ABCD} + V_{H.SCD} = \frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$. **Chọn D.**

Câu 375. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $BB'C'C$ là hình vuông. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. C. a . D. $a\sqrt{3}$.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BB'C'C) \Rightarrow AH \perp BC'$.

Suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC' nên

$$d[AA', BC'] = AH = \frac{AB.CA}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 376. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V = 3$.

B. $V = 4$.

C. $V = 5$.

D. $V = 6$.

Lời giải. Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3}.12 = 4$. **Chọn B.**

Câu 377. Hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. 2.

B. 3.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải. Đường sinh hình nón: $l = \frac{h}{\cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right)} = 2$. **Chọn A.**

Câu 378. Cho hình lăng trụ tam giác có diện tích đáy bằng 10cm^2 và chiều cao bằng 6cm . Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V = 20\text{cm}^3$.

B. $V = 40\text{cm}^3$.

C. $V = 60\text{cm}^3$.

D. $V = 80\text{cm}^3$.

Đáp án C

Ta có thể tích của khối lăng trụ: $V = h.S_{\text{đáy}} = 6.10 = 60 \text{ cm}^3 \rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 379. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và thể tích của khối chóp bằng a^3 . Chiều cao h của hình $S.ABC$ ứng với đỉnh S bằng bao nhiêu?

A. $h = 4a\sqrt{3}$.

B. $h = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

C. $h = a\sqrt{3}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Đáp án A

Do ABC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Khi đó $V = \frac{1}{3}h.S_{\Delta ABC} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 4a\sqrt{3} \rightarrow$ **Đáp án A**

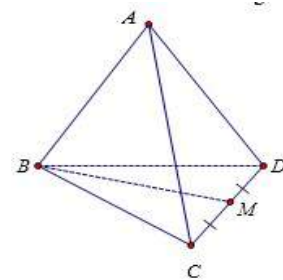
Câu 380. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của CD (như hình vẽ). Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BM .

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



Đáp án D

Câu 381. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có tam giác ABC vuông cân tại B . Biết $AB = a\sqrt{2}$ và $AA' = a\sqrt{6}$. Khi đó diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đứng đã cho là

- A. $4\pi a^2$. B. $2\pi a^2\sqrt{6}$. C. $4\pi a^2\sqrt{6}$. D. $\pi a^2\sqrt{6}$.

Đáp án B.

Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao AA' ; tâm của đáy là trung điểm của AC nên $R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = a$.

Diện tích xung quang của hình trụ đó là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot a \cdot a\sqrt{6} = 2\pi a^2\sqrt{6}$.

Câu 382. Một khối trụ có thể tích $\frac{2}{\pi} \text{ cm}^3$. Cắt hình trụ này theo đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thu được một hình vuông. Diện tích hình vuông này là

- A. 4 cm^2 . B. 2 cm^2 . C. $4\pi \text{ cm}^2$. D. $2\pi \text{ cm}^2$.

Đáp án A.

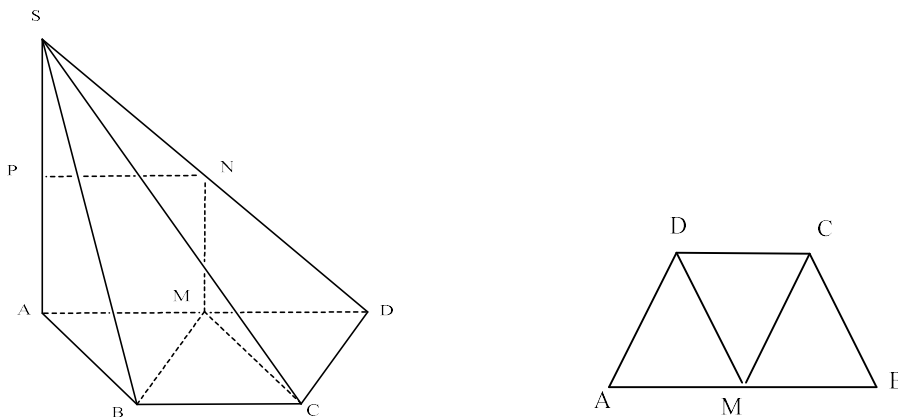
Cắt khối trụ theo đường sinh rồi trải ra một mặt phẳng thì được một hình vuông nên $h = P_{\text{đáy}}$.

$$\rightarrow h = 2\pi R \rightarrow R = \frac{h}{2\pi} \rightarrow V = Sh = \pi R^2 h = \frac{h^3}{4\pi} = \frac{2}{\pi} \rightarrow h = 2 \rightarrow S_{\text{hv}} = 2^2 = 4.$$

Câu 383. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 8\pi a^2$. B. $S = \frac{8\pi a^2}{3}$. C. $S = 4\pi a^2$. D. $S = 2\pi a^2$.

Đáp án A.

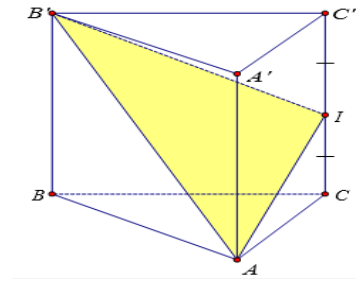


$ABCD$ là hình thang cân có $AB = BC = CD = a$; $AD = 2a$ nên M là tâm của đáy $ABCD$.

$SA = AD = 2a$; $SA \perp (ABCD) \rightarrow$ tam giác SAD vuông cân tại A nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm N của SD

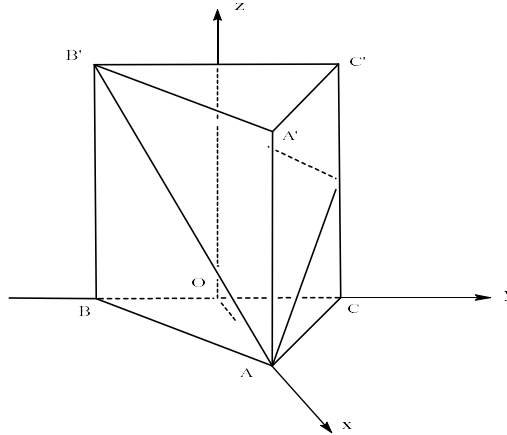
$$\rightarrow R = \frac{SD}{2} = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2} \rightarrow S_{\text{mc}} = 4\pi R^2 = 8\pi a^2.$$

Câu 384. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$; $\angle BAC = 120^\circ$ và $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' (như hình vẽ). Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.



- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Đáp án A.



Gắn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ $\rightarrow A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$; $B\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$;
 $C'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$; $I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ $B'\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$.

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}_1 = [\overline{AB}; \overline{AC}] = \left(0; 0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'I)$ là $\vec{n}_2 = [\overline{AB'}; \overline{AI}] = \left(-\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; -\frac{a^2}{4}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\rightarrow \cos((ABC); (AB'I)) = |\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\frac{3}{4}a^4}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 385. Một khối trụ (N) có diện tích xung quanh bằng $4\pi\sqrt{3}$ và chiều cao là một số nguyên ngoại tiếp một khối nón (N') có đường sinh bằng $\sqrt{7}$. Tính thể tích V phần không gian bên ngoài khối nón và bên trong khối trụ.

- A. $V = 2\pi$. B. $V = 4\pi$. C. $V = 6\pi$. D. $V = 8\pi$.

Đáp án B.

Khối nón (N') có đáy là đáy hình trụ, đỉnh là tâm của đáy kia hình trụ.

Gọi chiều cao khối trụ cũng như khối nón là h .

$$l = \sqrt{7} = \sqrt{h^2 + R^2} \rightarrow R = \sqrt{7 - h^2} \rightarrow S_{xq} = 2\pi Rh \rightarrow 2\pi h \sqrt{7 - h^2} = 4\pi\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow h^4 - 7h^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 3 \rightarrow h = \sqrt{3} \\ h^2 = 4 \rightarrow h = 2 \end{cases} \xrightarrow{h \in \mathbb{Z}} h = 2 \rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow V = V_{\text{trụ}} - V_{\text{nón}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = 4\pi.$$

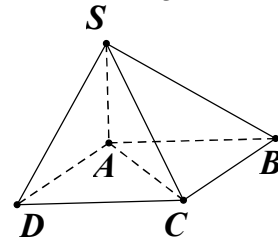
Câu 386. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy ($ABCD$) và SAC là tam giác vuông cân. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Đáp án D

Ta có $SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Câu 387. Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA'$; $SB = 3SB'$ và $SC = 4SC'$. Gọi V lần lượt là thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$. Khi đó tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng bao nhiêu?

A. 12. B. 24. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{12}$.

Đáp án C

Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Câu 388. Một hình nón có bán kính đáy $r = a$, chiều cao $h = 2a\sqrt{2}$. Diện tích toàn phần của hình nón được tính theo a là

A. πa^2 . B. $2\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $4\pi a^2$.

Đáp án D

$$S_p = \pi r(r + l) = \pi r \left(r + \sqrt{r^2 + h^2} \right) = \pi a \left(a + \sqrt{a^2 + 8a^2} \right) = 4\pi a^2.$$

Câu 389. Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, AD = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Cho hình chữ nhật quay quanh MN ta được một khối tròn xoay có thể tích V bằng

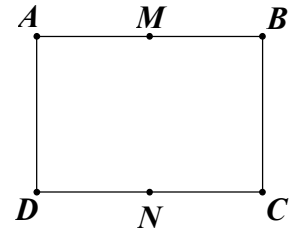
- A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = 8\pi$. C. $V = \frac{8\pi}{3}$. D. $V = 32\pi$.

Đáp án B

Khối tròn xoay tạo thành là khối trụ có bán kính là $r = \frac{AB}{2} = 2$

và chiều cao $r = AD = 2$.

Vậy $V = \pi r^2 h = 8\pi$.



Câu 390. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\angle ABC = 60^\circ$. Biết $BD = D'C$. Thể tích của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $2a^3$.

Đáp án A

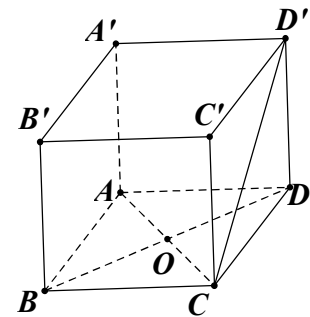
$\triangle ABC$ cân tại B ($BA = BC = a$) có $\widehat{ABC} = 60^\circ$

nên $\triangle ABC$ đều. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

$$\Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CD' = a\sqrt{3} \Rightarrow DD' = \sqrt{D'C^2 - DC^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ACBD} \cdot DD' = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot DD' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$



Câu 391. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Khi đó diện tích S_{mc} của mặt cầu đó là

- A. $S_{mc} = 16(a^2 + b^2 + c^2)\pi$. B. $S_{mc} = 8(a^2 + b^2 + c^2)\pi$.
C. $S_{mc} = 4(a^2 + b^2 + c^2)\pi$. D. $S_{mc} = (a^2 + b^2 + c^2)\pi$.

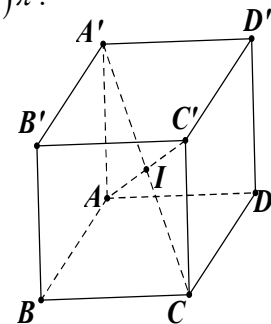
Đáp án D

Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình hộp

thì I là tâm mặt cầu cần tìm.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = IA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích của mặt cầu đó là } S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$



Câu 392. Cho khối chóp có thể tích $V = 30\text{cm}^3$ và diện tích đáy $S = 5\text{cm}^2$. Chiều cao h của khối chóp đó là

- A. $h = 6\text{cm}$. B. $h = 2\text{cm}$. C. $h = 18\text{cm}$. D. $h = 12\text{cm}$.

Đáp án C

$$\text{Ta có } h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 30}{5} = 18 \text{ (cm)}.$$

Câu 393. Cho hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$ và tạo với đáy góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ đó là

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

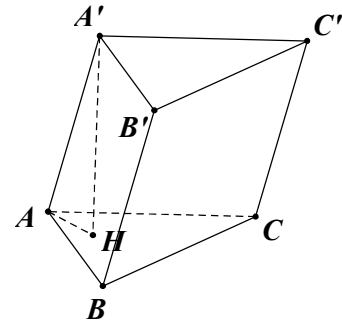
Đáp án B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) .

$$\Rightarrow \left(\overline{A'A}, (ABC) \right) = \widehat{A'AH} = 30^\circ$$

Chiều cao của lăng trụ là $A'H = A'A \cdot \sin 30^\circ = a$.

$$\text{Vậy thể tích hình lăng trụ là } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$



Câu 394. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S với đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ là

- A. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. B. $\frac{\pi a^2\sqrt{15}}{4}$. C. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{6}$. D. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$.

Đáp án A

Do $ABCD$ là hình vuông nên hình tròn nội tiếp $ABCD$ có bán kính là $r = \frac{a}{2}$.

$$\text{Vậy diện tích xung quanh của hình nón cần tìm là } S = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}.$$

Câu 395. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a và góc giữa đường cao và mặt bên là 30° . Khi đó thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = \frac{32a^3}{3}$. B. $V = \frac{32a^3}{9}$. C. $V = \frac{32a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 32a^3$.

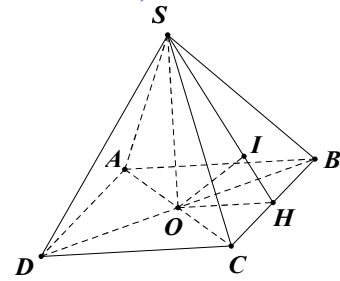
Đáp án B

Gọi H là trung điểm của BC . Kẻ $OI \perp SH \Rightarrow OI \perp (SBC)$.

Ta có $OI = a$ và $\widehat{OSI} = 30^\circ \Rightarrow SO = \frac{OI}{\sin 30^\circ} = 2a$.

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow OH = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

Vậy thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \left(\frac{4a}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 2a = \frac{32a^3}{9}$.



Câu 396. Một cái cốc hình trụ không nắp đường kính đáy bằng độ cao của cốc và bằng 10 cm . Hỏi chiếc cốc đó đựng được bao nhiêu nước?

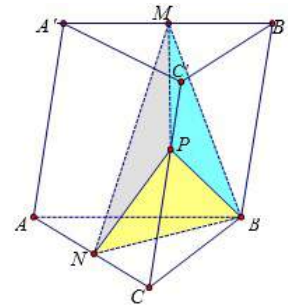
- A. $200\pi\text{ cm}^3$. B. $200\pi\text{ cm}^3$. C. $250\pi\text{ cm}^3$. D. $400\pi\text{ cm}^3$.

Đáp án C

Thể tích của cốc là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi\text{ cm}^3$.

Câu 397. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$ (như hình vẽ). Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

- A. $\frac{V}{3}$. B. $\frac{2V}{9}$. C. $\frac{4V}{9}$. D. $\frac{5V}{24}$.



Đáp án B

Ta có $V_{BMNP} = V - V_{MC'B'PB} - V_{MA'C'PNA} - V_{MANB} - V_{PNCB}$.

Lại có $V_{PNCB} = \frac{1}{3} d(P; (ABC)) S_{NBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} h \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{9} V$.

$$V_{MANB} = \frac{1}{3} d(M; (ABC)) S_{ANB} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{6} V.$$

$$\begin{aligned} V_{MC'B'PB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'C'B'BC} \quad (\text{do } d(M, (C'B'BC)) = \frac{1}{2} d(A', (C'B'BC)) \text{ và } S_{B'C'PB} = \frac{2}{3} S_{B'C'CB}) \\ &= \frac{1}{3} V_{A'C'B'BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{2}{9} V. \end{aligned}$$

$$V_{MA'C'PNA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} V_{B'C'A'AC} \quad (\text{do } d(M, (C'A'AC)) = \frac{1}{2} d(B', (C'A'AC)) \text{ và}$$

$$S_{A'C'PNA} = \frac{5}{6} S_{A'C'CA} = \frac{5}{12} V_{B'A'C'CA} = \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{5}{18} V.$$

Vậy $V_{BMNP} = V - \frac{2}{9}V - \frac{5}{18}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{9}V = \frac{2}{9}V$.

Câu 398. Thể tích của khối hộp lập phương có đường chéo bằng $3a$ là

- A. $\frac{27a^3\sqrt{2}}{4}$. B. a^3 . C. $3a^3\sqrt{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Đáp án C

Gọi cạnh của hình lập phương là x .

Đường chéo của hình lập phương được tính bằng công thức $x\sqrt{3} = 3a \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của hình lập phương là $(a\sqrt{3})^3 = 3a^3\sqrt{3}$.

Câu 399. Hình nón có bán kính đáy $r = 3cm$ và đường sinh $l = 4cm$. Khi đó diện tích toàn phần S_p của hình nón là

- A. $S_p = 12\pi cm^2$. B. $S_p = 21\pi cm^2$. C. $S_p = 18\pi cm^2$. D. $S_p = 30\pi cm^2$.

Đáp án B

Ta có $S_p = \pi r(r + l) = 21\pi (cm^2)$.

Câu 400. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a . Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của AB. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Thể tích V của khối chóp S.ABCD là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{18}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

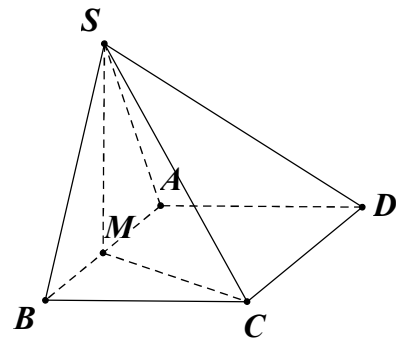
Đáp án D

Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, MC) = \widehat{SCM} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow SM = \tan 60^\circ \cdot MC = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$



Câu 401. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính **tang** của góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt đáy (ABC).

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đáp án B

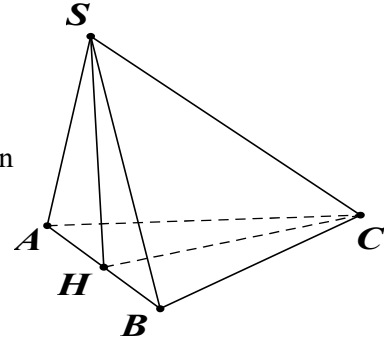
Gọi H là trung điểm của AB .

Do ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên

$$SH \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, HC}) = \widehat{SCH}.$$

$$\text{Ta có } BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}; SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4};$$

$$CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}. \quad \text{Vậy } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



Câu 402. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh một vòng quanh cạnh AB là

- A. 98π . B. 106π . C. 96π . D. 86π .

Đáp án C

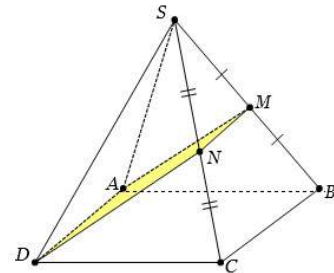
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay cạnh BC quanh AB . Ta có V_1 là thể tích khối nón có bán kính đáy $AC = 8$ và chiều cao $AB = 6 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi$.

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay cạnh BM quanh AB . Ta có V_2 là thể tích khối nón có bán kính đáy $AM = 4$ và chiều cao $AB = 6 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2 = 96\pi$.

Câu 403. Cho khối chóp S.ABCD có thể tích bằng 8. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và ABCD là hình bình hành (như hình vẽ). Biết diện tích của tứ giác AMND bằng 2. Tính khoảng cách h từ đỉnh S tới mặt phẳng (AMND).

- A. $h = \frac{3}{2}$. B. $h = \frac{8}{3}$. C. $h = 3$. D. $h = \frac{9}{2}$.



Đáp án D

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.ADNM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ADN} + V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ADN}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ADN}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}}$$

$$= \frac{SN}{2SC} + \frac{SN \cdot SM}{2SC \cdot SB} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{S.AMND} = 3 \Rightarrow h = \frac{3V_{S.AMND}}{S_{AMND}} = \frac{9}{2}.$$

Câu 404. Cho hình nón có bán kính đáy là r và độ dài đường sinh là l . Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón bằng bao nhiêu?

các cầu $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị biểu thức

$$T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V}$$

A. $\frac{7}{9}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{6}{13}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Đáp án C

Ta dễ dàng nhìn thấy quy luật của thể tích các khối cầu

$$SM = 3r_2$$

$$SO = 3r_1$$

$$\frac{SM}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{3}r_1$$

$$V_{Cau} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

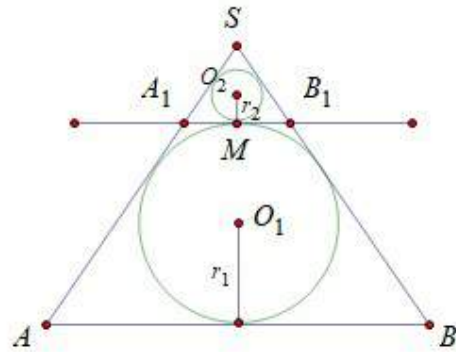
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{1}{27}V_1$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r_3^3 = \frac{1}{27}V_2$$

...

$$\Rightarrow T_n = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = V_1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{27})^n}{1-\frac{1}{27}}$$

$$\Rightarrow T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{V} = \frac{V_1}{(1-q)V_{Nón}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{(1-\frac{1}{27}) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3r_1 \cdot \pi \cdot (\sqrt{3}r_1)^2} = \frac{6}{13}$$



Câu 407. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $SA \perp BD$.

B. $SC \perp BD$.

C. $AD \perp SC$.

D. $SO \perp BD$.

Đáp án C.

$$SA \perp (ABCD) \rightarrow SA \perp BD \xrightarrow{AC \perp BD} BD \perp (SAC) \rightarrow SC \perp BD; SO \perp BD$$

Câu 408. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Tính góc của cặp đường thẳng MN và $C'D'$

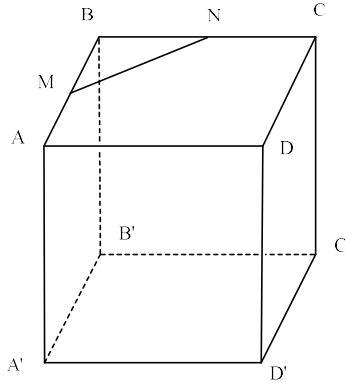
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Đáp án B.

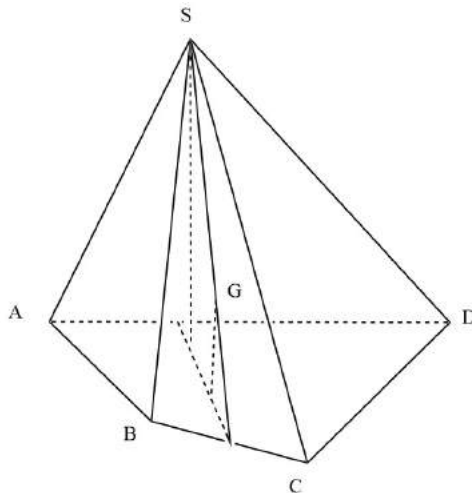


$$AB \parallel C'D' \rightarrow (MN; C'D') = (MN; AB) = \widehat{BMN} = 45^\circ.$$

Câu 409. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 36 và G là trọng tâm tam giác SBC . Thể tích V của khối chóp $G.ABCD$ là

- A. $V = 18$. B. $V = 9$. C. $V = 6$. D. $V = 12$.

Đáp án D.



$$\rightarrow \frac{V_{G.ABCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{d_{G/(ABCD)}}{d_{S/(ABCD)}} = \frac{1}{3} \rightarrow V_{G.ABCD} = 12.$$

Câu 410. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

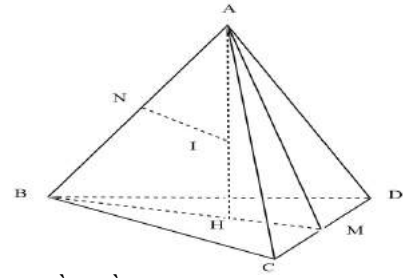
Đáp án B.

H là tâm của $\triangle BCD \rightarrow AH \perp (BCD)$. M là trung điểm của CD ; N là trung điểm của AB .

Trong mặt phẳng (ABM) , kẻ đường thẳng qua N , vuông góc với AB , cắt AH tại I . Khi đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Delta ANI \sim \Delta AHB \rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AI}{AB} \rightarrow R = AI = \frac{AN \cdot AB}{AH} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



Câu 411. Cho khối trụ có chiều cao $h = 3$ và diện tích toàn phần bằng 20π . Khi đó chu vi đáy của khối trụ là

- A. 2π . B. 4π . C. 6π . D. 8π .

Đáp án B.

$$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \rightarrow 20\pi = 2\pi R \cdot 3 + 2\pi R^2 \Leftrightarrow R^2 + 3R - 10 = 0 \Leftrightarrow R = 2 \rightarrow P_{\text{day}} = 2\pi R = 4\pi$$

Câu 412. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Đáp án A.

Gọi M là trung điểm của BC .

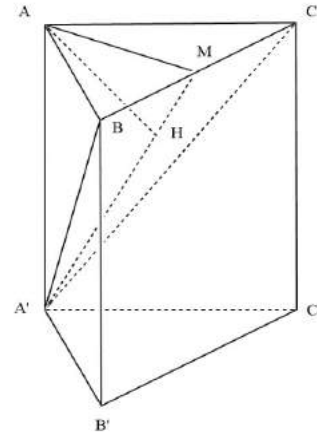
Trong mặt phẳng $(AA'M)$, kẻ $AH \perp A'M$.

$$\Delta A'BC \text{ cân tại } A \rightarrow A'M \perp BC \xrightarrow{AM \perp BC} BC \perp (AA'M)$$

$$\rightarrow BC \perp AH \xrightarrow{AH \perp A'M} AH \perp (A'BC)$$

$$\Delta AA'M \text{ vuông tại } A; AH \perp A'M \rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \rightarrow AA' = a\sqrt{3} \rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \cdot AA' = 3a^3$$

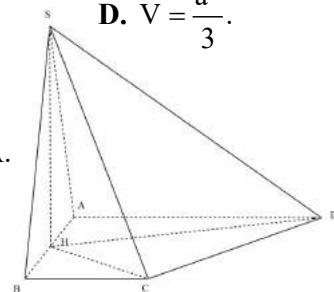


Câu 413. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB . Diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Thể tích V của khối chóp $S.HCD$ là

- A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Đáp án B.

SH vuông góc với AB tại trung điểm của AB nên ΔSAB cân tại A .



$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}SH.a = a^2 \rightarrow SH = 2a$$

$$S_{HCD} = S_{ABCD} - S_{HAD} - S_{HBC} = \frac{1}{2}.AB(AD + BC) - \frac{1}{2}AH.AD - \frac{1}{2}BH.BC = \frac{3}{4}a^2$$

$$\rightarrow V_{SHCD} = \frac{1}{3}SH.S_{HCD} = \frac{1}{3}.2a.\frac{3}{4}a^2 = \frac{a^3}{2}.$$

Câu 414. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$. Trên các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, B, C về cùng một phía của mặt phẳng (ABC) lấy các điểm A', B', C' sao cho $AA' = 3a, BB' = 2a, CC' = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $\frac{a^2\sqrt{39}}{3}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{26}}{2}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{35}}{2}$.

Đáp án D.

Trên AA' lấy M và N sao cho $AM = MN = NA' = a$;

Trên BB' lấy điểm P sao cho $BP = PB' = a$.

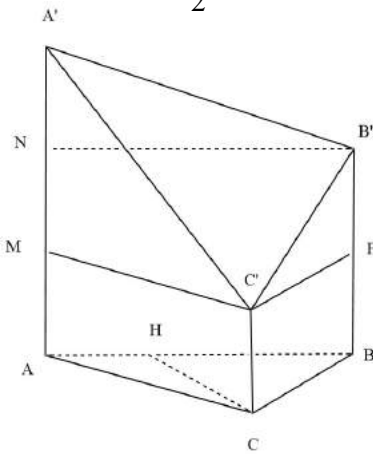
$CH \perp AB; CH = a \rightarrow BH = 2a \xrightarrow{\text{DL Pytago}} AC = a\sqrt{2}; BC = a\sqrt{5}$

$$A'C' = \sqrt{A'M^2 + MC'^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6};$$

$$B'C' = \sqrt{PB^2 + PC'^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{5})^2} = a\sqrt{6}$$

$$A'B' = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10} \rightarrow p = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{2} = a\sqrt{6} + \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\rightarrow S_{A'B'C'} = \sqrt{p(p - A'B')(p - B'C')(p - C'A')} = \frac{a^2\sqrt{35}}{2}.$$



Câu 415. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $k = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

B. $k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

C. $k = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$.

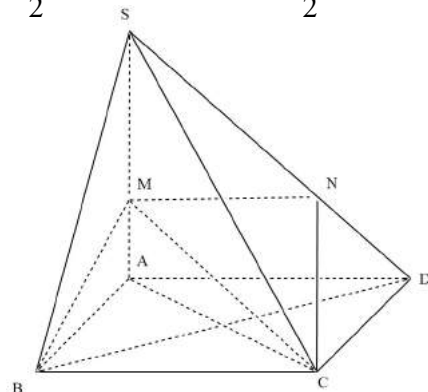
D. $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Đáp án

Kẻ $MN \parallel AD \parallel AD$ ($N \in SD$)

nên (BMC) cắt (SAD) theo giao tuyến là MN .

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k \rightarrow V_{S.MBC} = kV_{S.ABC} = \frac{k}{2}V_{S.ABCD}$$



$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{AD} = k^2 \rightarrow V_{S.MNC} = k^2 V_{S.ACD} = \frac{k^2}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\rightarrow V_{S.BMNC} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC} = \frac{k^2 + k}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \rightarrow k^2 + k - 1 = 0 \xrightarrow{k > 0} k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Câu 416. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB + SC = m (m > 2a)$. $BSC = CSA = ASB = 60^\circ$ và ΔABC vuông tại A . Tính thể tích chóp $S.ABC$ theo a và m .

A. $V = \frac{a^2(m-a)\sqrt{3}}{12}$.

B. $V = \frac{a^2(m-a)\sqrt{2}}{12}$.

C. $V = \frac{a^2(m-2a)\sqrt{3}}{12}$.

D. $V = \frac{a^2(m-2a)\sqrt{2}}{12}$.

Đáp án D.

Trên các tia SB ; SC lần lượt lấy các điểm B' ; C'

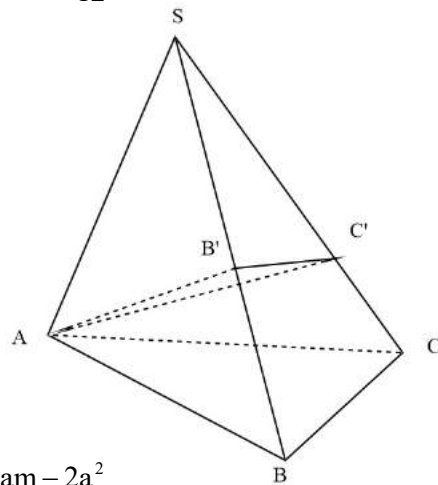
sao cho $SB' = SC' = SA = a$.

$\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ \rightarrow S.AB'C'$ là tứ diện đều

$$\rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \xrightarrow{\text{cosin}} \begin{cases} AB^2 = a^2 + SB^2 - a.SB \\ AC^2 = a^2 + SC^2 - a.SC \\ BC^2 = SB^2 + SC^2 - SB.SC \end{cases}$$

$$\xrightarrow{AB^2 + AC^2 = BC^2} 2a^2 - a(SB + SC) + SB.SC = 0 \rightarrow SB.SC = am - 2a^2$$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB' \cdot SC'}{SB \cdot SC} = \frac{SB' \cdot SC'}{SB.SC} = \frac{a^2}{a(m-2a)} = \frac{a}{m-2a} \rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^2(m-2a)\sqrt{2}}{12}$$



Câu 417. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a . Hai mặt phẳng (SAC) , (SAB) cùng vuông góc với đáy và góc tạo bởi SC và đáy bằng 60° . Tính khoảng cách h từ A tới mặt phẳng (SBC) theo a

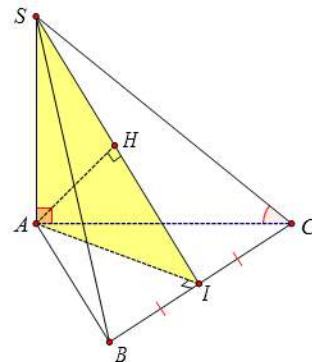
A. $h = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $h = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{5}$

Đáp án A Do $\left. \begin{array}{l} (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \cap (SAB) = SA \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (ABC)$



$$\Rightarrow (\angle SC, (\angle ABC)) = \angle SCA = 60^\circ \Rightarrow SA = AC \tan \angle SCA = a\sqrt{3}$$

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC, SI, khi đó: $d(A, (\angle SBC)) = AH$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó xét tam giác SAI :

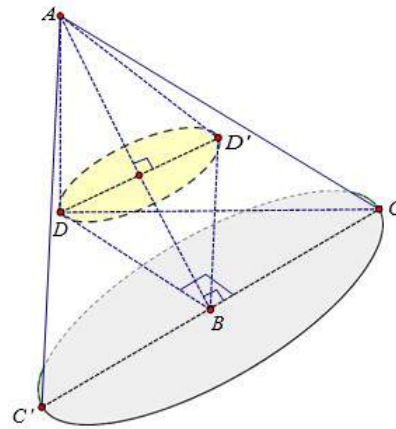
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \quad \text{Vậy } h = d(A, (\angle SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 418. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (DBC) và $\angle DBC = 90^\circ$. Khi quay các cạnh của tứ diện xung quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Đáp án C

Trong 5 cạnh còn lại (không kể cạnh AB) chỉ có 3 cạnh AD, DB, AC khi quay quanh trục AB tạo ra các hình nón. Do đó có 3 hình nón được tạo thành (như hình vẽ).



Chú ý: Do $CB \perp (\angle ADB) \Rightarrow CB \perp AB$, do đó CB quay quanh AB chỉ tạo ra hình tròn mà không phải là hình nón.

Câu 419. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Đáp án C

Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại P và vẽ đường thẳng song song với CD cắt BD tại Q. Ta có mp $(MNPQ)$ song song với cả AB và CD. Từ đó $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{MP, MQ}) = \widehat{PMQ}$.

Áp dụng tính chất đường trung bình trong tam giác (do M, N là các trung điểm) ta suy ra được $MP = MQ = NP = NQ = a$ hay tứ giác MPNQ là hình thoi.

$$\text{Tính được } \cos(\widehat{PMN}) = \frac{MN}{2MP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{PMN} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{PMQ} = 2 \cdot \widehat{PMN} = 60^\circ.$$

Câu 420. Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a . Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện ABCD là

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$ B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{3}$ D. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$

Đáp án D

Gọi r là bán kính đường tròn đáy và h là chiều cao tứ diện, ta có $S_{xq} = 2\pi.r.h$.

Nếu gọi M là trung điểm CD và G là trọng tâm tam giác BCD thì ta có

$$r = BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta cũng có } h = AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = 2\pi.r.h = 2\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}.$$

Câu 421. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC = ADC = 90^\circ$, SA vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng 60° , $CD = a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S_{mc} = 16\pi a^2$ B. $S_{mc} = 4\pi a^2$ C. $S_{mc} = 32\pi a^2$ D. $S_{mc} = 8\pi a^2$

Đáp án A

Ta có SC là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ vì các góc ở đỉnh A, B, D đều nhìn SC dưới góc 90° ($\widehat{SBC} = \widehat{SDC} = \widehat{SAC} = 90^\circ$). Do đó bán kính của mặt cầu là

$$R = \frac{1}{2}SC.$$

Tam giác ADC vuông tại D có $AD = \frac{2.S_{ADC}}{CD} = \frac{2.a^2\sqrt{3}}{2a} = a\sqrt{3}$, suy ra

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

Ta có $(\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$. Tam giác SAC vuông tại A có

$$SC = \frac{AC}{\cos(\widehat{SCA})} = 2a \cdot 2 = 4a.$$

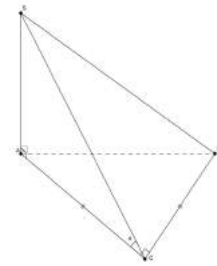
Do đó $R = \frac{1}{2}SC = 2a$, ta tính được $S_{mc} = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Câu 422. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C ; SA vuông góc với đáy; $SC = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính $\sin \alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất

A. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Đáp án B

Ta có $BC \perp AC$ và $BC \perp SC$, do đó góc giữa mp (SBC) và mp (ABC) chính là góc SCA.



Mặt khác $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{6} SA \cdot AC^2$

(vì $AC \perp BC$ và $AC = BC$).

Vì tam giác SAC vuông tại A nên ta có $SA = SC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$ và $AC^2 = SC^2 - SA^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha$.

Từ đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot AC^2 = \frac{1}{6} a \sin \alpha \cdot (a^2 - a^2 \sin^2 \alpha)$, đặt $t = \sin \alpha$ ta có hàm số thể tích theo t

như sau $V(t) = \frac{1}{6} a^3 t(1-t^2)$.

$$V^2 = \frac{a^6}{36} t^2 (1-t^2)(1-t^2)$$

$$V^2 = \frac{a^6}{72} \cdot 2 \cdot t^2 \cdot (1-t^2)(1-t^2) \leq \dots$$

Dấu “=” xảy ra khi $2t^2 = 1-t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 423. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi E,F lần lượt là các điểm đối xứng của B qua C,D và M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Gọi (T) là thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (MEF). Tính diện tích S của thiết diện (T)

A. $S = \frac{a^2}{2}$ B. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$ C. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{9}$ D. $S = \frac{a^2}{6}$

Đáp án D

Vẽ $AO \perp (BCD)$, $MH \perp (BCD)$. Gọi K là trung điểm EF, ta có $(ABK) \perp (BCD)$, mp (ABK) chứa AO, MH và là mặt phẳng trung trực của đoạn CD và EF.

Gọi J là trung điểm CD; G là giao điểm của MK và AJ; I là giao điểm của MK và AO.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của ME với AC, MF với AD. Khi đó (MNP) chính là thiết diện khi cắt tứ diện đều ABCD bởi mp (MEF). Vì BE=BF=2a nên ta cũng có MN=MP, hay tam giác MNP cân tại M, đường cao MG.

Để tính diện tích MNP, ta cần đi tìm MG và NP.

Vì G là giao điểm của các đường trung tuyến AJ và MK trong tam giác ABK nên G là trọng tâm của tam giác ABK, do đó $MG = \frac{1}{3}MK$ (1) và $AG = \frac{2}{3}AJ$ hay $NP = \frac{2}{3}CD = \frac{2a}{3}$ (vì $NP \parallel CD \parallel EF$ và chứng minh dựa vào các tam giác đồng dạng, tính chất tỉ số đồng dạng và các đường cao; đường cao AG, AJ trong tam giác ANP và ACD).

Áp dụng nhanh: tam giác đều cạnh a có độ dài mỗi đường cao là $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (và diện tích là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$).

Tam giác đều BCD cạnh a có đường cao $BJ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, trọng tâm O, suy ra $BO = \frac{2}{3}BJ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Lại vì MH là đường trung bình trong tam giác vuông ABO nên

$$MH = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Ta có

$$HK = HJ + JK = \frac{2}{3}BJ + BJ = \frac{5}{3}BJ = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{5a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{(lưu ý } BJ = \frac{1}{2}BK \text{)}.$$

Vì tam giác MHK vuông tại H nên ta có

$$MK = \sqrt{MH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{25a^2}{12}} = \frac{3a}{2}.$$

Quay lại (1), ta có $MG = \frac{1}{3}MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a}{2}$ và

$$NP = \frac{2a}{3}$$

Từ đó tính được diện tích tam giác MNP là $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MG \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2}{6}$.

Câu 424. Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng chiều cao và bằng 2cm. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. π .

B. 2π .

C. 4π .

D. 8π .

Đáp án D.

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 8\pi.$$

Câu 425. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BC' .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

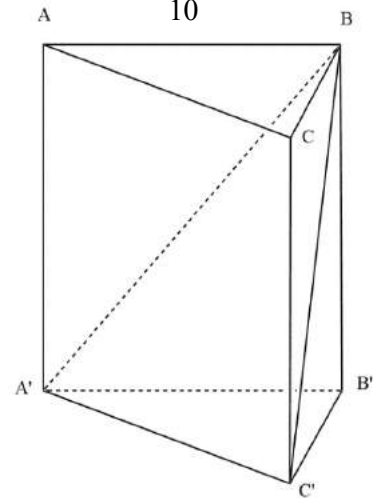
Đáp án A.

$$AC \parallel A'C' \rightarrow (AC; BC') = (A'C'; BC')$$

$$\rightarrow \cos(AC; BC') = \cos(A'C'; BC') = |\cos \widehat{A'C'B}|$$

$$\rightarrow \begin{cases} A'C' = a \\ BA' = BC' = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos \widehat{A'C'B} = \frac{A'C'^2 + BC'^2 - A'B^2}{2 \cdot A'C' \cdot BC'} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$



Câu 426. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1, thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình trụ là

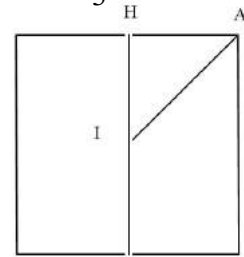
- A. $6\pi\sqrt{3}$. B. $3\pi\sqrt{3}$. C. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

Đáp án D.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông \rightarrow chiều cao $h = 2R = 2$

Trung điểm I của trục hình trụ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình trụ,

$$\text{bán kính là } IA \rightarrow IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{2} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi IA^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$



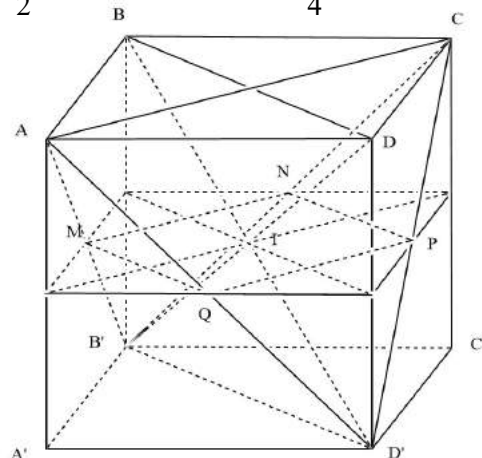
Câu 427. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Xét tứ diện $AB'CD'$. Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích của thiết diện thu được.

- A. $\frac{a^2}{3}$. B. $\frac{2a^2}{3}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{3a^2}{4}$.

Đáp án C.

Thiết diện cần tìm là hình vuông $MNPQ$

$$\rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}.$$



Câu 428. Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác cân tại A, người ta để một quả cầu có bán kính $r=1$ vào bên trong tứ diện từ đáy ABC sao cho các cạnh AB, BC, CA lần lượt tiếp xúc với quả cầu và phần quả cầu bên trong tứ diện có thể tích bằng phần quả cầu bên ngoài tứ diện. Biết khoảng cách từ D đến (ABC) bằng 2. Tính thể tích nhỏ nhất của tứ diện ABCD?

- A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Đáp án C

Tứ diện ABCD có chiều cao không đổi do đó thể tích nhỏ nhất khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Vì AB, BC, CA lần lượt tiếp xúc với quả cầu và phần quả cầu bên trong tứ diện có thể tích bằng phần quả cầu bên ngoài tứ diện nên tâm I của mặt cầu nằm trong tam giác ABC.

Đặt $\widehat{IBH} = \alpha, X = \tan \alpha$

$$BH = \frac{IH}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}, AH = BH \cdot \tan 2\alpha = BH \cdot \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2}{1 - x^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = AH \cdot BH = \frac{2}{x(1-x^2)} \geq 3\sqrt{3} \quad \text{Do đó } V_{ABCD \min} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Suy ra

Câu 429. Cho hình cầu (S) tâm I bán kính R. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn giao tuyến (L). Khối nón đỉnh I và đáy là đường tròn (L) có thể tích lớn nhất là

$$\frac{a\pi R^3}{b\sqrt{3}} (a, b \in \mathbb{N}). \text{ Hỏi } a + b \text{ bằng?}$$

- A. 10 B. 9 C. 11 D. 13

Đáp án C

Gọi r là bán kính đường tròn (L) và h là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P). Ta có:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Cho $R=1$ dùng đạo hàm để khảo sát thì ta thấy thể tích nón lớn nhất bằng $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.

Do đó $a + b = 11$.

Câu 430. Cho khối chóp S.ABC có $SA = AB = BC = 2$ và M là một điểm thuộc SB. Thiết diện qua M song song với SA, BC cắt AB, AC, SC lần lượt tại N, P, Q. Diện tích thiết diện MNPQ lớn nhất bằng

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Đáp án C

Rõ ràng thấy MN và PQ song song với SA, NP và MQ, do đó MNPQ là hình bình hành

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MQ \cdot MN \cdot \sin \widehat{QMN} = \frac{1}{2} MQ \cdot MN \cdot \sin \widehat{(BC, SA)}$$

Ở đây $\sin \widehat{(BC, SA)}$ là hằng số nên S_{MNPQ} max khi $MQ \cdot MN$ max

Ta quan sát thấy

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{SM}{SB}, \frac{MN}{SA} = \frac{MB}{SB} \Rightarrow \frac{MQ}{BC} + \frac{MN}{SA} = \frac{SM}{SB} + \frac{MB}{SB} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{MQ}{BC} + \frac{MN}{SA} \geq 2\sqrt{\frac{MQ}{BC} \cdot \frac{MN}{SA}}$$

$$\Rightarrow \frac{MQ}{BC} \cdot \frac{MN}{SA} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow MQ \cdot MN \leq \frac{BC \cdot SA}{4} = 1$$

Do đó S_{MNPQ} max bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 10. MỘT SỐ CÂU HỎI MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Một hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $\sqrt{2}$, $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng:

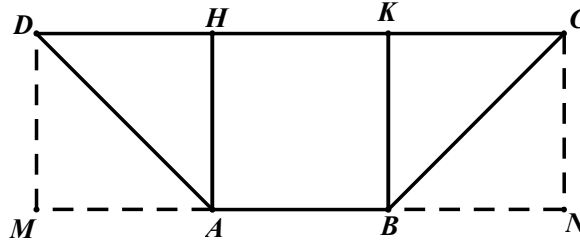
A. $V = \frac{7}{3}\pi$

B. $V = \frac{4}{3}\pi$

C. $V = \frac{5}{3}\pi$

D. $V = 3\pi$

Lời giải



Kẻ AH, BK cùng vuông góc với CD .

Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của H qua AD và của K qua BC thì tam giác MAD và tam giác NBC là 2 tam giác vuông cân bằng nhau có $MA = AB = BN = AH = 1$.

$$V = \pi \cdot AH^2 \cdot MN - \left(\frac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot MA + \frac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot NB \right) = \pi AH^2 \left(MN - \frac{MA}{3} - \frac{NB}{3} \right) = \pi \cdot AH^2 \cdot \frac{7}{3} \cdot AB = \frac{7}{3} \pi$$

Chọn A.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), $AD = a$ và $\widehat{ADB} = 90^\circ$.

Quay $ABCD$ quanh AB , ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha$

B. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$

C. $V = \pi a^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

D. $V = \pi a^3 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

Lời giải

Kẻ $DH \perp AB, CN \perp AB$.

Các tam giác vuông HAD và NBC bằng nhau.

$$DH = CN = a \cdot \sin \alpha, \quad AH = BN = a \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow HN = AB = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Khi quay quanh AB , các tam giác vuông

AHD và NBC tạo thành hai hình nón tròn xoay bằng nhau nên:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot DH^2 \cdot AH + \left(\pi \cdot DH^2 \cdot HN - \frac{1}{3} \pi \cdot CN^2 \cdot BN \right) = \pi \cdot DH^2 \cdot AB = \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = \pi a^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Chọn C.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O', O là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ và $O'O = a$. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ tròn xoay đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích hình nón tròn xoay đỉnh

O' và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 2

B. 3

C. 4

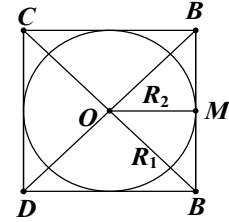
D. 6

Lời giải

Gọi M trung điểm của AB thì tam giác OAM vuông cân tại M.

$$R_1 = OA = \frac{\sqrt{2}}{2}; R_2 = OM = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 \cdot h}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 \cdot h} = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 : \left(\frac{1}{2} \right) = 6. \quad \text{Chọn D.}$$



Câu 4. Điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SA, SB, SC tạo với (ABC) góc 45° .

Hãy chọn phát biểu đúng:

- A. Hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC là hình nón tròn xoay.
- B. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân
- C. Khoảng cách từ O đến 2 thiết diện qua đỉnh (SAC) và (SBC) bằng nhau
- D. Cả 3 bài trên đều đúng

Lời giải

Kẻ $SO' \perp (ABC)$. Ta có: $\Delta SO'A = \Delta SO'B = \Delta SO'C \Rightarrow SA = SB = SC; O'A = O'B = O'C$

Vậy, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $O' \equiv O$: A đúng.

ΔSAB có $\widehat{SAB} = \widehat{SBA} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại S: B đúng.

Vì ΔABC vuông cân tại C nên kẻ $OM \perp CA$ và $ON \perp CB$ thì: $OM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}CA = ON$.

Chọn D.

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có OAB là tam giác vuông cân. $OA = OB = a, OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và

$OC \perp (OAB)$. Xét hình nón tròn xoay đỉnh C, đáy là đường tròn tâm O, bán kính A. Hãy chọn phát biểu sai:

- A. Đường kính hình nón bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
- B. Khoảng cách từ O đến thiết diện (ABC) bằng $\frac{a}{2}$
- C. Thiết diện (ABC) là tam giác đều
- D. Thiết diện (ABC) hợp với đáy góc 45°

Lời giải

Tam giác OAB vuông cân tại O nên $AB = a\sqrt{2}$,

$\Delta OAC: AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}; AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vì $AB \neq AC$: sai. **Chọn C.**

Câu 6. Hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

- A. $S_{xq} = \frac{\pi}{4}a^2$
- B. $S_{xq} = \frac{\pi}{6}a^2\sqrt{2}$
- C. $S_{xq} = \frac{\pi}{6}a^2\sqrt{3}$
- D. $S_{xq} = \frac{2\pi}{3}a^2$

Lời giải

Gọi $S.ABC$ là tứ diện đều cạnh A.

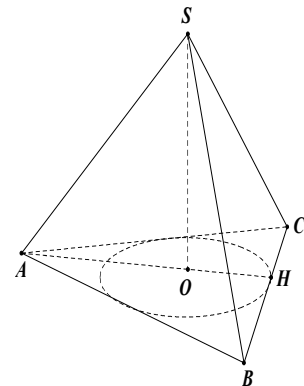
Gọi H là trung điểm cạnh BC.

Kẻ $SO \perp (ABC)$ thì $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ là đường sinh của hình nón.

Ba điểm A, O, H thẳng hàng.

$$HO = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, S_{xq} = \pi \cdot OH \cdot SH = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Chọn A.



Câu 7. Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

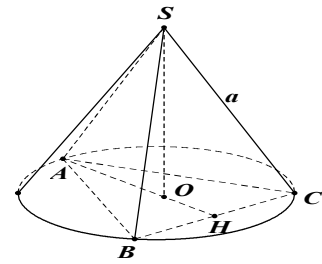
A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$ B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$ C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{6}$

Lời giải.

Kẻ $SO \perp (ABC)$, $SH \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$

Ta có: $OA = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$



Chọn C.

Câu 8. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Một thiết diện qua đỉnh S tạo thành tam giác SAB sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến thiết diện (SAB) là:

A. $d = \frac{4}{3}\sqrt{13}$ B. $d = \frac{3}{4}\sqrt{13}$ C. $d = 3$ D. $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Lời giải

$SO \perp (OAB)$, kẻ $SH \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$, $AB \perp (SOH) \Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$

Kẻ $OI \perp SH$ thì $OI \perp (SAB)$ nên $d = OI$,

$\Delta SOA: OS^2 = 64 - 25 = 39$; $\Delta OHA: OH^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{39} = \frac{16}{117} \Leftrightarrow OI = \frac{3}{4}\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 9. Hình nón tròn xoay có trục $SO = R\sqrt{3}$ với R là bán kính đáy, thiết diện qua trục của hình nón tạo thành tam giác SAB là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SO và $E, F \in SO$ sao cho $\frac{EI}{EO} = \frac{FI}{FO} = \frac{1}{2}$. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là điểm:

A. I B. E C. F D. O

Lời giải

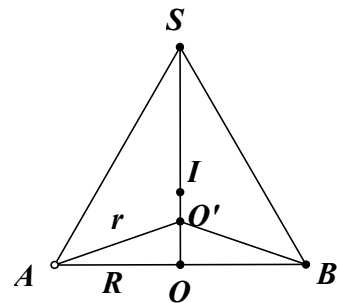
Gọi O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì:

$r = O'S = O'A = O'B$

Ta có: $OO' = OS - r = R\sqrt{3} - \frac{R}{\cos 30^\circ}$

$OO' = R\sqrt{3} - \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{3}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{2}{3}$

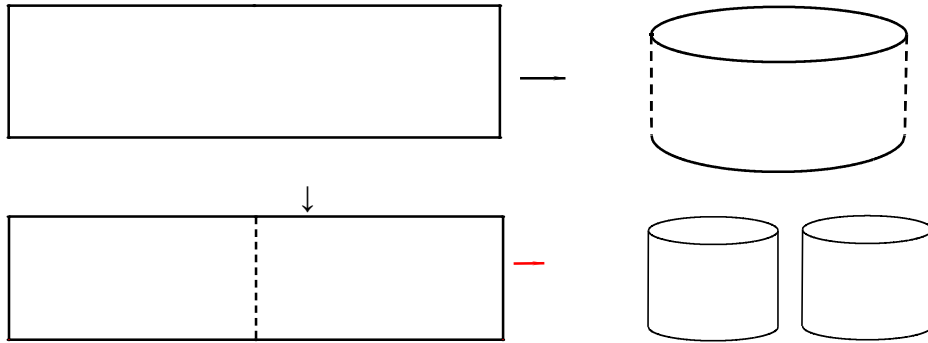
Vậy $O' \equiv E$. **Chọn B.**



Câu 10. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của gò thùng được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích hai gò thùng được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$ C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$ D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Lời giải

Một đường tròn có bán kính r thì chu vi và diện tích lần lượt là $C = 2\pi r; S = \pi r^2$
 Gọi chiều dài tấm tôn là a thì tổng diện tích đáy của 2 thùng theo 2 cách lần lượt là:

$$S_1 = \frac{a^2}{4\pi} ; S_2 = 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi} = \frac{a^2}{8\pi} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2 . \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 11. Cho $AA'B'B$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB = 4, AA' = 3$ và thể tích của hình trụ bằng $V = 24\pi$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng $(AA'B'B)$ là:

- A. $d = 1$ B. $d = 2$ C. $d = 3$ D. $d = 4$

Lời giải

Kẻ $OH \perp AB$ thì $OH \perp (AA'B'B)$

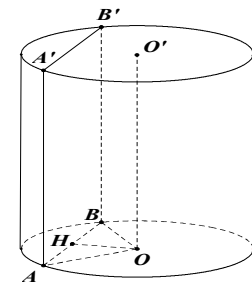
$$\text{Và } AH = \frac{1}{2} AB = 2$$

$$\text{Ta có } V = \pi \cdot OA^2 \cdot AA' = 3\pi OA^2$$

$$\text{Mà } V = 24\pi \Rightarrow OA^2 = 8$$

$$\Delta OAH : d^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow d(O, (AA'B'B)) = d = 2$$

Chọn B.



Câu 12. Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6 \times 5 \times 6 \text{ cm}$. Muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, ta được kết quả nào trong 4 khả năng sau:

- A. Vừa đủ B. Thiếu 10 viên C. Thừa 10 viên D. Không xếp được

Lời giải

Vi chiều cao viên phấn là 6cm, nên chọn đáy hộp carton có kích thước 5×6 .

Mỗi viên phấn có đường kính 1cm nên mỗi hộp ta có thể đựng được $5 \cdot 6 = 30$ viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là: $30 \times 12 = 360$ viên

Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên.

Chọn B.

Câu 13. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng A. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2A$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Kẻ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng của A' qua O' và H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng A'D. $\begin{cases} BH \perp A'D \\ BH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$

Do đó, BH là chiều cao của tứ diện OO'AB

$$\text{Thể tích khối tứ diện } OO'AB : V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta OAO'} \cdot BH$$

$$\text{Tam giác } AA'B \text{ vuông tại } A' \text{ cho: } A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

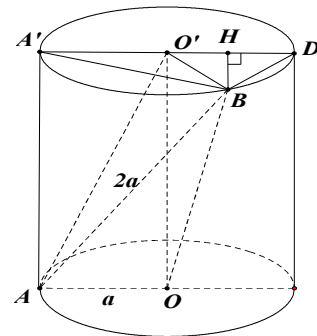
$$\text{Tam giác } A'BD \text{ vuông tại } D \text{ cho: } A'D = \sqrt{A'B^2 - BD^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

$$\text{Suy ra } BO'D \text{ là tam giác đều cạnh } A. \text{ Từ đó } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do $OA = OO' = a$ nên tam giác AOO' vuông cân tại O.

$$\text{Diện tích tam giác } AOO' \text{ là: } S_{\Delta OAO'} = \frac{1}{2} OA \cdot OO' = \frac{1}{2} a^2$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



Chọn A.

Câu 14. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác có $AB = 5, AC = 8$ và góc $(\widehat{AB, AC}) = 60^\circ$. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$?

- A. $\frac{9}{49}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{19}{49}$ D. $\frac{29}{49}$

Lời giải

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49.$$

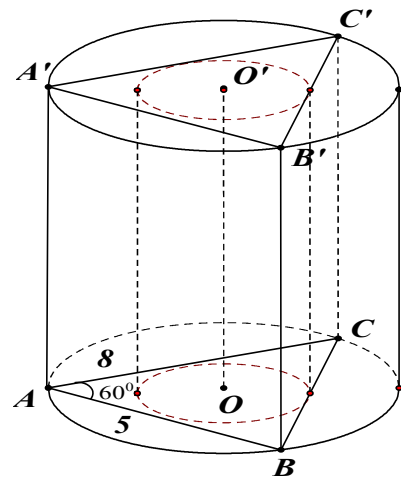
Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$, với R là bán kính đường

tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Rightarrow R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$



Ngoài ra: $S_{ABC} = pr$, trong đó $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 10$ và r là bán kính đường tròn nội

tiếp tam giác ABC $\Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$

Hình trụ ngoại tiếp và nội tiếp lăng trụ đã cho có bán kính đáy lần lượt là R, r và có chiều cao bằng chiều cao của hình lăng trụ.

Giả sử h là chiều cao hình lăng trụ, ta có: $V = \pi R^2 h$ và $V = \pi r^2 h$. Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{9}{49}$. **Chọn A.**

Câu 15. Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích khối trụ đó.

- A. $\frac{\pi a^2 h}{3}$ B. $\frac{\pi 2a^2 h}{3}$ C. $\frac{\pi 5a^2 h}{3}$ D. $\frac{\pi \sqrt{2}a^2 h}{3}$

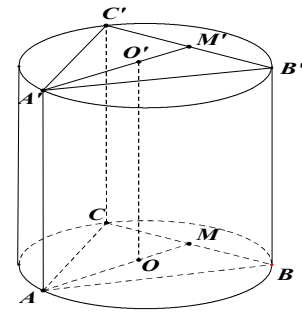
Lời giải

Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do ABC là tam giác đều cạnh a nên hình trụ có bán kính là:

$$R = OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ với } M = AO \cap BC$$

Chiều cao của hình trụ bằng chiều cao của lăng trụ là h .

Vậy thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}$.



Chọn A.

Câu 16. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

- A. $4R^3$ B. $2R^3$ C. $3R^3$ D. R^3

Lời giải

Giả sử $ABCD A' B' C' D'$ là khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

Từ giả thiết, suy ra hình trụ có chiều cao $h = 2R$ và đáy $ABCD$ là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R .

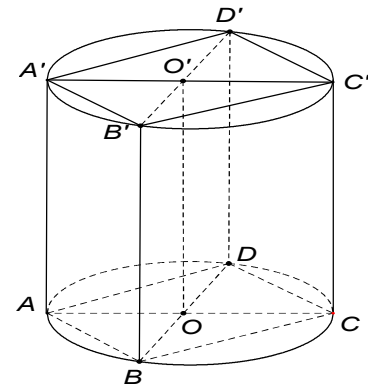
Do đó $AC = 2R \Rightarrow AB = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

$$V = S_{ABCD} \cdot h = 2R^2 \cdot 2R = 4R^3.$$

Chọn A.



Câu 17. Một khối lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a , góc giữa đường chéo mỗi mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

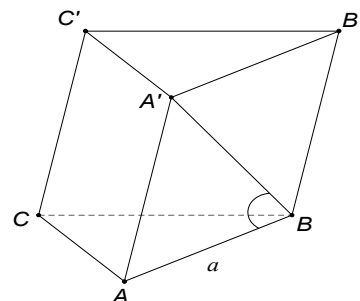
- A. $V = \frac{1}{3} \pi a^3 \sqrt{3}$ B. $V = \pi a^3 \sqrt{3}$ C. $V = \frac{1}{2} \pi a^3 \sqrt{3}$ D. $V = \frac{2}{3} \pi a^3 \sqrt{3}$

Lời giải

Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$, góc của đường chéo $A'B$ với mặt đáy (ABC) là

$$\widehat{A'BA} = 60^\circ.$$

Suy ra: $h = AA' = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.



Vẽ $KI // O'H$. Ta có: $O'H \perp A'B$ và AA' nên: $O'H \perp mp(AA'B) \Rightarrow O'H \perp HK$ và AB

Vậy tứ giác $KIO'H$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KI \perp OO'$.

Vậy KI là đoạn vuông góc chung của AB và OO' . $\Delta AA'B$ vuông

$$\Rightarrow A'B^2 = AB^2 - AA'^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2.$$

$$\text{Do } H \text{ trung điểm } A'B \text{ nên: } HA' = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \Delta O'A'H \Rightarrow O'H^2 = O'A'^2 - A'H^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Do đó: } d(AB, OO') = KI = O'H = \frac{R}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 21. Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \frac{h}{2}$

B. $R = \frac{h}{3}$

C. $R = \frac{h}{5}$

D. $R = \frac{h}{4}$

Lời giải

Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

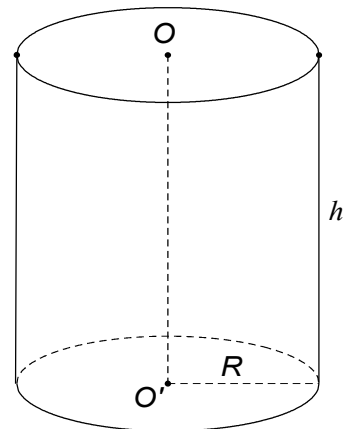
Ta có: $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

$$S_{tp} = S_{xq} = 2S_{\text{day}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = (Rh + R^2)2\pi$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương,

$$\text{Ta có: } \frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{Rh}{2} \cdot \frac{Rh}{2} \cdot R^2}$$

$$\Leftrightarrow Rh + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4 h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}} \Leftrightarrow S_{tp} \geq 3(2\pi)\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}} \text{ (hằng số)}$$



$$\text{Do đó: } S \text{ toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất } \Leftrightarrow \frac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{h}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 22. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Bên trong hình trụ có một hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp. Nếu thể tích hình lăng trụ là V thì thể tích hình trụ bằng bao nhiêu?

A. $V_{\text{trụ}} = \frac{\pi V}{2}$

B. $V_{\text{trụ}} = \frac{\pi V}{3}$

C. $V_{\text{trụ}} = \frac{\pi V}{4}$

D. $V_{\text{trụ}} = \frac{\pi V}{5}$

Lời giải

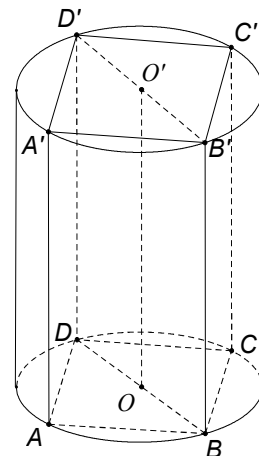
Gọi cạnh đáy lăng trụ là a .

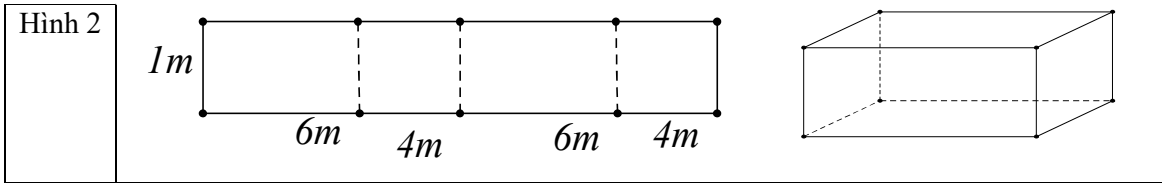
Thiết diện qua hình trụ là hình vuông $BDD'B'$: $BD = 2R = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow BB' = a\sqrt{2}$$

$$\text{Thể tích lăng trụ bằng } V \Leftrightarrow a^2 \cdot a\sqrt{2} = V \Leftrightarrow a^3 = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Thể tích hình trụ tính theo } a: V_{\text{trụ}} = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{2}$$





- A. Cả 2 cách như nhau
C. Cách 2

- B. Không chọn cách nào
D. Cách 1

Lời giải

Ở cách 2:

$$1m^2 \rightarrow 90.000$$

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } V_{\text{mọc}} = 0,8.6.4 = 19,2m^3$$

Do đó tổng tiền ở phương án 2 là $19,2.9955 + 20.90000 = 1.991.136$.

Ở cách 1:

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } 20 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{10}{\pi} \Rightarrow V_{\text{mọc}} = h\pi r^2 = 0,8.\pi.\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$$

Do đó tiền nước: 253.454 đồng

Tổng tiền: 2.053.454 đồng.

Vậy thầy nên chọn cách 2. **Chọn C.**

Câu 26. Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6 (xem hình vẽ). Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng.

A. 36π

B. 54π

C. 27π

D. 288π

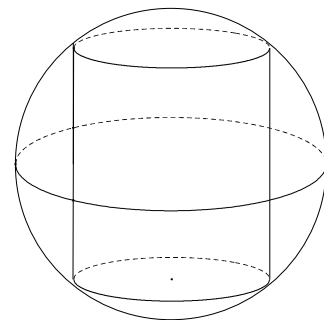
Lời giải

Gọi bán kính khối trụ là r .

Khi đó $r = \sqrt{R^2 - 9}$ và hai chỏm cầu có chiều cao là $h = R - 3$.

Thể tích vật thể còn lại là

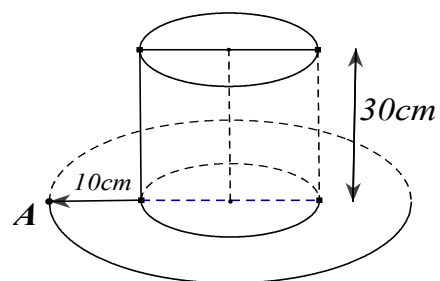
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi(R^2 - 9) - \frac{\pi(R-3)[3(R^2-9) + (R-3)^2]}{3} = 36\pi$$



Nhận xét: Kết quả không phụ thuộc vào bán kính R mà chỉ phụ thuộc vào chiều dài của hình trụ.

Chọn A.

Câu 27. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



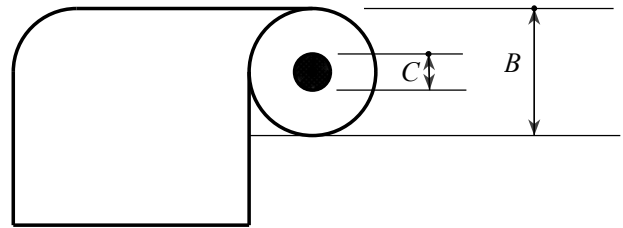
- A. $700\pi (cm^2)$ B. $754,25\pi (cm^2)$ C. $750,25\pi (cm^2)$ D. $756,25\pi (cm^2)$

Lời giải

$$S_{\text{hình tròn}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{35}{2}\right)^2 \quad ; \quad S_{\text{xqlang trụ}} = 2\pi rl = 2\pi \left(\frac{35-20}{2}\right) \cdot 30 = 450\pi$$

$$S = \pi \left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + 450 \right] = 756,25\pi. \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 28. Một băng giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5mm$. Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6mm$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9mm$. Tính chiều dài l của cuộn giấy.



- A. $L \approx 44m$ B. $L \approx 38m$ C. $L \approx 4m$ D. $L \approx 24m$

Lời giải

Gọi chiều rộng của băng giấy là r , chiều dài băng giấy là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V = r.m.L$ (1)

$$\text{Khi cuộn lại ta cũng có thể tích: } V = \pi \left(\frac{B}{2}\right)^2 .m - \pi \left(\frac{C}{2}\right)^2 .m = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2) suy ra: } m.r.L = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \Rightarrow L = \frac{\pi}{4m} (B^2 - C^2)$$

Câu 29. Xét một hình trụ nội tiếp trong hình nón như hình bên dưới, trong đó S là đỉnh hình nón, O là tâm đường tròn mặt đáy. Các đoạn AB, CD lần lượt là đường kính của đường tròn đáy của hình nón và hình trụ; AC, BD cắt nhau tại điểm $M \in SO$. Biết rằng tỉ số thể tích của hình trụ và hình nón là $\frac{4}{9}$. Tính tỷ số $\frac{SM}{SO}$.

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4}{9} = \frac{V_{\text{ht}}}{V_{\text{hn}}} = 3 \left(\frac{SD}{SA}\right)^2 \cdot \frac{h_{\text{ht}}}{h_{\text{hn}}} = 3 \left(\frac{SD}{SA}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{SD}{SA}\right) \Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{2}{3}$$

Theo định lý Menelaus đối với tam giác SOB ta có:

$$\frac{AO}{AB} \cdot \frac{CB}{CS} \cdot \frac{MS}{MO} = 1 \text{ do đó } \frac{MS}{MO} = 4 \text{ hay } \frac{SM}{MO} = \frac{4}{5}. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 30. Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

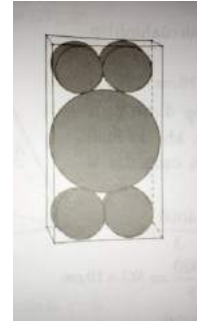
- A. $32 + 32\sqrt{7}$ B. $48 + 32\sqrt{5}$ C. $64 + 32\sqrt{7}$ D. $64\sqrt{5}$

Lời giải

Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là ABCD. Khi đó ta có

$I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA=3$ và cạnh đáy $AB=2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1+\sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là :

$2(1+\sqrt{7})$ suy ra thể tích hình hộp là $32(1+\sqrt{7})$.



Chọn A.

Câu 31. Người ta dùng một loại vải vintage33 để bọc quả khối khí của kính khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm kính khí cầu này?

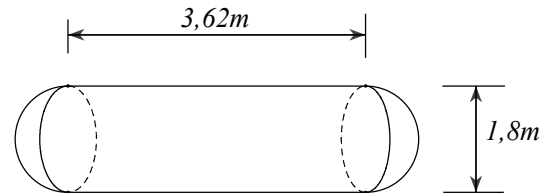
A. 2.500.470 đồng B. 3.150.342 đồng C. 2.513.274 đồng D. 2.718.920 đồng

Lời giải

$$S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 \quad \text{Với } R = \frac{d}{2} = 1(m). \text{ Vậy } S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi (m^2)$$

Vậy cần tối thiểu số tiền: $4\pi \cdot 200000 = 2.513.274$ đồng. **Chọn C.**

Câu 32. Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính $1,8m$ và chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?



A. 10905l

B. 23650l

C. 12265l

D. 20201l

Lời giải

$$\text{Ta có: } V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h$$

Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Vậy $V_H = V_{\text{trụ}} + V_c = \pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 = 12,265m^3$. Vậy bồn xăng chứa: 12265l. **Chọn C.**

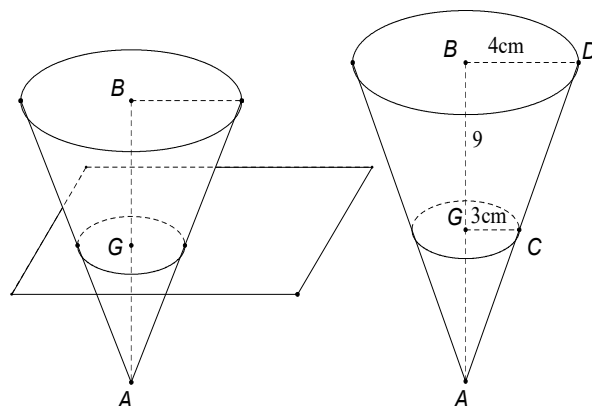
Câu 33. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao $9cm$, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là $3cm$ và $4cm$. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

A. 250ml

B. 300ml

C. 350ml

D. 400ml



Lời giải

$$\Delta AGC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{GC}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AG = \frac{3}{4} AB \Leftrightarrow \frac{AG}{AG+9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AG = 27$$

$$\text{Suy ra } V_{coc} = V_{nonlon} - V_{nonho} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot (27+9) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 27 = 111\pi \approx 348,72ml$$

Vậy lượng nước tối đa là 300ml. **Chọn B.**

Câu 34. Cho sáu khối chóp tứ giác đều được lắp ghép lại tạo thành một khối lập phương như hình dưới. Biết sáu khối chóp đã cho đều bằng nhau và thể tích khối lập phương tạo thành là $8000cm^3$. Tính diện tích xung quanh của mỗi khối chóp tứ giác đều đã cho?

A. $100cm^2$

B. $100\sqrt{2}cm^2$

C. $400cm^2$

D. $400\sqrt{2}cm^2$

Lời giải

Gọi a là độ dài cạnh của hình lập phương, khi đó ta có: $a^3 = 8000 \Rightarrow a = 20cm$

Giả sử hình chóp $S.ABCD$ là 1 trong 6 hình chóp, khi đó hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh đáy là $a = 20cm$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{8000}{6} = \frac{4000}{3} cm^3 \Rightarrow \frac{1}{3} SO \cdot 20^2 = \frac{4000}{3} \Rightarrow SO = 10cm$$

Kẻ $SK \perp CB (K \in CB)$. Xét ΔSOK tại O ta có: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = 10\sqrt{2}cm$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} SK \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 20 = 100\sqrt{2}cm^2. \text{ Vậy } S_{xq} = 4S_{\Delta ABC} = 4 \cdot 100\sqrt{2} = 400\sqrt{2}cm^2.$$

Chọn D.

Câu 35. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt bỏ các tam giác cân bên ngoài của tấm nhôm, phần còn lại gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp.

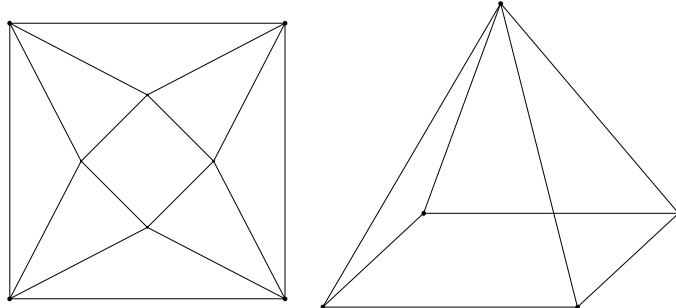
Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

B. $x = \frac{1}{2}$

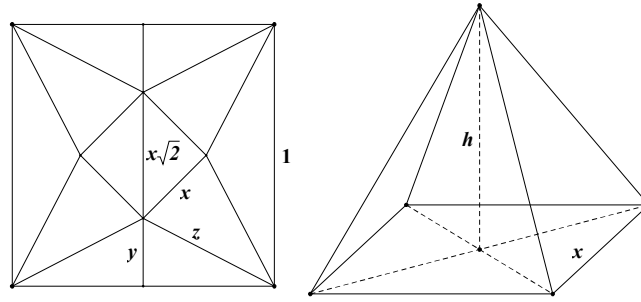
C. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$



Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{1-\sqrt{2}x}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$$



Chiều cao của hình chóp: $h = \sqrt{z^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$

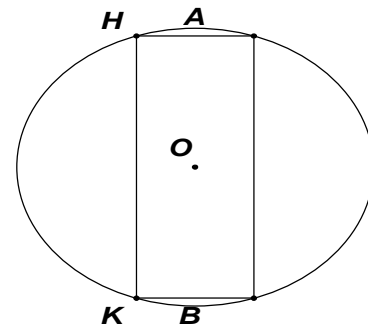
$\Rightarrow V_{chop} = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$

V_{chop} lớn nhất khi hàm số $y = x^2 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$ đạt GTLN

$y' = \frac{-5\sqrt{2}x^2 + 4x}{4\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -5\sqrt{2}x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 36. Cho biết rằng hình chỏm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h(3r^2 + h^2)}{6}$, trong đó h là chiều cao chỏm cầu và r là

bán kính đường tròn bề mặt chỏm cầu (bán kính này khác với bán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là 12cm (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần dưa còn lại.



- A. $200\pi cm^3$ B. $96\pi cm^3$ C. $288\pi cm^3$ D. $144\pi cm^3$

Lời giải

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chỏm cầu là $r - 6$.

Bán kính của chỏm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2 - 36}$

Thể tích hình trụ là $12\pi(r^2 - 36)$.

Thể tích 2 chỏm cầu: $\frac{2\pi(r-6)\left[3(r^2-36)+(r-6)^2\right]}{6} = \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$

Thể tích cái lỗ là: $12\pi(r^2-36) + \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$

$$= \pi(r-6) \left[12(r+6) + \frac{4r^2 - 12r - 72}{3} \right] = \frac{\pi(r-6)(4r^2 + 24r + 144)}{3} = \frac{4\pi(r^3 - 6^3)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} - 288\pi$$

Thể tích hình cầu là $\frac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V = 288\pi$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện.

Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh $A, (H')$ là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H'')}}$.

A. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{37}{48}$

B. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$

C. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$

Lời giải

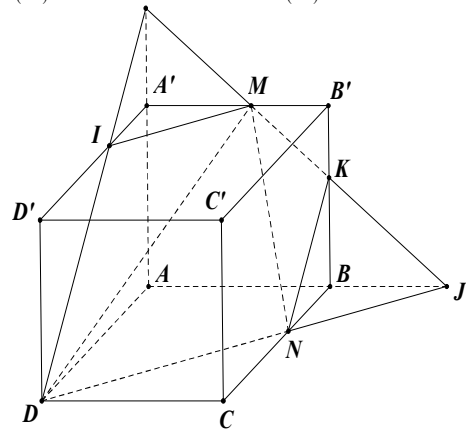
$AN \cap ND = J, JM \cap BB' = K$.

Ta có: $BK = 2B'K; I \in A'D'$.

Ta có: $A'I = \frac{1}{4}D'D'$.

Suy ra thiết diện là $KMIDN$

$$\begin{aligned} V_{(H)} &= V_{ABA'KMIDN} = V_{D.ABKMA'} + V_{D.BKN} + V_{D.MA'I} \\ &= \frac{1}{3}a \cdot \left(a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{55a^3}{144} \\ \Rightarrow V_{(H')} &= a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144} \Rightarrow \frac{V_H}{V_{H'}} = \frac{55}{89}. \quad \text{Chọn B.} \end{aligned}$$



Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC . Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x , thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y . Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$

B. $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$

C. $x^2 + xy - y^4 < 145$

D. $x^2 - xy + y^4 > 125$

Lời giải

+ Gọi H là trung điểm AB .

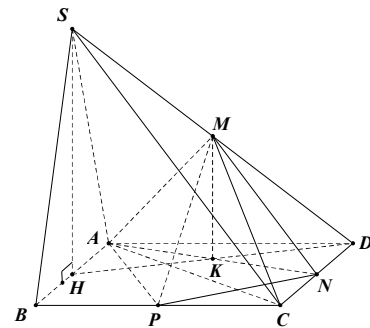
Do ΔABC đều và $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Xét ΔABC đều: $SH = \frac{\sqrt{3}AB}{2} = 2\sqrt{3}$

+ Ta có: $S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{ADN} - S_{CND}$
 $= AB^2 - \frac{AD \cdot DN}{2} - \frac{CN \cdot CP}{2} = 4^2 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 10$

$\Rightarrow V_{S.ABPN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABPN} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

+ Gọi $AN \cap HD = \{K\}$ ta có MK là đường trung bình của ΔDHS



$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2}SH \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3} \cdot S_{CNP} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CN \cdot CP \cdot \frac{1}{2} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Thay vào các đáp án. **Chọn C.**

Câu 39. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$, $\widehat{SCA} = \varphi$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

A. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$ C. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\varphi = 3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

$$BC = AC = a \cdot \cos \varphi; SA = a \cdot \sin \varphi$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} a^3 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{6} a^3 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$$

Xét hàm số: $f(x) = x - x^3$ trên khoảng $(0;1)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 - 3x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Từ đó ta thấy trên khoảng $(0;1)$ hàm số $f(x)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt GTLN hay:

$$\max_{x \in (0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ hay } \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\forall 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$ B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$ C. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$ D. $V = \frac{a^3}{6}$

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB ; J là trung điểm của CD từ giả thiết ta có:

$$IJ = a; SI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có:

$$\cos(\widehat{SIJ}) = \frac{SI^2 + SJ^2 - IJ^2}{2 \cdot SI \cdot SJ} = \frac{\frac{a^2}{3} + \frac{11a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{2}} = \frac{\frac{3a^2 + 11a^2 - 4a^2}{4}}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a^2}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

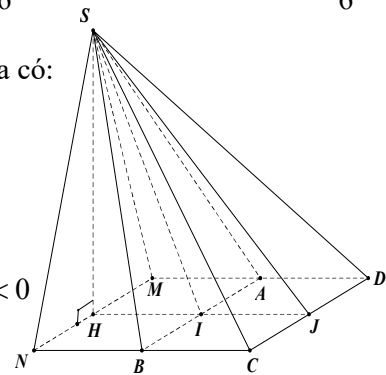
Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có \widehat{SIJ} tù. Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S . Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$, ta có H thuộc IJ và I nằm giữa

HJ tức là tam giác vuông SHI có $\widehat{H} = 90^\circ$.

$$\text{Góc } I \text{ nhọn và } \cos \hat{I} = \cos \widehat{SIH} = -\cos \widehat{SIJ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\widehat{SIJ} \text{ và } \widehat{SIH} \text{ kề bù} \right) \Rightarrow \sin \widehat{SIH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Xét tam giác } SHI \text{ ta có } SH = SI \cdot \sin \widehat{SIH} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}. \quad \text{Chọn C.}$$



Câu 41. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC) , góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3}{8}$ D. $\frac{3a^3}{8}$

Lời giải

Tổng quát: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC) , góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot \alpha}{24}$

Áp dụng bài này: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot 30^\circ}{24} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi G là trọng tâm

+ Gọi $(P) \cap (SBC) = EF \Rightarrow EF // BC \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ax$ với $Ax // EF // BC$

+ Gọi M là trung điểm $BC, SM \cap EF = N$.

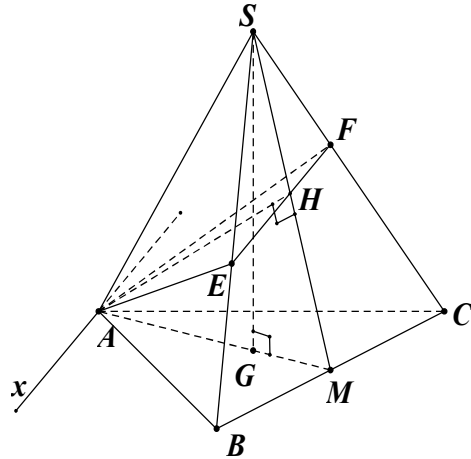
Ta có: $AM \perp BC, SG \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow AN \perp Ax$

Mà $AM \perp BC, BC // Ax \Rightarrow AM \perp Ax \Rightarrow \widehat{((P), (ABC))} = \widehat{NAM} = 30^\circ$

Ta có: $\widehat{GSM} = \widehat{NAM} = \alpha$ (cùng phụ với \widehat{SMA})

Xét ΔSGM vuông tại G có: $SG = GM \cdot \cot \widehat{GSM} = \frac{1}{3} AM \cdot \cot 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn A.**



Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D ; $AB = AD = 2a, CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD , biết hai mặt phẳng $(SBI), (SCI)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ B. $\frac{3\sqrt{17}}{5}a^3$ C. $\frac{3\sqrt{19}}{5}a^3$ D. $\frac{3\sqrt{23}}{5}a^3$

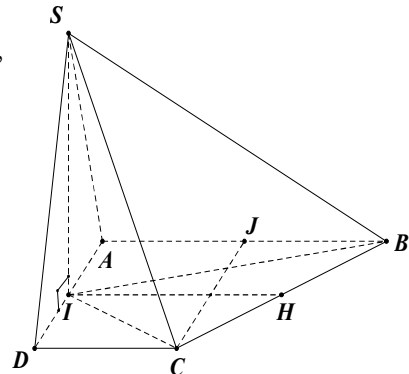
Lời giải

Gọi H trung điểm của BC, I là hình chiếu của H lên BC, J là trung điểm AB .

Ta có $SI \perp mp(ABCD), IC = \sqrt{ID^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

$IB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$ và $BC = IB = \sqrt{CJ^2 + JB^2} = a\sqrt{5}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD(AB + CD) = 3a^2$; $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot AB = a^2$



$$\text{và } S_{CID} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DI = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{IAB} - S_{DIC} = \frac{3a^2}{2}.$$

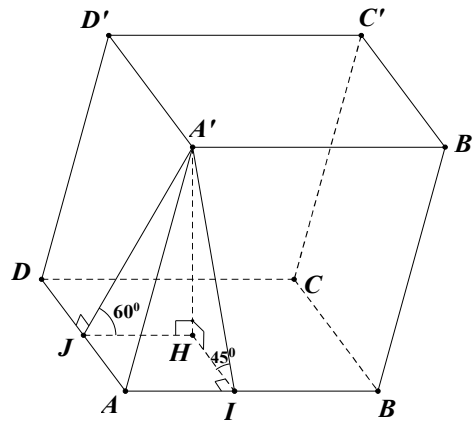
$$\text{Mặt khác } S_{IBC} = \frac{1}{2} IH \cdot BC, \text{ nên } IH = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} a. \quad SI = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{5} a.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{15}}{5} a^3. \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 43. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^\circ; 60^\circ$. Thể tích khối hộp là:

- A. 4 (đvdt) B. 3 (đvdt) C. 2 (đvdt) D. 6 (đvdt)

Lời giải



Dựng $A'H \perp (ABCD)$ và $A'I \perp AB, A'J \perp AD \Rightarrow HI \perp AB, HJ \perp AD$.

Ta có $\widehat{A'IH} = 45^\circ; \widehat{A'JH} = 60^\circ$. Đặt $A'H = h$.

Tam giác $HA'J$ vuông có $\widehat{A'JH} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều có cạnh $A'J$, đường cao

$$A'H, HJ \text{ là nửa cạnh} \Rightarrow A'J = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - A'H^2 = 1 - \frac{12h^2}{9} = \frac{9-12h^2}{9}$$

$$\Rightarrow AJ = \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} \text{ với } 0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Tam giác } HA'I \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow IH = A'H = h$$

$$A'IHJ \text{ là hình chữ nhật. } AJ = IH \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} = h \Leftrightarrow 9-12h^2 = 9h^2 \Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = S_{ABCD} \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} = 3$ (đvdt). **Chọn B.**

Câu 44. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Tính thể tích V của khối hộp.

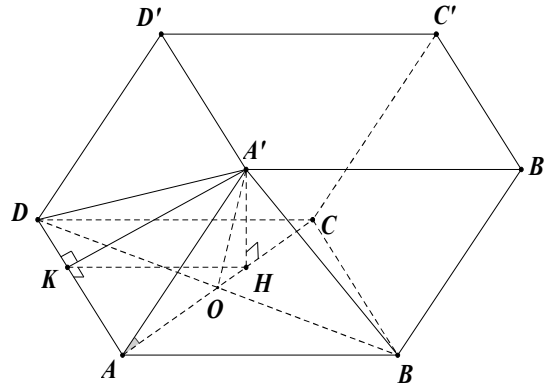
A. $V = a^3 \sin 2\alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha} \arcsin \theta$

B. $V = 2a^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

C. $V = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

D. Đáp số khác.

Lời giải



Dựng $A'H \perp AC$; $A'K \perp AD \Rightarrow \Delta A'BD$ cân tại $A' \Rightarrow A'O \perp BD$

Ta có $\begin{cases} A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (ABCD) \Rightarrow HK \perp AD$

Đặt $\widehat{A'AO} = \beta$. $\Delta HAA'$ vuông tại $H \Rightarrow \cos \beta = \frac{AH}{AA'}$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC$ là phân giác góc $\widehat{BAD} = \alpha$, ΔKAH vuông tại K

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \cos \beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA'} \cdot \frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA'} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin \beta = a \cdot \sin \beta \Rightarrow A'H = a \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Do đó ta có: } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

$$= 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 45. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a ; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2 ; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α . Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{a}$ B. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{3a}$ C. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{4a}$ D. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{2a}$

Lời giải

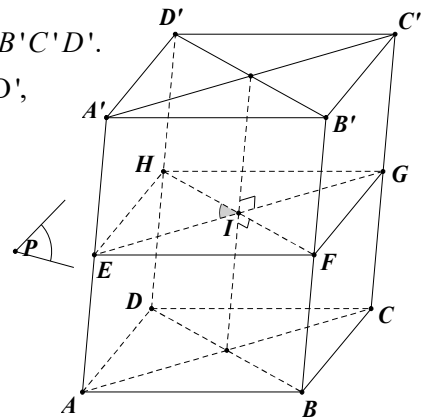
Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có giao tuyến là OO' ,

có diện tích theo thứ tự S_1, S_2 .

Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với OO' tại I , cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' theo thứ tự tại E, F, G, H ($(P) \perp$ các cạnh bên).

Ta có: $EG, HF \perp OO'$ tại I



$\Rightarrow \widehat{EIH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.

$EFGH$ là một thiết diện thẳng của hình hộp và là một hình bình hành.

Do đó, ta có thể tích V của hình hộp là: $V = S_{EFGH} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot HF \cdot AA' \cdot \sin \alpha$

Ta lại có: $S_1 = S_{ACC'A'} = EG \cdot AA' \Leftrightarrow EG = \frac{S_1}{a}$; $S_2 = S_{BDD'B'} = HF \cdot BB' \Leftrightarrow HF = \frac{S_2}{a}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_1}{a} \cdot \frac{S_2}{a} \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{2a}$. **Chọn D.**

Câu 46. Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, \widehat{BAD} = \alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β . Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A. $V = 4ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$

B. $V = 2ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$

C. $V = 3ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$

D. $V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$

Lời giải

$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$

Ta có: $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{CAC'} = \beta$ là góc của AC' và mặt đáy $(ABCD)$.

Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$
 $= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha$.

$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$

Do đó ta có: $CC' = AC \cdot \tan \beta = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \tan \beta$.

Thể tích của hình hộp đứng: $V = S_{ABCD} \cdot CC' = ab \sin \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \tan \beta$

$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$. **Chọn D.**

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $S = 2\pi a^2$

B. $S = 8\pi a^2$

C. $S = 16\pi a^2$

D. $S = 12\pi a^2$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)

Ta có $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$

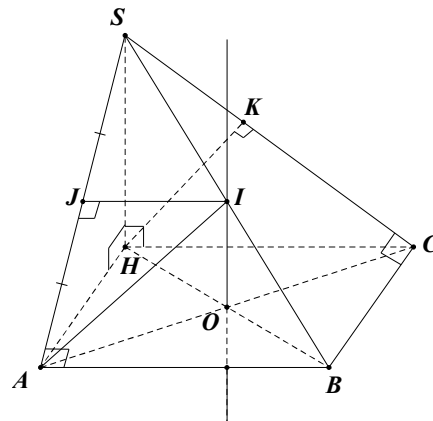
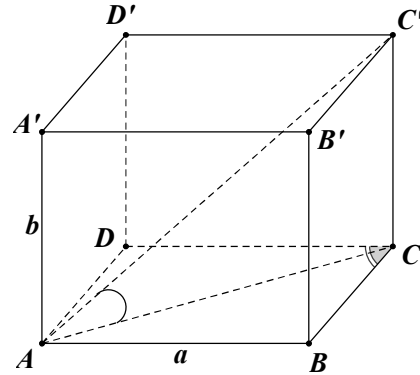
Tương tự, $AH \perp AB$

Và $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên ABCH là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BH, O$ là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại I, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ \parallel AB \Rightarrow I$ là trung điểm



SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S,ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC)) = HK$

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$)

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$ tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = a\sqrt{6}$

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA = 3a$

$JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S,ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$. **Chọn D.**

Câu 48. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến O bằng R. Một điểm M tùy ý thuộc (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N. Hình chiếu của O trên (P) là I. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. NI tiếp xúc với (S)

B. $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$

C. Cả A và B đều sai.

D. Cả A và B đều đúng.

Lời giải

Vì I là hình chiếu của O lên (P) nên

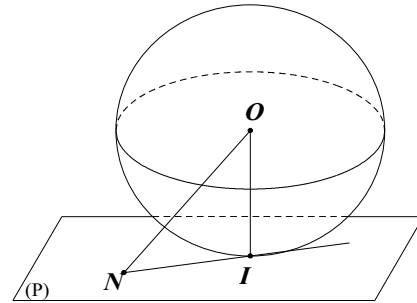
$d[O, (P)] = OI$ mà $d[O, (P)] = R$ nên

I là tiếp điểm của (P) và (S).

Đường thẳng OM cắt (P) tại N nên IN

Vuông góc với OI tại I.

Suy ra IN tiếp xúc với (S). **Chọn A.**



Câu 49. Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\frac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$

B. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

C. $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$

D. $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$

Lời giải

Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính R.

Theo giả thiết, ta có, $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2 = \frac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$

Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$. **Chọn D.**

Câu 50. Cho mặt cầu $S(O; R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng 60° . Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

A. πR^2

B. $\frac{\pi R^2}{2}$

C. $\frac{\pi R^2}{4}$

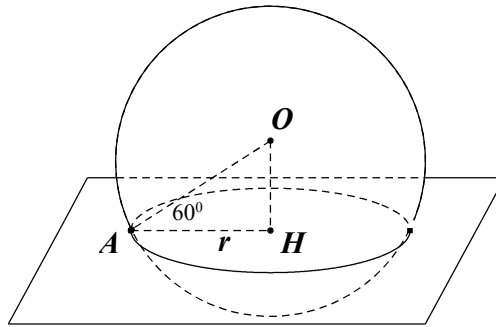
D. $\frac{\pi R^2}{8}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) thì:

- H là tâm của đường tròn giao tuyến (P) và (S).

• $(\widehat{OA, (P)}) = (\widehat{OA, AH}) = 60^\circ$.



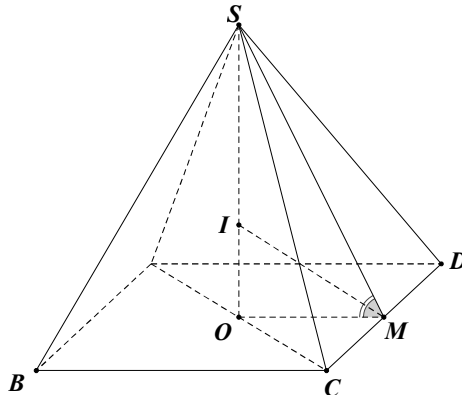
Bán kính của đường tròn giao tuyến : $r = HA = OA \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$.

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến : $\pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. **Chọn C.**

Câu 51. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a . Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ C. $\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ D. $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân giác trong của góc \widehat{SMH} ($I \in SH$). Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $IH = r$.

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH = \frac{a}{2}$.

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS+MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH \cdot MH}{MS+MH} = \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $3a$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $a\sqrt{6}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm AC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là trung điểm SC, suy ra $IM // SA$ nên $IM \perp (ABC)$.

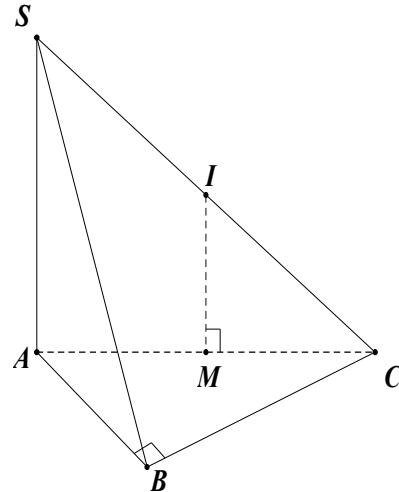
Do đó IM là trục của ΔABC , suy ra $IA = IB = IC$ (1)

Hơn nữa, tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên $IS = IC = IA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $IS = IA = IB = IC$

hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Vậy bán kính $R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn C.

Câu 53. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy (ABCD). Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD ta được:

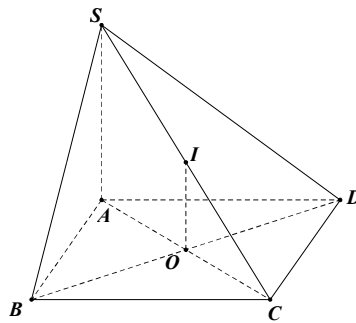
A. $a^2\sqrt{2}$

B. $8\pi a^2$

C. $2a^2$

D. $2\pi a^2$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra $IO // SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Do đó IO là trục của hình vuông ABCD, suy ra: $IA = IB = IC = ID$ (1)

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC nên $IS = IC = IA$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $R = IA = IB = IC = ID = IS = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt). **Chọn B.**

Câu 54. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

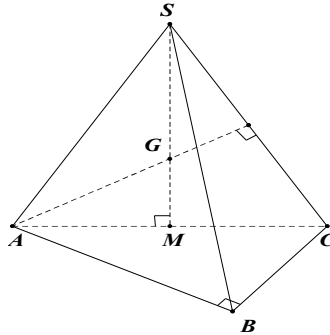
Gọi M trung điểm AC, suy ra $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$

Tam giác SAC có SM là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác SAC cân tại S.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SAC đều.

Gọi G trọng tâm tam giác SAC , suy ra $GS = GA = GC$ (1)

Tam giác ABC vuông tại B , có M là trung điểm cạnh huyền AC nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .



Lại có $SM \perp (ABC)$ nên SM là trục của tam giác ABC .

Mà G thuộc SM nên suy ra $GA = GB = GC$ (2)

Từ (1),(2), suy ra $GS = GA = GB = GC$ hay G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu $R = GS = \frac{2}{3}SM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 55. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\frac{R}{h}$ bằng:

A. $\frac{7}{12}$

B. $\frac{7}{24}$

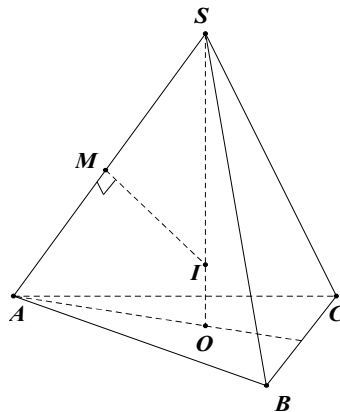
C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Gọi O là tâm ΔABC , suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong SOA , ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$.



Trong mặt phẳng (SOA) , kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I , suy ra:

- $I \in d$ nên $IS = IA$

- $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

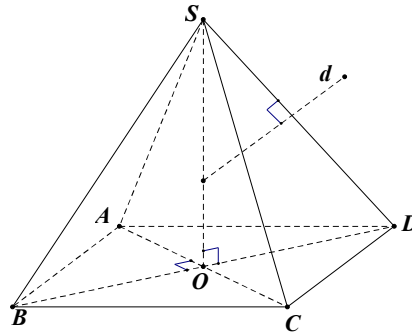
Gọi M là trung điểm SA , ta có $\triangle SOA$ đồng dạng $\triangle SMI$ nên $R = SI = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}$

Vậy $\frac{R}{h} = \frac{7}{6}$. **Chọn C.**

Câu 56. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$ B. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$ D. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$. Trong $\triangle SOB$, ta có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SOB) , kẻ đường trung trực d của đoạn SB .

Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IB \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$

Xét $\triangle SBD$ có $\begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle SBD$ đều.

Do đó, d cũng là đường trung tuyến của $\triangle SBD$. Suy ra I là trọng tâm $\triangle SBD$.

Bán kính mặt cầu $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$. **Chọn D.**

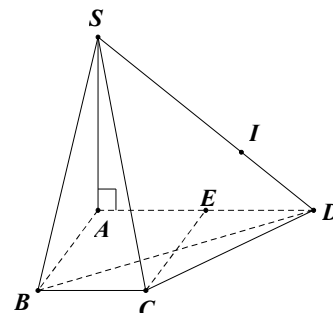
Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Cạnh bên $SA = 2a$, và vuông góc với đáy. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại

tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$ B. a
C. 1 D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $SA \perp AD$ hay $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi E là trung điểm AD .



Ta có $EA = AB = BC$. Nên ABCE là hình thoi. Suy ra $CE = EA = \frac{1}{2}AD$.

Do đó tam giác ACD vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC$ hay $\widehat{SCD} = 90^\circ$.

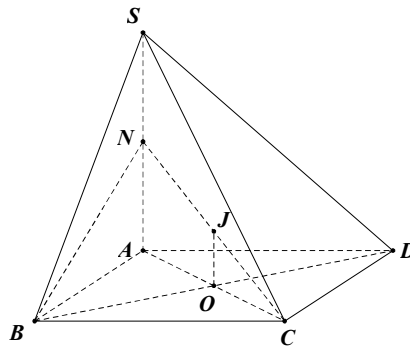
Tương tự, ta cũng có $SB \perp BD$ hay $\widehat{SAD} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SCD} = \widehat{SBD} = 90^\circ$ nên khối chóp $S.ABCD$ nhận trung điểm I của SD làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính $R = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $\frac{R}{a} = \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng 45° . Gọi N là trung điểm SA, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

- A. $4R = \sqrt{5}h$ B. $\sqrt{5}R = 4h$ C. $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h$ D. $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}h$

Lời giải



Ta có $45^\circ = (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

Trong ΔSAC , ta có $h = SA = a\sqrt{5}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BN \perp BC$.

Lại có $NA \perp AC$. Do đó, hai điểm A, B cùng nhìn đoạn NC dưới một góc vuông nên hình chóp $N.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm J là trung điểm NC, bán kính:

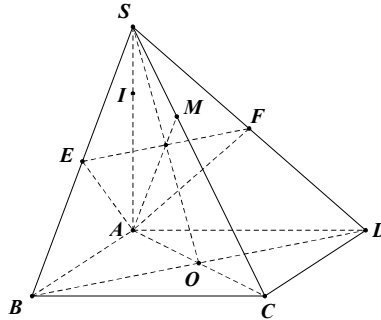
$$R = IN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}. \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$ B. a C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a}{2}$

Lời giải

Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên $EF // BD$. ΔSAC cân tại A , trung tuyến AM nên $AM \perp SC$ (1)



Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Do đó $EF \perp SC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE$ (*).

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Tương tự ta cũng có $AF \perp SD$. Do đó $\widehat{SEA} = \widehat{SMA} = \widehat{SFA} = 90^\circ$ nên 5 điểm S, A, E, M, F

cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA , bán kính $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

- A. $a\sqrt{2}$ B. a C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a}{2}$

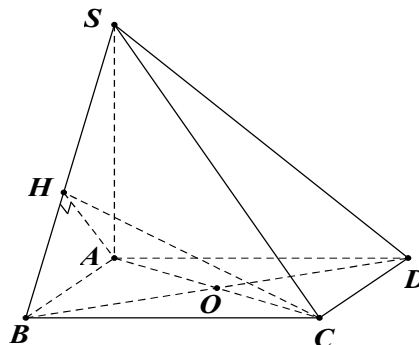
Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB = OD = OC$ (1)

Ta có $\begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SBA) \Rightarrow CB \perp AH$.

Lại có $AH \perp SB$. Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH = OC$ (2)



Từ (1),(2) $\Rightarrow R = OH = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $\sqrt{2}\pi a^3$ C. $\frac{\pi a^3}{6}$ D. $\frac{\pi a^3}{2}$

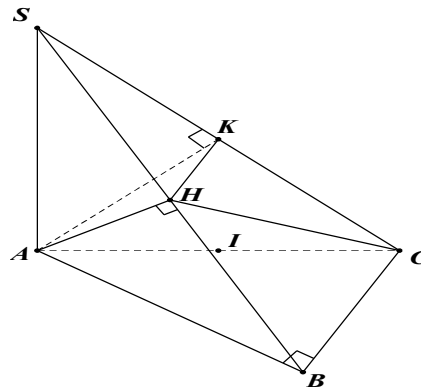
Lời giải

Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ, \widehat{AKC} = 90^\circ$ (1)

Do $\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \text{ (} BC \perp (SAB) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AH \perp HC$ (2)

Từ (1),(2) suy ra ba điểm B, H, K cùng nhìn xuống AC dưới một góc 90° nên hình chóp

$A.HKCB$ nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC, bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vậy thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvdt). **Chọn A.**

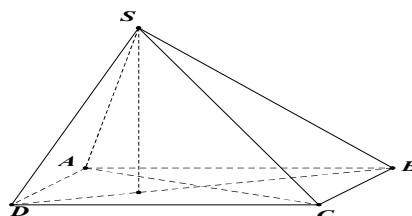
Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $BD = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy ($ABCD$) là trung điểm OD. Đường thẳng SD tạo với mặt đáy 1 góc bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nhận giá trị nào sau đây ?

- A. $\frac{a}{4}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. a

Lời giải

Ta có $60^\circ = (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, HD}) = \widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông SDH, có $SH = \frac{BD}{4} \tan \widehat{SDH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, và $SD = \frac{HD}{\cos \widehat{SDH}} = \frac{a}{2}$



Trong tam giác vuông SHB, có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SBD, ta có $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$.

Suy ra tam giác SBD vuông tại S. Vậy các đỉnh S, A, C cùng nhìn xuống BD dưới 1 góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là O bán kính $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $R = d[G, (SAB)]$ B. $3\sqrt{13}R = 2SH$ C. $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$ D. $\frac{R}{a} = \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $60^\circ = (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, HA}) = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G, (SAB)]$

Ta có $d[G, (SAB)] = \frac{1}{3}d[C, (SAB)] = \frac{2}{3}d[H, (SAB)]$.

Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB, MB .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SE, suy ra $HK \perp SE$ (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow HK \perp (SAB), d[H, (SAB)] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$. Vậy $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$.

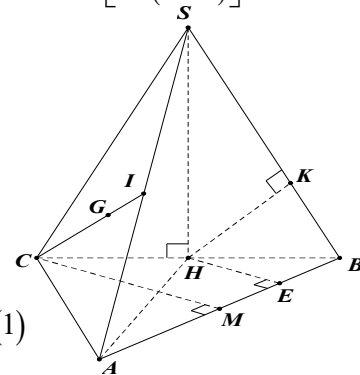
Chọn D.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a . Mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$ C. $\frac{\pi a^3}{6}$ D. $\frac{\pi a^3}{3}$

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $OA = OB = OC = OD$ (1)

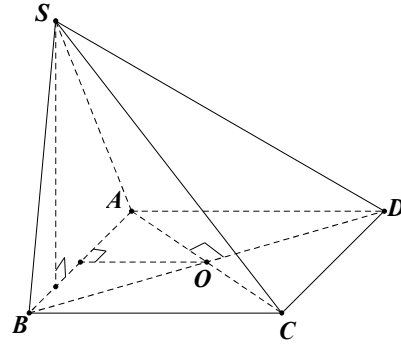


Gọi M trung điểm AB, do tam giác SAB vuông tại S nên $MS = MA = MB$.
 Gọi H là hình chiếu của S trên AB.
 Từ giả thiết suy ra: $SH \perp (ABCD)$.

Ta có:
$$\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$$

Nên OM là trục của tam giác SAB, suy ra $OA = OB = OS$ (2).

Từ (1), (2) ta có $OS = OA = OC = OD$.



Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$, bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

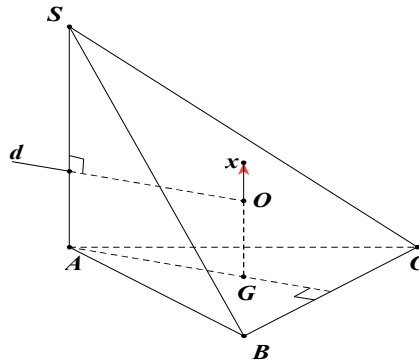
$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\sqrt{2} \pi a^3}{3} \quad (\text{đvdt}). \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABC) . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{39}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{15}}{4}$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ G dựng tia $Gx \perp (ABC)$ (như hình vẽ). Suy ra Gx là trục của tam giác ABC. Trong mặt phẳng (SA, Gx) , kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA.



Gọi $O = Gx \cap d \Rightarrow \begin{cases} O \in Gx \\ O \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OA = OS \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OS = R$

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $OG = PA = \frac{1}{2} SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

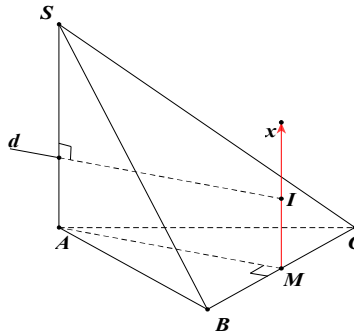
Trong tam giác vuông OGA , ta có $R = OA = \sqrt{OG^2 + AG^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. **Chọn C.**

Câu 66. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh AS, AB, AC đôi một vuông góc và $AS = a$, $AB = 2a, AC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là:

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
Kẻ $Mx \perp (ABC)$ (như hình vẽ).



Suy ra Mx là trục của ΔABC . Trong mặt phẳng (SA, Mx) kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Mx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính mặt cầu: $R = IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông với đáy (ABC) . Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với đáy (ABC) một góc 60° . Gọi S, V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V}{S}$ bằng?

- A. $a\sqrt{14}$ B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ C. $\frac{3a\sqrt{14}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Ta có: $60^\circ = (\widehat{SI, (ABC)}) = (\widehat{SI, AI}) = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A, suy ra $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

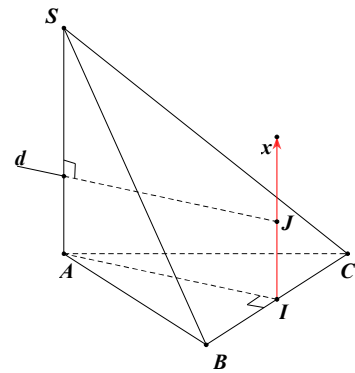
Trong ΔSIA , ta có: $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Kẻ $Ix \perp (ABC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Ix là trục của ΔABC .

Trong mặt phẳng (SA, Ix) , kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Ix tại J. Khi đó, J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

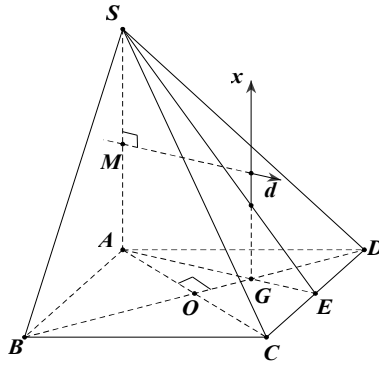
Bán kính: $R = JA = \sqrt{JI^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{4}}{4}$ nên $\frac{V}{S} = \frac{R}{3} = \frac{a\sqrt{14}}{12}$. **Chọn B.**



Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ACD$ nhận giá trị:

- A. $\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác đều ACD . Kẻ $Gx \perp (ACD)$, suy ra Gx là trục của ΔACD . Trong mặt phẳng (SA, Gx) , kẻ trung trực d của đoạn SA cắt Gx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

$$\text{Ta có } IG = MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; GA = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Suy ra bán kính: } R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}. \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC = a$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, $SA = SB = a, \widehat{ASB} = 120^\circ$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

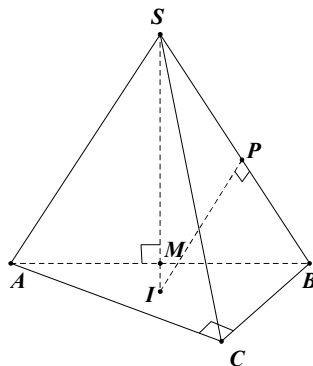
A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{a}{2}$

C. a

D. $2a$

Lời giải



Gọi M trung điểm AB, suy ra $SM \perp AB$ và $SM \perp (ABC)$.

Do đó, SM là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SBM) , kẻ đường trung trực d của đoạn SB cắt SM tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = SI$.

$$\text{Ta có: } AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SMB \text{ ta có } SM = SB \cdot \cos \widehat{MSB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

Ta có $\Delta SPI \sim \Delta SMB$. Suy ra $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SI} \Rightarrow R = SI = \frac{SB \cdot SP}{SM} = a$. **Chọn C.**

Câu 70. Cho hình cầu (S) tâm O , bán kính R . Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng 60° . Tính tỉ số thể tích của hình trụ (T) và hình nón (N).

- A. $\frac{V_T}{V_N} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{V_T}{V_N} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{V_T}{V_N} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ D. Chọn khác

Lời giải

Bài quy về hình nón tâm O ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và nội tiếp tam giác đều SEF mà $EF // AB$.

Vì OAB là tam giác vuông cân nên: $OA = BC = R\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra } V_T = \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 BC = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}$$

Ta thấy, tâm O cũng hình tròn cũng chính

là tâm của hình vuông $ABCD$ đồng thời cũng là trọng tâm của tam giác đều SEF .

Như vậy, đường cao của tam giác SEF là $SH = 3OH = 3R$.

Trong tam giác EOH (vuông tại H , $\widehat{EOH} = 30^\circ$).

Ta có: $EH = OH \cdot \sqrt{3} = R\sqrt{3}$

$$\text{Thể tích của hình nón: } V_H = \frac{1}{3} \pi EH^2 \cdot SH = \frac{1}{3} \pi \cdot 3R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3. \text{ Vậy } \frac{V_T}{V_N} = \frac{\frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}}{3\pi R^3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn A.

Câu 71. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{3}$, góc \widehat{ACB} bằng 30° . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

- A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$

Lời giải

Ta có $60^\circ = (\widehat{AB'}, (ABC)) = (\widehat{AB'}, AB) = \widehat{B'AB}$.

Trong tam giác ABC , ta có $AB = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

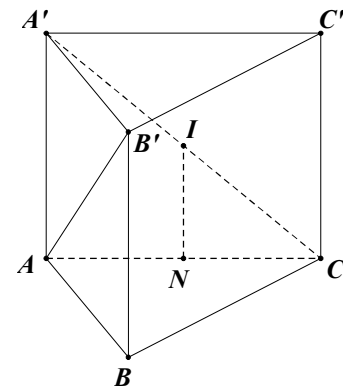
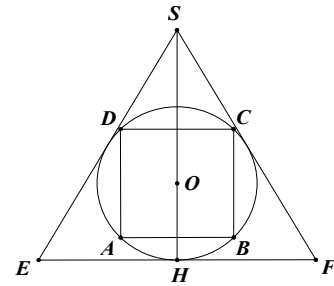
Trong $\Delta B'BA$, ta có $BB' = AB \cdot \tan \widehat{B'AB} = \frac{3a}{2}$.

Gọi N là trung điểm AC , suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Gọi I là trung điểm $A'C$, suy ra $IN // A'A \Rightarrow IN \perp (ABC)$.

Do đó IN là trục của ΔABC , suy ra $IA = IB = IC$ (1)

Hơn nữa, tam giác $A'AC$ vuông tại A có I là trung điểm $A'C$ nên $IA' = IB' = IC'$ (2)



Từ (1),(2), ta có $IA' = IA = IB = IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$

với bán kính $R = IA' = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 72. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{85a}{108}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{3a}{4}$ D. $\frac{31a}{36}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có: $60^\circ = (\widehat{(AB'C'), (A'B'C')}) = \widehat{(AM, A'M)} = \widehat{AMA'}$.

Trong $\triangle AA'M$, có $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}$.

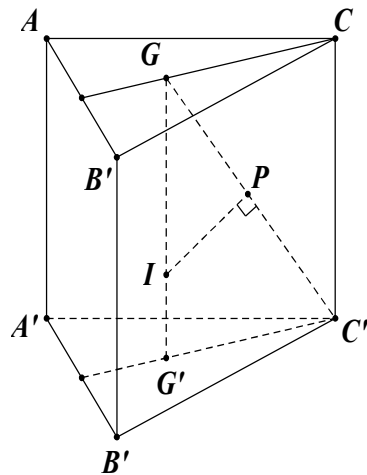
Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'B'C'$ vì lăng trụ đứng nên $GG' \perp (A'B'C')$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

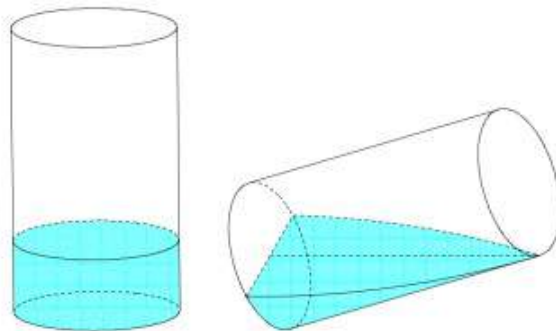
Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $GA'B'C'$, bán kính $R = GI$.

Ta có $\triangle GPI \sim \triangle GG'C' \Rightarrow \frac{GP}{GG'} = \frac{GG'}{GC'}$

$\Rightarrow R = GI = \frac{GP \cdot GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}$. **Chọn D.**



Câu 73. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy



A. 240cm^3

B. $240\pi\text{cm}^3$

C. 120cm^3

D. $120\pi\text{cm}^3$

Đáp án A

$$V = \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \cdot \frac{h}{R} dx = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{2R^2 h}{3} = \frac{2R^3 \tan \varphi}{3} \quad (\text{Với } h = MN; \tan \varphi = \frac{h}{R}).$$

$$\text{Do đó } V = \frac{2 \cdot 6^2 \cdot 10}{3} = 240\text{cm}^3.$$