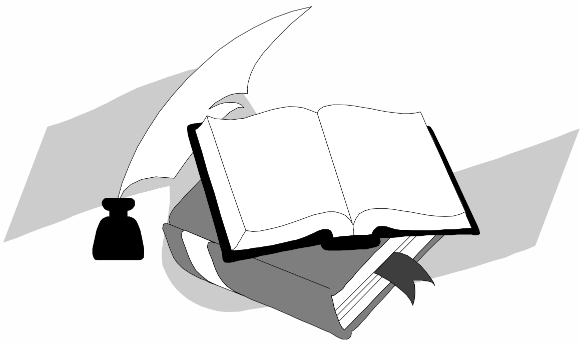
NGUYỄN QUỐC HOÀN

0913 661 886

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

(Quyển 2)

(Năm học 2019 – 2020)



Hà Nội, 6 – 2019

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 1: LŨY THỪA

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa lũy thừa và căn

- Cho số thực b và số nguyên dương $n\left(n\geq 2\right)$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n=b$.

- **Chú ý:** ∘ Với n lẻ và $b\in\mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu $\sqrt[n]{b}$

  ∘ Với n chẵn: $b>0$: Không tồn tại căn bậc n của b.

  $b=0$: Có một căn bậc n của b là 0

  $b>0$: Có hai bậc n của a là hai số đối nhau, căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là - $\sqrt[n]{b}$.

Số mũ α	**Cơ số a**	**Lũy thừa** a^α
$\alpha=n\in\mathbb{N}^*$	$a\in\mathbb{R}$	$a^\alpha=a^n=a.a...a$ (n là thừa số a)
$\alpha=0$	$a\neq 0$	$a^\alpha=a^0=1$
$\alpha=-n,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$a\neq 0$	$a^\alpha=a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
$\alpha=\dfrac{m}{n},\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$	$a>0$	$a^\alpha=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\left(\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow a=b^n\right)$
$\alpha=\lim r_n,\left(r_n\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}^*\right)$	$a>0$	$-1\leq m\leq 2$

2. Một số tính chất và lũy thừa

- Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$$a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta};\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta};\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha.\beta};\left(ab\right)^\alpha=a^\alpha.b^\alpha;\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha};\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha .$$

- Nếu a>1 thì $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$; Nếu 0< α <1 thì $\log_e b=\ln b$

- Với mọi $0<\alpha<b$, ta có: $a^m<b^m\Leftrightarrow m>0;a^m>b^m\Leftrightarrow m<0$

- Chú ý: ∘ Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.

  ∘ Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số α phải khác 0.

  ∘ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số α phải dương.

3. Một số tính chất của căn bận n

- Với $a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x.\ln a}\Rightarrow\left(\log_a|u|\right)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$

$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x},(x>0)\Rightarrow\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$

$\circ\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a,\forall a$.

$\circ\sqrt[2n+1]{ab}=\sqrt[2n+1]{a}.\sqrt[2n+1]{b},\forall a,b$.

$\circ\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}},\forall a,\forall b\neq 0$.

• Với $\log_{27}5=a\Rightarrow\log_3 5=3a,\log_8 7=b\Rightarrow\log_3 7=\dfrac{3b}{c}\Rightarrow\log_2 5=3ac$, ta có:

$\circ\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\forall a>0,n$ nguyên dương, m nguyên.

$\circ\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a},\forall a\geq 0,n,m$ nguyên dương.

$\circ$ Nếu $\dfrac{p}{n}=\dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[m]{a^q},\forall a>0,m,n$ nguyên dương, p,q nguyên. Đặc biệt: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[m.n]{a^m}$.

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 1: Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là:

A. 9. **B.** -9. **C.** -10. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C Ta có $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}=\dfrac{2^{3-1}+5^{-3+4}}{10^{-3+2}-1}=\dfrac{4+5}{10^{-1}-1}=\dfrac{9}{\frac{1}{10}-1}=-10.$

Câu 2: Giá trị của biểu thức $E=3^{\sqrt{2}-1}.9^{\sqrt{2}}.27^{1-\sqrt{2}}$ bằng:

A. 27. **B.** 9. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B Ta thấy $E=3^{\sqrt{2}-1}.3^{2\sqrt{2}}.3^{3-3\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}}=3^2=9$

Câu 3: Giá trị của $K=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ bằng

A. $K=16$. **B.** $K=24$. **C.** $K=18$. **D.** $K=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 4: Biết $4^x+4^{-x}=23$ tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$:

A. 5. **B.** $\sqrt{27}$. **C.** $\sqrt{23}$. **D.** 25.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Do $2^x+2^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $2^x+2^{-x}=\sqrt{(2^x+2^{-x})^2}=\sqrt{2^{2x}+2+2^{-2x}}=\sqrt{4^x+4^{-x}+2}=\sqrt{23+2}=5$.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ với $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ và $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=(2+\sqrt{3}+1)^{-1}+(2-\sqrt{3}+1)^{-1}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}=1$

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức $P=(7+4\sqrt{3})^{2017}(4\sqrt{3}-7)^{2016}$.

A. $P=1$. **B.** $P=7-4\sqrt{3}$. **C.** $7+4\sqrt{3}$. **D.** $P=(7+4\sqrt{3})^{2016}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C. $P=(7+4\sqrt{3})^{2017}(4\sqrt{3}-7)^{2016}=\left[(7+4\sqrt{3})(4\sqrt{3}-7)\right]^{2016}(7+4\sqrt{3})=(7+4\sqrt{3})$

Câu 7: Viết biểu thức $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}$ về dạng 2^x và biểu thức $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ về dạng 2^y. Ta có $x^2+y^2=?$

A. $\frac{2017}{567}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{53}{24}$ **D.** $\frac{2017}{576}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2^3}}=2^{\frac{3}{8}}\Rightarrow x=\frac{3}{8}$; $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2.2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{11}{6}}\Rightarrow y=\frac{11}{6}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{53}{24}$

Câu 8: Viết biểu thức $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa 2^m ta được $m=?$.

A. $-\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt[6]{2^2}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3}=2^{\frac{-13}{6}}$.

Câu 9: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}$. **B.** $(-0,1)^0=1$. **C.** $(-\pi)^1=-\pi$. **D.** $(-0,5)^{-1}=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có lũy thừa với số mũ hữu tỉ $(a)^{\frac{m}{n}}$ thì cơ số $a>0$ nên khẳng định ***sai*** là $\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}$.

Câu 10: Cho $2^x=\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}}$. Khi đó giá trị của x là

A. $\frac{1}{6!}$. **B.** $\frac{1}{5!}$. **C.** $\frac{1}{4!}$. **D.** $\frac{1}{3!}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $2^x=\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}}\Leftrightarrow 2^x=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}}\Leftrightarrow 2^x=2^{\frac{1}{6!}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6!}$.

BIẾN ĐỔI, RÚT GỌN, BIỂU DIỄN CÁC BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 11: Đơn giản biểu thức $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4}$, ta được:

A. $x^2(x+1)$. **B.** $-x^2(x+1)$ **C.** $x^2(x-1)$. **D.** $x^2|x+1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4}=\sqrt[4]{x^2(x+1)}^4=\left|x^2(x+1)\right|=x^2|x+1|$.

Câu 12: Đơn giản biểu thức $\sqrt[3]{x^3(x+1)^9}$, ta được:

A. $-x(x+1)^3$. **B.** $x(x+1)^3$. **C.** $\left|x(x+1)^3\right|$. **D.** $x\left|(x+1)^3\right|$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\sqrt[3]{x^3(x+1)^9}=\sqrt[3]{\left(x(x+1)^3\right)^3}=x(x+1)^3$

Câu 13: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ ($x>0$) dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{1}{12}}$. **B.** $P=x^{\frac{5}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{4}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $P=\left(x.x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{12}}$

Câu 14: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$, $(x>0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{7}{12}}$. **B.** $P=x^{\frac{8}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{6}{12}}$. **D.** $P=x^{\frac{9}{12}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. $P=\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{x^2x^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{7}{3}}}=\left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{12}}$

Câu 15: Viết biểu thức $P=a.\sqrt[3]{a^2.\sqrt{a}}$ ($a>0$) dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ

A. $P=a^{\frac{5}{3}}$. **B.** $P=a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $P=a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $P=a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $P=a.\sqrt[3]{a^2.\sqrt{a}}=a.\left(a^2.a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a.\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a.a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{11}{6}}$

Câu 16: Cho $a>0$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{a}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $\left(a^2\right)^4=a^6$. **D.** $\sqrt[7]{a^5}=a^{\frac{7}{5}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét các đáp án:

A. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$ nên đáp án A sai.

B. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$ nên đáp án B đúng.

C. $\left(a^2\right)^4=a^{2.4}=a^8\neq a^6$ nên đáp án C sai.

D. $\sqrt[7]{a^5}=a^{\frac{5}{7}}\neq a^{\frac{7}{5}}$ nên đáp án D sai. (Chú ý: học sinh khi làm bài sẽ kiểm tra đến đáp án B đúng thì dừng lại)

Câu 17: Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó

A. $\alpha=\frac{11}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{5}{3}$. **C.** $\alpha=\frac{2}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{a^{1+\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}=a^{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho $f(x)=\frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x}}$ khi đó $f(1,3)$ bằng:

A. $0,13$. **B.** $1,3$. **C.** $0,013$. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Vì $x=1,3>0$ nên ta có: $f(x)=\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}=x\Rightarrow f(1,3)=1,3$

Câu 19: Cho $f(x)=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[12]{x^5}}}$. Khi đó $f(2,7)$ bằng

A. $0,027$. **B.** $0,27$. **C.** $2,7$. **D.** 27.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì $x=2,7>0$ nên ta có: $f(x)=\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[12]{x^5}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{5}{12}}=x\Rightarrow f(2,7)=2,7$.

Câu 20: Bạn An trong quá trình biến đổi đã làm như sau: $\sqrt[3]{-27}\overset{(1)}{=}(-27)^{\frac{1}{3}}\overset{(2)}{=}(-27)^{\frac{2}{6}}\overset{(3)}{=}\sqrt[6]{(-27)^2}\overset{(4)}{=}3$ bạn đã **sai** ở bước nào?

A. (4). **B.** (2). **C.** (3). **D.** (1).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 21: Cho $a+b=1$ thì $\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a\left(4^b+2\right)+4^b\left(4^a+2\right)}{\left(4^a+2\right)\left(4^b+2\right)}=\frac{2.4^{a+b}+2.\left(4^a+4^b\right)}{4^{a+b}+2.\left(4^a+4^b\right)+4}=\frac{8+2.\left(4^a+4^b\right)}{8+2.\left(4^a+4^b\right)}=1$$

Câu 22: Rút gọn biểu thức $\frac{\frac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0.5}-b^{0.5}}$ ta được:

A. $a+b$. **B.** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **C.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **D.** $a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $$\frac{\frac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0.5}-b^{0.5}}=\frac{\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-2\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Câu 23: Cho các số thực dương a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}-\sqrt[3]{ab}$ là

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$P=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}-\sqrt[3]{ab}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}-(ab)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}-(ab)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-(ab)^{\frac{1}{3}}=0$$

Câu 24: Biết $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}}=x^{16}$ $(x>1)$ và $a+b=2$. Tính giá trị của biểu thức $M=a-b$.

A. 18. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}}=x^{16}\Leftrightarrow x^{a^2-b^2}=x^{16}\Leftrightarrow a^2-b^2=16\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=16\ (1)$.

Mà: $a+b=2$ nên $(1)\Leftrightarrow 2(a-b)=16\Leftrightarrow a-b=8$.

Câu 25: Cho $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Biểu thức $2^{\sin^4\alpha}.2^{\cos^4\alpha}.4^{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$ bằng

A. 4. **B.** $2^{\sin\alpha.\cos\alpha}$ **C.** $2^{\sin\alpha+\cos\alpha}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $2^{\sin^4\alpha}.2^{\cos^4\alpha}.4^{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=2^{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=2^{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}=2.$

Câu 26: Cho biểu thức $P=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=\frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. **B.** $P=\sqrt[3]{ab}$. **C.** $P=(ab)^{\frac{2}{3}}$. **D.** $P=-\frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$P=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}-\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}.\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{ab}}.$$

Câu 27: Với $a,b>0$ bất kỳ. Cho biểu thức $P=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $P=\sqrt{ab}$. **B.** $P=\sqrt[3]{ab}$. **C.** $P=\sqrt[6]{ab}$. **D.** $P=ab$.

Hướng dẫn giải

Chọn B Ta có $P=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{ab}$.

Câu 28: Cho a,b là các số dương. Rút gọn biểu thức $P=\frac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là :

A. ab^2. **B.** a^2b. **C.** ab. **D.** a^2b^2.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $P=\frac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\frac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{a^{12}.b^6}}=\frac{a^3.b^2}{a^2.b}=ab$. Vậy đáp án C là chính xác.

Câu 29: Cho b là số thực dương. Biểu thức $\frac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. – 2. **B.** – 1. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}=\dfrac{\sqrt[5]{b^2b^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{bb^{\frac{1}{2}}}}=\dfrac{\sqrt[5]{b^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt[3]{b^{\frac{3}{2}}}}=\dfrac{\left(b^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=1$

Câu 30: Cho $T=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$. Biểu thức rút gọn của T là:

A. x. **B.** $2x$. **C.** $x+1$. **D.** $x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $T=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{x}\right)^{-1}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\dfrac{x}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}=x$.

Câu 31: Rút gọn biểu thức thức $P=\dfrac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\left(x,y>0\right)$.

A. $P=\dfrac{x}{y}$. **B.** $P=xy$. **C.** $P=\sqrt[4]{xy}$. **D.** $P=\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\dfrac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\dfrac{xy\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=xy$.

Câu 32: Cho các số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ được kết quả là:

A. $\sqrt[4]{b}$. **B.** $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. **C.** $b-a$. **D.** $\sqrt[4]{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $P=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

$$=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}.$$

Câu 33: Cho a,b là hai số thực dương. Rút gọn biểu thức $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

A. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$. **C.** $\sqrt[3]{ab}$. **D.** $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{ab}$.

Câu 34: Cho biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa.

$D=\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\dfrac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}},\left(ab\neq 0;a\neq\pm b;n\in N\right)$. **Chọn** đáp án đúng

A. $D=\dfrac{4a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **B.** $D=\dfrac{2a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **C.** $D=\dfrac{3a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **D.** $D=\dfrac{a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$D=\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}=\frac{4a^{-n}b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}=\frac{4\left(a^{2n}b^{2n}\right)}{a^{n}b^{n}\left(b^{2n}-a^{2n}\right)}=\frac{4a^{n}b^{n}}{b^{2n}-a^{2n}}$$

Câu 35: Cho số thực dương a. Rút gọn biểu thức $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$

A. $9a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $9a$. **C.** $3a$. **D.** $3a^{\frac{1}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2=\left[\frac{4a^2-9}{a\dfrac{(2a-3)}{a^{\frac{1}{2}}}}+\frac{a^2-4a+3}{a\dfrac{(a-1)}{a^{\frac{1}{2}}}}\right]^2=\left[\frac{(2a+3)+(a-3)}{a^{\frac{1}{2}}}\right]^2=9a$$

Câu 36: Rút gọn biểu thức: $\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}\ (a>0)$.

A. a^4. **B.** a. **C.** a^5. **D.** a^3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$.

Câu 37: Cho hai số thực dương a và b. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $x^{\frac{7}{30}}$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **D.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{2}}}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{6}}}=\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}}=\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Câu 38: Cho $a>0,b>0$ .Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{ab}$. **B.** $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}$. **D.** $\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$P=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right):\left(2+\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}+\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right):\left(\frac{2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}\right)$$

$$=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right):\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Câu 39: Viết biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}}$, $(a,b>0)$ về dạng lũy thừa $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ ta được $m=?$.

A. $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{-2}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Biểu thức $\frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}}.\frac{a^{\frac{1}{15}}}{b^{\frac{1}{15}}}=\frac{a^{\frac{2}{15}}}{b^{\frac{2}{15}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{15}}$

Câu 40: Cho $a>0,b>0$ và $a\neq b$. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$ là:

A. $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. **B.** $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}$. **C.** $\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}$. **D.** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $P=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^2-\left(\sqrt[6]{b}\right)^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$

Câu 41: Cho số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$

A. $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b$

Câu 42: Cho số thực dương a. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$ là:

A. 1. **B.** $a+1$. **C.** $2a$. **D.** a.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}=\frac{a+a^2}{a+1}=\frac{a(a+1)}{a+1}=a$

Câu 43: Cho biểu thức $P=\left\{a^{\frac{1}{3}}\left[a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\left(a^2b^2\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6$ với., b là các số dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P=\frac{\sqrt{a}}{ab^3}$. **B.** $P=b^3\sqrt{a}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{a}}{b^3}$. **D.** $P=\frac{b^3\sqrt{a}}{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $P=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(a^{-\frac{1}{2}}.b^{-\frac{1}{3}}.a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}\right)^3}=\frac{a^2}{a^{\frac{-3}{2}}.a^4.b^3}=\frac{1}{a^{\frac{-3}{2}+2}.b^3}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}.b^3}=\frac{\sqrt{a}}{a.b^3}$.

Câu 44: Cho $a>0,b>0$. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right).\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right).\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$ là:

A. $\sqrt[10]{a}-\sqrt[10]{b}$. **B.** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **C.** $a-b$. **D.** $\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$P=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right).\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right).\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left[\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right].\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right).\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b$.

Câu 45: Cho các số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $P=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right).\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)$ được kết quả là:

A. $a-b$. **B.** $a-b^2$. **C.** $b-a$. **D.** a^3-b^3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right).\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3=a-b^2$

Câu 46: Cho $P=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$ $(x>0,y>0)$. Biểu thức rút gọn của P là

A. $2x$. **B.** x. **C.** $x+y$. **D.** $x-y$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2\right]^{-1}=x$.

Câu 47: Cho $a=1+2^{-x}$, $b=1+2^{x}$. Biểu thức biểu diễn b theo a là:

A. $\frac{a-2}{a-1}$. **B.** $\frac{a-1}{a}$. **C.** $\frac{a+2}{a-1}$. **D.** $\frac{a}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $a=1+2^{-x}>1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $2^x=\frac{1}{a-1}$. Do đó: $b=1+\frac{1}{a-1}=\frac{a}{a-1}$.

Câu 48: Cho biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[k]{x^3}}}$ $(x>0)$. Xác định k sao cho biểu thức $P=x^{\frac{23}{24}}$.

A. $k=6$. **B.** $k=2$. **C.** $k=4$. **D.** Không tồn tại k.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[k]{x^3}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x^{2+\frac{3}{k}}}}=\sqrt{x^{1+\frac{2k+3}{3k}}}=x^{\frac{5k+3}{6k}}$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi : $\frac{5k+3}{6k}=\frac{23}{24}\Leftrightarrow k=4$.

Câu 49: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}},(x>0)$ ta được

A. $\sqrt[4]{x}$. **B.** $\sqrt[6]{x}$. **C.** $\sqrt[8]{x}$. **D.** $\sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{8}}.x^{\frac{1}{16}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{15}{16}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{15}{16}-\frac{11}{16}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$

Câu 50: Cho số thực dương a. Biểu thức $P=\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $a^{\frac{25}{13}}$. **B.** $a^{\frac{37}{13}}$. **C.** $a^{\frac{53}{36}}$. **D.** $a^{\frac{43}{60}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $a\sqrt[5]{a}=a.a^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{6}{5}}\Rightarrow\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}=\left(a^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{10}}$.

Tương tự rút gọn dần ta thu được kết quả là $a^{\frac{43}{60}}$.

Câu 51: Cho biểu thức $P = x.\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$, x>0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{2}{3}}$. **B.** $P = x^{\frac{3}{10}}$. **C.** $P = x^{\frac{13}{10}}$. **D.** $P = x^{\frac{1}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $P = x.\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = x.\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{2}}}} = x.\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}} = x.\sqrt[5]{x.x^{\frac{1}{2}}} = x.\sqrt[5]{x.x^{\frac{3}{2}}} = x.x^{\frac{3}{10}} = x^{\frac{13}{10}}$.

Câu 52: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P = x^{\frac{13}{24}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{4}}$. **D.** $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Ta có, với $x>0$: $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.

Câu 53: Viết biểu thức $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$, $(a,b>0)$ về dạng lũy thừa $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ ta được $m=?$.

A. $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{-2}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[5]{\frac{b}{a}}.\sqrt[15]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{5}}.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{15}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}}$.

Câu 54: Cho $a>0$; $b>0$. Viết biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ về dạng a^m và biểu thức $b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}$ về dạng b^n. Ta có $m+n=?$

A. $\frac{1}{3}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}} \Rightarrow m=\frac{5}{6}; b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}=b^{\frac{2}{3}}:b^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{6}} \Rightarrow n=\frac{1}{6} \Rightarrow m+n=1$

Câu 55: Biểu thức $Q=\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$ với $(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $Q=x^{\frac{2}{3}}$. **B.** $Q=x^{\frac{5}{3}}$. **C.** $Q=x^{\frac{5}{2}}$. **D.** $Q=x^{\frac{7}{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Do $x>0$ nên $Q=\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{3}}$.

VẬN DỤNG:

Câu 56: Cho các số thực dương phân biệt a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a}+\sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ có dạng $P=m\sqrt[4]{a}+n\sqrt[4]{b}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $2m-n=-3$. **B.** $m+n=-2$. **C.** $m-n=0$. **D.** $m+3n=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a}+\sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}.$$

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-2\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}.$$

Do đó $m=-1; n=1$.

Câu 57: Cho các số thực dương a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\left(2a^{\frac{1}{4}}-3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(2a^{\frac{1}{4}}+3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}}+9b^{\frac{1}{2}}\right)$ có dạng là $P=xa+yb$. Tính $x+y$?

A. $x+y=97$. **B.** $x+y=-65$. **C.** $x-y=56$. **D.** $y-x=-97$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $P=\left(2a^{\frac{1}{4}}-3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(2a^{\frac{1}{4}}+3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}}+9b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\left(2a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(3b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right).\left(4a^{\frac{1}{2}}+9b^{\frac{1}{2}}\right)$

$$=\left(4a^{\frac{1}{2}}-9b^{\frac{1}{2}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}}+9b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(4a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(9b^{\frac{1}{2}}\right)^2=16a-81b.$$

Do đó: $x=16, y=-81$.

Câu 58: Cho $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}$ **B.** $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

C. $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ **D.** $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{ax^3.1}=x\sqrt[3]{a}\quad\Rightarrow A=x\sqrt[3]{a}$$

Tương tự $A=y\sqrt[3]{b},\ A=z\sqrt[3]{c}$. Vậy $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Câu 59: Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}},(a>0,a\neq\pm1)$, có dạng $P=\frac{m}{a+n}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $m+3n=-1$. **B.** $m+n=-2$. **C.** $m-n=0$. **D.** $2m-n=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $P=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2}-\frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right).\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

$=\left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}.\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{a-1}.$ Do đó $m=2;n=-1$.

Câu 60: Cho $x<0$. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}}$.

A. $\frac{1-2^x}{1+2^x}$ **B.** $\frac{2-2^x}{2+2^x}$ **C.** $\frac{1-2^{2x}}{1+2^{2x}}$ **D.** $\frac{1-4^x}{1+4^x}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\left(2^x-2^{-x}\right)^2+4\right]=\frac{1}{4}\left(2^x+2^{-x}\right)^2$ vì $2^x.2^{-x}=1$

$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2^x+2^{-x}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|2^x+2^{-x}\right|=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)$ $2^x+2^{-x}>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}=-1+\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}-2\right)=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2\\ 1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}+2\right)=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}=\frac{\left|2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right|}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}=\frac{\left|2^x-1\right|}{2^x+1}$$

Vì $x<0$ nên $2^x<2^0=1\Rightarrow 2^x-1<0\Rightarrow\left|2^x-1\right|=1-2^x$. Vậy $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^x-2^{-x}\right)^2}}}=\frac{1-2^x}{1+2^x}$

Câu 61: Rút gọn biểu thức $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right).\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$ được kết quả là:

A. $x-y$. **B.** $x+y$. **C.** 2. **D.** $\frac{2}{\sqrt{xy}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right).\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right).\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3\sqrt{y}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right).\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3\sqrt{y}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=\frac{2}{x-y}.x-\frac{2y}{x-y}=2$$

Câu 62: Cho các số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$ được kết quả là:

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left[\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right]:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$

$$=\left\{\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right\}:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$$

$$=\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2-\sqrt[3]{ab}\right]:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=1$$

Câu 63: Cho $x>0$; $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$; về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$; về dạng y^n. Ta có $m-n=$?

A. $-\frac{11}{6}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{8}{5}$ **D.** $-\frac{8}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{103}{60}}\Rightarrow m=\frac{103}{60}$

$$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}=y^{\frac{4}{5}}:\left(y^{\frac{5}{6}}.y^{\frac{1}{12}}\right)=y^{-\frac{7}{60}}\Rightarrow n=-\frac{7}{60}\Rightarrow m-n=\frac{11}{6}$$

Câu 64: Rút gon biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x}+1\right)$ ta được:

A. x^2+1 **B.** x^2+x+1 **C.** x^2-x+1 **D.** x^2-1

Hướng dẫn giải

Chọn B. Cách 1: Nhập

$$\left(\sqrt{X}-\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}+\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}-\sqrt{X}+1\right)\xrightarrow[X=100]{calc}10101=100^2+100+1=x^2+x+1\Rightarrow B$$

Cách 2: Thử lần lượt 4 đáp án. Ở đây thầy thử trước là đáp án B nhé

$$\left(\sqrt{X}-\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}+\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}-\sqrt{X}+1\right):\left(X^2+X+1\right)\xrightarrow[X=1]{calc}3;3\Rightarrow B$$

Câu 65: Cho số thực dương x. Biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ có dạng $x^{\frac{a}{b}}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, biểu thức liên hệ giữa a và b là:

A. $a+b=509$. **B.** $a+2b=767$. **C.** $2a+b=709$. **D.** $3a-b=510$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}}}}}$

$$=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{7}{8}}}}}}}$$

$$=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{15}{16}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{31}{16}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{xx^{\frac{31}{32}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{63}{32}}}}}$$

$=\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{63}{64}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{127}{64}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{127}{128}}}}=\sqrt{x\cdot x^{\frac{255}{128}}}=\sqrt{x^{\frac{255}{128}}}=x^{\frac{255}{256}}$. Do đó $a=255, b=256$.

Nhận xét: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}}=x^{\frac{2^8-1}{2^8}}=x^{\frac{255}{256}}$.

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay

Nhẩm $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Ta nhập màn hình **1a2=(M+1)1a2**

Sau đó nhấn 7 lần (bằng với số căn bậc hai còn lại chưa xử lý) phím =.

SO SÁNH CÁC LŨY THỪA

Câu 66: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

(I): $\sqrt[3]{-0.4} > \sqrt[5]{-0.3}$ (II): $\sqrt[5]{-5} > \sqrt[3]{-3}$ (III): $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$ (IV): $\sqrt[3]{-5} > \sqrt[5]{-3}$

A. (I) và (IV). **B.** (I) và (III). **C.** (IV). **D.** (II0 và (IV).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng tính chất với hai số a,b tùy ý $0 \le a < b$ và n nguyên dương ta có $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Câu 67: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $\left(2-\sqrt{2}\right)^3 < \left(2-\sqrt{2}\right)^4$. **B.** $\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^6 > \left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^7$.

C. $\left(4-\sqrt{2}\right)^3 < \left(4-\sqrt{2}\right)^4$. **D.** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4 < \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 68: Với giá trị nào của x thì $(x^2+4)^{x-5} > \left(x^2+4\right)^{5x-3}$

A. $x > -\frac{1}{2}$. **B.** $x < \frac{1}{2}$. **C.** $x < -\frac{1}{2}$. **D.** $x > \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $(x^2+4)^{x-5} > \left(x^2+4\right)^{5x-3}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Khi đó $x^2+4 > 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^2+4)^{x-5} > \left(x^2+4\right)^{5x-3} \Leftrightarrow x-5 > 5x-3 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

Câu 69: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $a^{-0,25} > a^{-\sqrt{3}}$

A. $1 < a < 2$. **B.** $a < 1$. **C.** $0 < a < 1$. **D.** $a > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $-0,25 > -\sqrt{3}$ và số mũ không nguyên nên $a^{-0,25} > a^{-\sqrt{3}}$ khi $a > 1$.

Câu 70: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $a^{-\frac{1}{17}} > a^{-\frac{1}{8}}$

A. $a > 1$. **B.** $a < 1$. **C.** $0 < a < 1$. **D.** $1 < a < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $-\frac{1}{17} > -\frac{1}{8}$ và số mũ không nguyên nên $a^{-\frac{1}{17}} > a^{-\frac{1}{8}}$ khi $a > 1$.

Câu 71: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{7}}$

A. $a < 1$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $1 < a < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Do $\sqrt{3} < \sqrt{7}$ và số mũ không nguyên $\Rightarrow a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Câu 72: So sánh hai số m và n nếu $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

A. $m < n$. **B.** $m = n$.

C. $m > n$. **D.** Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \Leftrightarrow m < n$.

Câu 73: So sánh hai số m và n nếu $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$

A. Không so sánh được. **B.** $m = n$. **C.** $m > n$. **D.** $m < n$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $0<\frac{1}{9}<1$ nên $\left(\frac{1}{9}\right)^m>\left(\frac{1}{9}\right)^n \Leftrightarrow m<n$.

Câu 74: So sánh hai số m và n nếu $\left(\sqrt{2}\right)^m<\left(\sqrt{2}\right)^n$

A $m>n$. **B.** $m=n$. **C.** $m<n$. **D.** Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $\sqrt{2}>1$ nên $\left(\sqrt{2}\right)^m<\left(\sqrt{2}\right)^n \Leftrightarrow m<n$.

Câu 75: So sánh hai số m và n nếu $3,2^m<3,2^n$ thì:

A. $m>n$. **B.** $m=n$. **C.** $m<n$. **D.** Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $3,2>1$ nên $3,2^m<3,2^n \Leftrightarrow m<n$.

Câu 76: Cho $3^{|\alpha|}<27$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\left[\begin{array}{l}\alpha<-3\\ \alpha>3\end{array}\right.$. **B.** $\alpha>3$. **C.** $\alpha<3$. **D.** $-3<\alpha<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $3^{|\alpha|}<27 \Leftrightarrow 3^{|\alpha|}<3^3 \Leftrightarrow |\alpha|<3 \Leftrightarrow -3<\alpha<3$. Vậy đáp án D là đáp án chính xác.

Câu 77: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

A. $(0,01)^{-\sqrt{2}}>(10)^{-\sqrt{2}}$. **B.** $(0,01)^{-\sqrt{2}}<(10)^{-\sqrt{2}}$.

C. $(0,01)^{-\sqrt{2}}=(10)^{\sqrt{2}}$. **D.** $a^0=1, \forall a\neq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 78: Nếu $\left(2\sqrt{3}-1\right)^{a+2}<2\sqrt{3}-1$ thì

A. $a<-1$. **B.** $a<1$. **C.** $a>-1$. **D.** $a\geq -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $2\sqrt{3}-1>1$ nên $\left(2\sqrt{3}-1\right)^{a+2}<2\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow a+2<1 \Leftrightarrow a<-1$

Câu 79: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $4^{-\sqrt{3}}>4^{-\sqrt{2}}$. **B.** $3^{\sqrt{3}}<3^{1,7}$. **C.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}<\left(\frac{2}{3}\right)^{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Áp dụng tính chất:

Nếu cơ số $a>1$ thì $\alpha>\beta \Leftrightarrow a^{\alpha}>a^{\beta}$.

Nếu cơ số $0<a<1$ thì $\alpha>\beta \Leftrightarrow a^{\alpha}<a^{\beta}$.

Các đáp án A, B, C bị sai tính chất trên.

Ta có cơ số $\frac{2}{3}<1$ thì $\pi>e \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}<\left(\frac{2}{3}\right)^{e}$.

Câu 80: Khẳng định nào sau đây đúng

A. $a^0=1 \forall a$. **B.** $a^2>1 \Leftrightarrow a>1$. **C.** $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đáp án A và B sai do áp dụng trực tiếp lí thuyết.

Dùng máy tính để kiểm tra kết quả đáp án A và D.

Câu 81: Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{2}}>b^{\sqrt{3}}$ thì:

A. $a<1; 0<b<1$. **B.** $a>1; b<1$. **C.** $0<a<1; b<1$. **D.** $a>1; 0<b<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $\begin{cases} \frac{1}{2} > \frac{1}{6} \\ a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow a > 1$ và $\begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ b^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$

Câu 82: Nếu $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > \sqrt{3}+\sqrt{2}$ thì

A. $\forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $x<1$. **C.** $x > -1$. **D.** $x < -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$ nên

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > \sqrt{3}+\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Mặt khác $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1 \Rightarrow x < -1$.

Câu 83: Nếu $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2m-2} < \sqrt{3}+\sqrt{2}$ thì

A. $m>\frac{3}{2}$. **B.** $m<\frac{1}{2}$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m \neq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2m-2} < \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2m-2 > -1 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Câu 84: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$

A. $1<a<2$. **B.** $a<1$. **C.** $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ và số mũ không nguyên $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 1 \Leftrightarrow 0<a<1$.

Câu 85: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$

A. $a>1$. **B.** $0<a<1$. **C.** $1<a<2$. **D.** $a<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $\frac{3}{4} < 2$ và có số mũ không nguyên $\Rightarrow (2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$

$\Leftrightarrow 0 < 2-a < 1 \Leftrightarrow -2 < -a < -1 \Leftrightarrow 2 > a > 1$

Câu 86: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$

A. $a<1$. **B.** $a>0$. **C.** $0<a<1$. **D.** $a>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ và số mũ không nguyên $\Rightarrow (1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a > 1$.

Câu 87: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2$

A. $0<a<1$. **B.** $a>0$. **C.** $a>1$. **D.** $a<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2 \Leftrightarrow a^{0,2} < a^2$. Do $0,2 < 2$ và có số mũ không nguyên nên $a^{0,2} < a^2$ khi $a > 1$.

Câu 88: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$

A. $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{array}\right.$. **B.** $-\frac{1}{2} < a < 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ a < -1 \end{array}\right.$. **D.** $a < -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $-3 < -1$ và số mũ nguyên âm nên $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$ khi $\left[\begin{array}{l} 0 < 2a+1 < 1 \\ 2a+1 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{array}\right.$

Câu 89: Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$

A. $a > 2$. **B.** $a > 0$. **C.** $a > 1$. **D.** $1 < a < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$ và số mũ không nguyên nên $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$ khi $a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$.

Câu 90: So sánh hai số m và n nếu $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$

A. $m > n$. **B.** $m = n$. **C.** $m < n$. **D.** Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n \Leftrightarrow m > n$.

Câu 91: So sánh hai số m và n nếu $\left(\sqrt{5}-1\right)^m < \left(\sqrt{5}-1\right)^n$

A. $m = n$. **B.** $m < n$. **C.** $m > n$. **D.** Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Do $\sqrt{5}-1 > 1$ nên $\left(\sqrt{5}-1\right)^m < \left(\sqrt{5}-1\right)^n \Leftrightarrow m < n$.

TÍNH CHẤT LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 92: Tìm biểu thức không có nghĩa trong các biểu thức sau:

A. $(-3)^{-4}$. **B.** $(-3)^{-\frac{1}{3}}$. **C.** 0^4. **D.** $\left(\frac{1}{2^{-3}}\right)^0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Vì $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{R}$ nên $(-3)^{-\frac{1}{3}}$ không có nghĩa. Vậy đáp án B đúng.

Câu 93: Trong các biểu thức sau biểu thức nào không có nghĩa

A. 0^{-2016}. **B.** $(-2016)^{2016}$. **C.** 0^{-2016}. **D.** $(-2016)^{-2016}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $0^0, 0^{-n}$ $n \in N$ không có nghĩa và $a^\alpha, \alpha \in Z^+$ xác định với $\forall a \in R$

$a^\alpha, \alpha \in Z^-$ xác định với $\forall a \neq 0$;

$a^\alpha, \alpha \notin Z^+$ xác định với $\forall a > 0$

Vì vậy 0^{-2016} không có nghĩa. đáp A là đáp án đúng

Câu 94: Căn bậc 2016 của -2016 là

A. $\sqrt[-2016]{2016}$. **B.** Không có. **C.** $\sqrt[2016]{-2016}$. **D.** $\sqrt[2016]{2016}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. n chẵn và $b<0$ Không tồn tại căn bậc n của b.
-2016<0 nên không có căn bậc 2016 của -2016

Câu 95: Căn bậc 3 của – 4 là

A. $\pm\sqrt[3]{-4}$. **B.** $\sqrt[3]{-4}$. **C.** $-\sqrt[3]{-4}$. **D.** Không có.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Theo định nghĩa căn bậc n của số b: Cho số thực b và số nguyên dương n $(n\ge 2)$.

Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n=b$.

n lẻ, $b\in R$: Có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$

Câu 96: Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\sqrt[2017]{x^{2017}}=x$ đúng

A. $x\ge 0$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R}$. **C.** $x=0$. **D.** Không có giá trị x nào.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\sqrt[n]{x^n}=x$ khi n lẻ nên $\sqrt[2017]{x^{2017}}=x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 97: Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\sqrt[4]{x^4}=\dfrac{1}{|x|}$ đúng

A. $x\ne 0$. **B.** $x\ge 0$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** Không có giá trị x nào.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ nên $\sqrt[4]{x^4}=\dfrac{1}{|x|}$ khi $x\ne 0$. Vậy đáp án A đúng.

Câu 98: Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\sqrt[2016]{x^{2016}}=-x$ đúng

A. Không có giá trị x nào. **B.** $x\ge 0$. **C.** $x=0$. **D.** $x\le 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $\sqrt[2016]{x^{2016}}=|x|$ nên $\sqrt[2016]{x^{2016}}=-x\Leftrightarrow |x|=-x$ khi $x\le 0$

Câu 99: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ $\forall a,b$. **B.** $\sqrt[2n]{a^{2n}}\ge 0$ $\forall a$, n nguyên dương $(n\ge 1)$.

C. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$ $\forall a$, n nguyên dương $(n\ge 1)$. **D.** $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$ $\forall a\ge 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng tính chất căn bậc n ta có đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 100: Khẳng định nào sau đây đúng:

A. a^{-n} xác định với mọi $\forall a\in\mathbb{R}\backslash\{0\};\forall n\in N$ **B.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\forall a\in\mathbb{R}$

C. $a^0=1;\forall a\in\mathbb{R}$ **D.** $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}};\forall a\in\mathbb{R};\forall m,n\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Áp dụng tính chất của lũy thừa với số mũ thực ta có đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 101: Cho $a\in\mathbb{R}$ và $n=2k(k\in\mathbb{N}^*)$, a^n có căn bậc n là:

A. a. **B.** $|a|$. **C.** $-a$. **D.** $a^{\frac{n}{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Áp dụng tính chất của căn bậc n

Câu 102: Cho $a\in\mathbb{R}$ và $n=2k+1(k\in\mathbb{N}^*)$, a^n có căn bậc n là:

A. $a^{\frac{n}{2n+1}}$. **B.** $|a|$. **C.** $-a$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Áp dụng tính chất của căn bậc n

Câu 103: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $x^{2015}=-2$ vô nghiệm. **B.** Phương trình $x^{21}=21$ có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $x^e = \pi$ có 1 nghiệm. **D.** Phương trình $x^{2015} = -2$ có vô số nghiệm.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Áp dụng tính chất của căn bậc n

Câu 104: Cho n nguyên dương $(n \geq 2)$ khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ \forall a > 0$. **B.** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ \forall a \neq 0$. **C.** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ \forall a \geq 0$. **D.** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta có đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 105: Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Có một căn bậc n của số 0 là 0. **B.** $-\frac{1}{3}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{243}$.

C. Có một căn bậc hai của 4. **D.** Căn bậc 8 của 2 được viết là $\pm\sqrt[8]{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Áp dụng tính chất của căn bậc n

Câu 106: Cho $a > 0, b < 0$, khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $\sqrt[4]{a^4b^4} = ab$. **B.** $\sqrt[3]{a^3b^3} = ab$. **C.** $\sqrt{a^2b^2} = |ab|$. **D.** $\sqrt{a^4b^2} = -a^2b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng tính chất căn bâc n ta có đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 107: Cho x, y là các số thực dương; u, v là các số thự**c.** Khẳng định nào sau đây không phải luôn luôn đúng?

A. $\left(y^u\right)^v = y^{uv}$. **B.** $x^u.x^v = x^{u.v}$. **C.** $\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$. **D.** $x^u.y^u = (x.y)^u$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 108: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $\left(a^\alpha\right)^b = a^{\alpha.\beta}$. **B.** $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$. **C.** $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. **D.** $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. $a \in \left(0;\frac{2}{e}\right) \Rightarrow$ Hàm số $y = a^x$ nghịch biến.Do đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Câu 109: Cho các số thực $a, b, \alpha\left(a > b > 0, \alpha \neq 1\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(a+b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. **B.** $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^{-\alpha}}$. **C.** $(a-b)^\alpha = a^\alpha - b^\alpha$. **D.** $(ab)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 110: Với số dương a và các số nguyên dương m , n bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^{m^n} = (a^m)^n$. **B.** $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. **C.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$. **D.** $a^m.a^n = a^{m.n}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 111: Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai** ?

A. $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$. **B.** $(xy)^m = x^m y^m$. **C.** $x^m y^n = (xy)^{m+n}$. **D.** $x^m x^n = x^{m+n}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 112: Tìm điều kiện của a để khẳng định $\sqrt{(3-a)^2} = a-3$ là khẳng định đúng?

A. $\forall a \in \mathbb{R}$. **B.** $a \leq 3$. **C.** $a > 3$. **D.** $a \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

CHUYÊN ĐỀ 2: HÀM SỐ LŨY THỪA

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. **Định nghĩa**: Hàm số $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.
2. **Tập xác định**: Tập xác định của hàm số $y = x^{\alpha}$ là:
   - $D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương.
   - $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ với α nguyên âm hoặc bằng 0.
   - $D = (0; +\infty)$ với α không nguyên.
3. **Đạo hàm**: Hàm số $y = x^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^{\alpha})' = \alpha . x^{\alpha - 1}$.
4. **Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng** $(0; +\infty)$.

$y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$	$y = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$
a. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$	**a. Tập khảo sát**: $(0; +\infty)$
b. Sự biến thiên: + $y' = \alpha x^{\alpha - 1} > 0, \ \forall x > 0.$ + Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty.$ + Tiệm cận: không có	**b. Sự biến thiên**: + $y' = \alpha x^{\alpha - 1} < 0, \ \forall x > 0.$ + Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty, \ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0.$ + Tiệm cận: - Trục Ox là tiệm cận ngang. - Trục Oy là tiệm cận đứng.
c. Bảng biến thiên:	**c. Bảng biến thiên**:

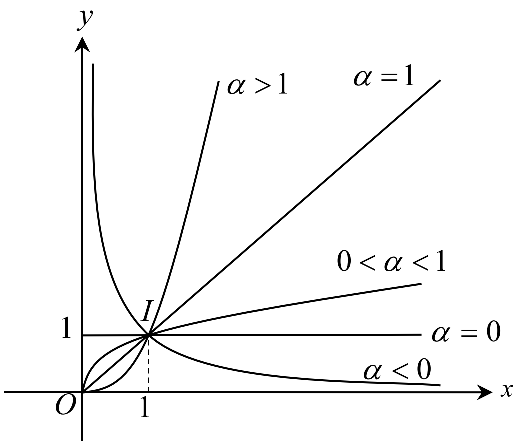
Bảng biến thiên ($\alpha > 0$):

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên ($\alpha < 0$):

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

d. Đồ thị:



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

<u>**Lưu ý**</u>: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^{\pi}$.

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ CHỨA HÀM LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(-x^2+7x-10\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(2;5)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$. **D.** $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hàm số luỹ thừa với số mũ không nguyên, nên hàm số xác định khi $-x^2+7x-10>0 \Leftrightarrow x^2-7x+10<0 \Leftrightarrow 2<x<5$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-x-6\right)^{-4}$ là:

A. $D=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$ **C.** $D=R$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x^2-x-6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1$

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-12}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ **B.** $D=(-1,1)$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **D.** $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-12}$ xác định khi và chỉ $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 1$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(3x^2-1\right)^{-2}$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **B.** $D=\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **C.** $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ **D.** $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $3x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2+2x-3\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **C.** $D=(0;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-3 \end{array}\right.$. Vậy $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$

Câu 7: Hàm số $y=(x-1)^{-4}$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=(x-1)^{-4}$ xác định khi và chỉ khi $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ (do số mũ bằng $-4\in\mathbb{Z}^-$).

Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x\right)^{-6\cos\frac{\pi}{4}}$.

A. $D=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ **C.** $D=(0;1)$ **D.** $D=\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $-6\cos\frac{\pi}{4}=-3\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$ nên để biểu thức $\left(x^2-x\right)^{-6\cos\frac{\pi}{4}}$ có nghĩa là khi và chỉ khi $x^2-x>0\Leftrightarrow x>1$ hoặc $x<0$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^{2017}$.

A. $D=(-\infty;0)$. **B.** $D=(0;\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=[0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm số $y=x^{2017}$ là hàm đa thức nên có tập xác định là $(-\infty;+\infty)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=(x+2)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $(-2;+\infty)$ **D.** $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$. Vậy TXĐ của hàm số là: $D=(-2;+\infty)$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Căn cứ ĐK của hàm lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

Câu 12: Tập xác định của hàm số $y=\left(2x-x^2\right)^{-\pi}$ là

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $[0;2]$. **D.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hàm số XĐ $\Leftrightarrow 2x-x^2>0\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy TXĐ: $D=(0;2)$.

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=(4x-3)^{\frac{1}{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$. **C.** $D=\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện hàm $f(x)=(4x-3)^{\frac{1}{2}}$ có nghĩa là $4x-3>0\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$.

Câu 14: Biểu thức $f(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)^{\frac{1}{4}}$ chỉ xác định với:

A. $x\in\left(1+\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1;1+\sqrt{3}\right)$.

C. $x\in\left(1-\sqrt{3};1\right)$. **D.** $x\in\left(1-\sqrt{3};1\right)\cup\left(1+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

$f(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)^{\frac{1}{4}}$ xác định khi $x^3-3x^2+2>0\Leftrightarrow \forall x\in\left(1-\sqrt{3};1\right)\cup\left(1+\sqrt{3};+\infty\right)$

Câu 15: Biểu thức $f\left(x\right)=\left(\dfrac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}$ xác định khi:

A. $x\in\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$.

B. $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$.

D. $x\in\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

$f\left(x\right)=\left(\dfrac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}$ xác định khi $\dfrac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1}>0\Leftrightarrow\forall x\in(-1;-\dfrac{1}{2})\cup(0;\dfrac{4}{3})$

Câu 16: Biểu thức $f\left(x\right)=(x^2-3x+2)^{-3}-2\sqrt{x}$ xác định với:

A. $\forall x\in(0;+\infty)\setminus\{1;2\}$ **B.** $\forall x\in[0;+\infty)$ **C.** $\forall x\in[0;+\infty)\setminus\{1;2\}$ **D.** $\forall x\in[0;+\infty)\setminus\{1\}$

Hướng dẫn giải

$f\left(x\right)=(x^2-3x+2)^{-3}-2\sqrt{x}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 1\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in[0;+\infty)\setminus\{1;2\}$.

ĐẠO HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y=\left(5x^2-x+2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\dfrac{10x-1}{3\sqrt[3]{5x^2-x+2}}$.

B. $y'=\dfrac{10x-1}{\sqrt[3]{\left(5x^2-x+2\right)^2}}$.

C. $y'=\dfrac{10x-1}{3\sqrt[3]{\left(5x^2-x+2\right)^2}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(5x^2-x+2\right)^2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $y'=\left[\left(5x^2-x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\dfrac{1}{3}\left(5x^2-x+2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(10x-1\right)=\dfrac{10x-1}{3\sqrt[3]{\left(5x^2-x+2\right)^2}}$

Câu 18: Tìm số các đẳng thức đúng trong ba đẳng thức sau:

$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\left(x\geq 0\right)$. $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x>0\right)$. $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x\neq 0\right)$

A. Có 3 đẳng thức đúng.

B. Không có đẳng thức nào đúng.

C. Có 2 đẳng thức đúng.

D. Có 1 đẳng thức đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ khi $x>0$, nên $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\left(x\geq 0\right)$ sai. Khi $x>0$ thì $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Khi $x\neq 0$. Đặt $y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow y^3=x$, đạo hàm hai vế $\Rightarrow 3y^2.y'=1\Rightarrow y'=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=(x+2)^{-2}$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $y''-y^2=0$. **B.** $y''-6y^2=0$. **C.** $y''-8y^4=0$. **D.** $y''-y=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $y'=\dfrac{-2}{(x+2)^3}$; $y''=\dfrac{6}{(x+2)^4}\Rightarrow y''-6y^2=0$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^{\pi}$. Tính $y''(1)$.

A. $y''(1)=\ln^2\pi$. **B.** $y''(1)=\pi\ln\pi$. **C.** $y''(1)=0$. **D.** $y''(1)=\pi(\pi-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $y'=\pi x^{\pi-1}\Rightarrow y''=\pi(\pi-1)x^{\pi-2}$ do đó $y''(1)=\pi(\pi-1)$.

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$.

A. $y'=\dfrac{7\sqrt[24]{x^7}}{24}$. **B.** $y'=\dfrac{14\sqrt[24]{x^7}}{24}$. **C.** $y'=\dfrac{17}{24\sqrt[24]{x^7}}$. **D.** $y'=\dfrac{7}{24\sqrt[24]{x^7}}$.

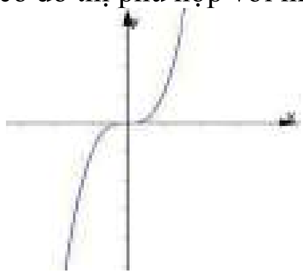
Hướng dẫn giải

Chọn C. $y^{24}=x^{12}.x^4.x\Rightarrow y=x^{\frac{17}{24}}\Rightarrow y'=\dfrac{17}{24}x^{\frac{17}{24}-1}=\dfrac{17}{24\sqrt[24]{x^7}}$.

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ LŨY THỪA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 22: Hàm số nào trong hàm số sau đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên ?

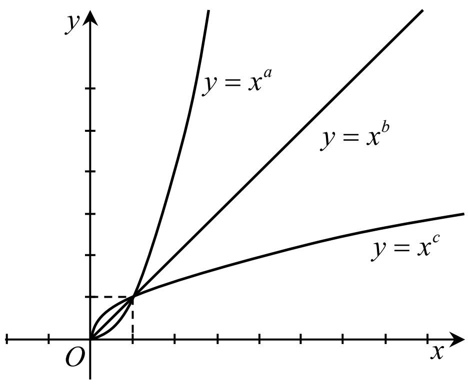


A. $y=x^3$. **B.** $y=x^4$. **C.** $y=x^{\frac{1}{5}}$. **D.** $y=\sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đồ thị của hình vẽ là đồ thị hàm bậc ba $y=x^3$.

Câu 23: Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y=x^a$, $y=x^b$, $y=x^c$ trên miền $(0;+\infty)$. Hỏi trong các số a, b, c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0;1)$?



A. Số a. **B.** Số a và số c. **C.** Số b. **D.** Số c.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Nhìn vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số x^b là đường thẳng nên ta có được $b=1$. Khi $x>1$ thì $x=x^b>x^c$. Do đó $0<c<1$.

Câu 24: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{2017}}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng về đường tiệm cận của đồ thị hàm số

A. Có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
B. Không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.
C. Có một tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
D. Không có tiệm cận.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\sqrt{2017}}}=+\infty$ nên đồ thị có một tiệm cận đứng $x=0$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^{\sqrt{2017}}}=0$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y=0$

Câu 25: Cho hàm số $y=x^{e-3}$ trong các kết luận sau kết luận nào **sai** ?

A. Đồ thị hàm số nhận Ox, Oy làm hai tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số luôn đi qua $M(1,1)$.
C. Hàm số luôn đồng biến trên $(0,+\infty)$.
D. Tập xác định của hàm số là $D=(0,+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì hàm số $y=x^{e-3}\Rightarrow y'=(e-3)x^{e-4}<0\,(\forall x>0)$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(0,+\infty)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
C. Hàm số có tập xác định là $(0;+\infty)$.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

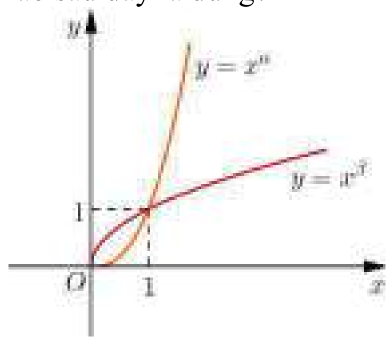
Hướng dẫn giải

Chọn D. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$, suy ra C đúng.

Do $x>0$ nên $x^{-\sqrt{2}}>0$, suy ra A đúng. Ta có: $y'=-\sqrt{2}.x^{-\sqrt{2}-1}<0;\forall x>0$, suy ra B đúng.
Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\sqrt{2}}=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận đứng, đáp án D đúng.

VẬN DỤNG:

Câu 27: Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $0<\beta<1<\alpha$. **B.** $\beta<0<1<\alpha$. **C.** $0<\alpha<1<\beta$. **D.** $\alpha<0<1<\beta$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Với $x_0>1$ ta có: $x_0^{\alpha}>1\Rightarrow\alpha>0; x_0^{\beta}>1\Rightarrow\beta>0$.

$x_0^{\alpha}>x_0^{\beta}\Rightarrow\alpha>\beta$

Mặt khác, dựa vào hình dáng đồ thị ta suy ra $\alpha>1$ và $\beta<1$. Suy ra A là phương án đúng.

TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG:

Câu 28: Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0$, $a\neq1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$.

A. $M=2017^{1008}-1$. **B.** $M=-2017^{1008}-1$. **C.** $M=2017^{2016}-1$. **D.** $M=1-2017^{2016}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}}-a^{-\frac{1}{8}}\right)}=\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1}=-a^{\frac{1}{2}}-1$.

Nên $M=f\left(2017^{2016}\right)=-\left(2017^{2016}\right)^{\frac{1}{2}}-1=-2017^{1008}-1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x.\sqrt{x}}$ và hàm số $g(x)=\sqrt{x.\sqrt[3]{x}}$. Mệnh đề nào sao đây đúng?

A. $f\left(2^{2017}\right)<g\left(2^{2017}\right)$. **B.** $f\left(2^{2017}\right)>g\left(2^{2017}\right)$.

C. $f\left(2^{2017}\right)=2g\left(2^{2017}\right)$. **D.** $f\left(2^{2017}\right)=g\left(2^{2017}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}$; $g(x)=\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{2}{3}}$

$2^{2017}>1\Rightarrow\left(2^{2017}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(2^{2017}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f\left(2^{2017}\right)<g\left(2^{2017}\right)$.

CHUYÊN ĐỀ 3: LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$

2. Các tính chất: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1, \ \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b, \ \log_a (a^{\alpha}) = \alpha$

3. Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$\log_a (b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

4. Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

5. Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có

- $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$
- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

6. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- Đặc biệt : $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

✍ **Lôgarit thập phân** và **Lôgarit tự nhiên**

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

B –CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC CHỨA LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 1: Cho các số dương a,b,c,d. Biểu thức $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)$. **D.** $\ln(abcd)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0$.

Câu 2: Nếu $\log_a b=p$ thì $\log_a a^2b^4$ bằng

A. $4p+2$ **B.** $4p+2a$ **C.** a^2p^4 **D.** p^4+2a

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_a a^2b^4=\log_a a^2+\log_a b^4=2+4\log_a b=2+4p$.

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}\right)$.

A. $T=\frac{11}{4}$ **B.** $T=\frac{11}{24}$ **C.** $T=\frac{11}{6}$ **D.** $T=\frac{11}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$T=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}\right)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=2\log_3\left(3^{\frac{3}{4}}.3^{\frac{2}{3}}\right)-1=2\log_3\left(3^{\frac{17}{12}}\right)-1=2.\frac{17}{12}-1=\frac{11}{6}$$

Câu 4: Cho $a,b,c>0,c\neq 1$ và đặt $\log_c a=m$, $\log_c b=n$, $T=\log_{\sqrt{c}}\left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right)$. Tính T theo m,n.

A. $T=\frac{3}{2}m-\frac{3}{8}n$. **B.** $T=6n-\frac{3}{2}m$. **C.** $T=\frac{3}{2}m+\frac{3}{8}n$. **D.** $T=6m-\frac{3}{2}n$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $T=\log_{\sqrt{c}}\left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right)=\log_{\sqrt{c}}a^3-\log_{\sqrt{c}}\sqrt[4]{b^3}=6\log_c a-\frac{3}{2}\log_c b=6m-\frac{3}{2}n$

Câu 5: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $a^{\log_3 7}=27, b^{\log_7 11}=49, c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A=a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11}25)^2}$ là:

A. 519. **B.** 729. **C.** 469. **D.** 129.

Chọn C.

$$\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}+\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}+\left(c^{\log_{11}25}\right)^{\log_{11}25}=27^{\log_3 7}+49^{\log_7 11}+\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11}25}=7^3+11^2+25^{\frac{1}{2}}=469$$

Câu 6: Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x+\log_4 x$.

A. $P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P=2\sqrt{2}$. **D.** $P=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $P=\log_2^2 x-\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x$ $\quad P=\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho $\frac{8\pi a^3}{3}$., $\log_a c = -2$ Giá trị của $\log_a\left(\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right)$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\log_a\left(\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right) = \log_a\left(a^4\sqrt[3]{b}\right) - \log_a c^3 = \log_a a^4 + \frac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \frac{1}{3}.3 - 3(-2) = 11$$

Câu 8: Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Giá trị của $\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + ... + \frac{1}{\log_n n!}$ bằng

A. 0. **B.** n. **C.** $n!$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + ... + \frac{1}{\log_n n!} = \log_{n!} 2 + \log_{n!} 3 + ... + \log_{n!} n = \log_{n!} n! = 1$

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1 và $b > 0$ thỏa $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $A = \log_{ab^2}\frac{a}{b^2}$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}-13}{11}$. **B.** $\frac{13-4\sqrt{3}}{11}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $A = \log_{ab^2}\frac{a}{b^2} = \log_{ab^2} a - \log_{ab^2} b^2$

$$= \frac{1}{\log_a ab^2} - \frac{2}{\log_b ab^2} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b^2} - \frac{2}{\log_b a + \log_b b^2}$$

$$= \frac{1}{1 + 2\log_a b} - \frac{2}{\frac{1}{\log_a b} + 2} = \frac{1}{1+2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-13}{11}.$$

Câu 10: Cho $a, b > 0$, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_2 a = \frac{16}{b} \Leftrightarrow a = 2^{\frac{16}{b}}$ (1)

Thay vào $\log_a b = \frac{b}{4}$ ta được $\log_{2^{\frac{16}{b}}} b = \frac{b}{4} \Leftrightarrow \frac{b}{16}\log_2 b = \frac{b}{4}$ (2)

Vì $b > 0$ nên $(2) \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 16$. Thay vào (1) ta được $a = 2$. Vậy $a + b = 18$.

Câu 11: Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $P = 3$. **B.** $P = 15$. **C.** $P = \frac{93}{32}$. **D.** $P = \frac{45}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $P = \log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}} = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{\frac{31}{32}} = \frac{31}{32}\cdot 3 = \frac{93}{32}$.

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$)

A. $P = 2$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = \sqrt{3}$. **D.** $P = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **Cách 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit.**

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b$$
$$=\frac{1}{2}[10+2\log_a b]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1.$$

Cách 2: Ta thấy các đáp án đưa ra đều là các hằng số, như vậy ta dự đoán giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a,b.

Khi đó, **sử dụng máy tính cầm tay**, ta tính giá trị của biểu thức khi $a=2;b=2$, ta được

$$P=\log_4\left(2^{10}.4\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\log_{\sqrt[3]{2}}2^{-2}=1.$$

Câu 13: Giả sử p,q là các số thực dương sao cho $\log_9 p=\log_{12}q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$.

A. $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **B.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $\log_9 p=\log_{12}q=\log_{16}(p+q)=u\Rightarrow\begin{cases}p=9^u\\q=12^u\\p+q=16^u\end{cases}$

Đặt $x=\frac{q}{p}=\frac{12^u}{9^u}=\left(\frac{4}{3}\right)^u\Rightarrow x^2=\left(\frac{16}{9}\right)^u=\left(\frac{p+q}{p}\right)^u=1+x\Rightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Câu 14: Cho a,b là các số thực dương khác 1, thoả $\log_{a^2}b+\log_{b^2}a=1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $a=\frac{1}{b}$. **B.** $a=b$. **C.** $a=\frac{1}{b^2}$. **D.** $a=b^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\log_{a^2}b+\log_{b^2}a=1\Leftrightarrow\log_a b+\log_b a=2$

$\Leftrightarrow\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=2\Leftrightarrow\left(\log_a b-1\right)^2=0\Leftrightarrow\log_a b=1.$ Suy ra: $a=b$.

Câu 15: Cho a,b là các số thực dương và $ab\neq1$ thỏa mãn $\log_{ab}a^2=3$ thì giá trị của $\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D $\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}\log_{ab}\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\log_{ab}\frac{a^2}{ab}=\frac{1}{3}.\left(\log_{ab}a^2-\log_{ab}ab\right)=\frac{1}{3}.\left(\log_{ab}a^2-1\right)$

Giả thiết $\log_{ab}a^2=3$ nên $\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}.(3-1)=\frac{2}{3}$

Câu 16: Cho a,b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a b=3$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$.

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=-\frac{3}{4}$. **D.** $T=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $T=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\log_a\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\log_a\sqrt[3]{b}-\log_a\sqrt{a}}{\log_a\sqrt{b}-\log_a a}=\frac{\frac{1}{3}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a a}{\frac{1}{2}\log_a b-1}=1.$

Câu 17: Cho $0<x<\frac{\pi}{2},\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Tính $P=\lg\sin x+\lg\cos x+\lg\tan x$

A. -1. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có

$$P=\lg\sin x+\lg\cos x+\lg\tan x=\lg(\sin x.\cos x.\tan x)=\lg(\sin^2 x)=\lg(1-\cos^2 x)=\lg\left(1-\frac{9}{10}\right)=-1$$

Câu 18: Cho $\log_2 x=4;\log_x y=4;\log_y z=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $x+y+z$ là

A. 65808. **B.** 65880. **C.** 65088. **D.** 65080.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\log_2 x=4\Leftrightarrow x=16$ $\log_x y=4\Rightarrow\log_{16}y=4\Leftrightarrow y=65536$

$\log_y z=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_{65536}z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=256$ Vậy $x+y+z=16+65536+256=65808$.

Câu 19: Cho $\log_3 x=\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $P=\log_3 x^2+\log_{\frac{1}{3}}x^3+\log_9 x$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{6-5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$P=\log_3 x^2+\log_{\frac{1}{3}}x^3+\log_9 x=2\log_3 x-3\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 20: Biết $\log_3(\log_4(\log_2 y))=0$, khi đó giá trị của biểu thức $A=2y+1$ là:

A. 33. **B.** 17. **C.** 65. **D.** 133.

Chọn A.

Vì $\log_3(\log_4(\log_2 y))=0$ nên $\log_4(\log_2 y)=1\Rightarrow\log_2 y=4\Rightarrow y=2^4\Rightarrow 2y+1=33$.

Câu 21: Giá trị của biểu thức $A=\log_3 2.\log_4 3.\log_5 4...\log_{16}15$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Chọn D. + **Tự luận :** $A=\log_{16}15.\log_{15}14...\log_5 4.\log_4 3.\log_3 2=\log_{16}2=\frac{1}{4}$

+ **Trắc nghiệm :** Sử dụng máy tính Casio, rồi nhập biểu thức $\log_3 2.\log_4 3.\log_5 4...\log_{16}15$ vào máy bấm =, được kết quả $A=\frac{1}{4}$.

Câu 22: Tính $B=\lg\tan 1°.\lg\tan 2°...\lg\tan 89°$

A. $B=0$ **B.** $B=10$ **C.** $B=9$ **D.** $B=6$

Chọn A. Từ $1°$ đến $89°$, ta có số $45°$. Do đó, trong tích $\lg\tan 1°.\lg\tan 2°...\lg\tan 89°$ có $\lg\tan 45°=\lg 1=0$. Vậy $B=0$.

Câu 23: Tính $A=\lg\tan 1°+\lg\tan 2°+...+\lg\tan 89°$

A. $A=0$ **B.** $A=1$ **C.** $A=2$ **D.** $A=5$

Chọn A. Ta có $1°+89°=90° \Rightarrow \tan 1°=\cot 89° \Rightarrow \tan 1°+\lg\tan 89°=0$

$\Rightarrow \lg(\tan 1°.\tan 89°)=\lg 1=0 \Rightarrow \lg\tan 1°+\lg\tan 89°=0$

Tương tự $\lg\tan 2°+\lg\tan 88°=0$ ...

$\lg\tan 44°+\lg\tan 46°=0$

$\lg\tan 45°=\lg 1=0$

$A=(\lg\tan 1°+\lg\tan 89°)+(\lg\tan 2°+\lg\tan 88°)+...+(\lg\tan 44°+\lg\tan 46°)+\lg\tan 45°.$

Vậy $A=0.$

Câu 24: Cho a,b,c là các số thực dương $(a,b\neq 1)$ và $\log_a b=5,\log_b c=7$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{b}{c}\right)$.

A. $P=\frac{2}{7}$. **B.** $P=-15$. **C.** $P=\frac{1}{14}$. **D.** $P=-60$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $P=2\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=2(\log_a b-\log_a c)=2(5-\log_a b.\log_b c)=2(5-5.7)=-60$.

Câu 25: Tính giá trị của biểu thức: $Q=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-\log_{\sqrt{a}}\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}(b)$ biết rằng a, b là các số thực dương khác 1.

A. $Q=2$ **B.** $Q=3$ **C.** $Q=4$ **D.** $Q=5$

Chọn A. Ta có $Q=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-2\log_a\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+3\log_b(b)$

$$=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-\log_a\left(a^2.\sqrt{b}\right)+3=\log_a\left(\frac{a\sqrt{b}}{a^2\sqrt{b}}\right)+3=\log_a\left(\frac{1}{a}\right)+3=-1+3=2.$$

Câu 26: Tính giá trị của biểu thức sau: $\log^2_{\frac{1}{a}} a^2+\log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}\ (1\neq a>0)$.

A. $\frac{17}{4}$ **B.** $\frac{13}{4}$ **C.** $-\frac{11}{4}$ **D.** $-\frac{15}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log^2_{\frac{1}{a}} a^2+\log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}=(-2\log_a a)^2+\frac{1}{4}\log_a a=\frac{17}{4}$

Câu 27: Tính giá trị của biểu thức sau: $B=15\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}}+\frac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36}+3^{\log_9 2401}}$

A. $\frac{1609}{53}$ **B.** $\frac{1906}{53}$ **C.** $\frac{1909}{53}$ **D.** $\frac{1606}{53}$

Chọn A. Ta có $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}}=\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2.2^{\frac{3}{5}}}=-2\log_2 2^{\frac{2}{3}-1-\frac{3}{5}}=-2.\left(-\frac{14}{15}\right)=\frac{28}{15}$

$$\frac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36}+3^{\log_9 2401}}=\frac{3^{4\log_3 5}}{3^{3\log_{3^2}36}+3^{\log_{3^2}2401}}=\frac{3^{\log_3 5^4}}{3^{\log_3 36^{\frac{3}{2}}}+3^{\log_3\sqrt{2401}}}=\frac{5^4}{36^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2401}}$$

$$=\frac{625}{216+49}=\frac{125}{53}\Rightarrow B=15.\frac{28}{15}+\frac{125}{53}=\frac{1609}{53}.$$

Câu 28: Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\log_2 4\sqrt[3]{16}-2\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3}+\frac{4^{2+\log_2 3}}{3^{\log_9 2+\log_{\frac{1}{3}} 5}}$

A. $10+\dfrac{144}{5\sqrt{2}}$ **B.** $10-\dfrac{144}{5\sqrt{2}}$ **C.** $5\sqrt{2}+\dfrac{144}{10}$ **D.** $5\sqrt{2}-\dfrac{144}{\sqrt{10}}$

Chọn A. Ta có $\log_2 4\sqrt[3]{16}=\log_2\left(2^2.2^{\frac{4}{3}}\right)=\log_2 2^{\frac{10}{3}}=\dfrac{10}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}=-\dfrac{10}{3}$

$4^{2+\log_2 3}=4^2.4^{\log_2 3}=16.2^{2\log_2 3}=16.2^{\log_2 9}=16.9=144$

$3^{\log_9 2+\log_{\frac{1}{3}} 5}=\dfrac{3^{\log_9 2}}{3^{\log_{\frac{1}{3}} 5}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}\log_3 2}}{3^{-\log_3 5}}=\dfrac{3^{\log_3\sqrt{2}}}{3^{\log_3\frac{1}{5}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{5}}=5\sqrt{2}$ $\Rightarrow A=\dfrac{10}{3}-2.\left(-\dfrac{10}{3}\right)+\dfrac{144}{5\sqrt{2}}=10+\dfrac{144}{5\sqrt{2}}.$

Câu 29: Tính: $B=\log_a\left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$

A. $\dfrac{173}{60}$. **B.** $\dfrac{177}{50}$. **C.** $\dfrac{173}{90}$. **D.** $\dfrac{173}{30}$.

Chọn A. Ta có $\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{173}{60}}$. Vậy $B=\log_a a^{\frac{173}{60}}=\dfrac{173}{60}$.

VẬN DỤNG:

Câu 30: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T=\dfrac{a}{b}$.

A. $T=\dfrac{5}{4}$ **B.** $T=\dfrac{2}{3}$ **C.** $T=\dfrac{3}{2}$ **D.** $T=\dfrac{4}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}=t\Rightarrow a=16^t, b=20^t; \dfrac{2a-b}{3}=25^t$

thay $a=16^t, b=20^t$ vào $\dfrac{2a-b}{3}=25^t$. Ta có: $\dfrac{2.16^t-20^t}{3}=25^t\leftrightarrow 2.16^t-20^t=3.25^t$

Chia 2 vế cho 25^t ta có: $2\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2t}-\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-3=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{2}{3}\\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^t=-1 (L)\end{array}\right.$ và $\dfrac{a}{b}=\dfrac{16^t}{20^t}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{2}{3}$

Câu 31: Cho biết $\log_2 a+\log_3 b=5$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=a\log_{\sqrt[3]{2}} a^2+\log_3 b^3.\log_2 4^a$ bằng:

A. $30a$. **B.** 1. **C.** $5a$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$P=a\log_{\sqrt[3]{2}} a^2+\log_3 b^3.\log_2 4^a=6a\log_2 a+3a\log_3 b.\log_2 4=6a\left(\log_2 a+\log_3 b\right)=6a.5=30a$

Câu 32: Giả sử p,q là các số thực dương sao cho $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\dfrac{p}{q}$.

A. $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Từ đó suy ra $\begin{cases} p=9^t \\ q=12^t \\ p+q=16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t+12^t=16^t$

Chia cả hai vế của phương trình cho $16^t \neq 0$ ta được phương trình:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{4}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \frac{p}{q}=\left(\frac{3}{4}\right)^t \Rightarrow \frac{p}{q}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Câu 33: Cho x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\frac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

A. $\frac{x}{y}=4.$ **B.** $\frac{x}{y}=3.$ **C.** $\frac{x}{y}=5.$ **D.** $\frac{x}{y}=2.$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\log_9 x=\log_6 y \Rightarrow y=6^{\log_9 x}=(2.3)^{\frac{1}{2}\log_3 x}=2^{\frac{1}{2}\log_3 x}.3^{\frac{1}{2}\log_3 x}=\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{y}{x}=\frac{\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left(\frac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\log_9 x=\log_4\left(\frac{x+y}{6}\right) \Rightarrow \frac{x+y}{6}=4^{\log_9 x}=2^{\log_3 x} \Rightarrow y=6.2^{\log_3 x}-x$$

$$\frac{y}{x}=\frac{6.2^{\log_3 x}-x}{x}=6.\frac{2^{\log_3 x}}{x}-1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $6.\frac{2^{\log_3 x}}{x}-1=\left(\frac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Vậy $\frac{x}{y}=2$

Câu 34: Cho $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỷ số $\frac{x}{y}$ là

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$

Đặt $t=\log_9 x \Leftrightarrow x=9^t$. Ta được: $t=\log_{12} y=\log_{16}(x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} y=12^t \\ x+y=16^t \end{cases}$

hay $9^t+12^t=16^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{4}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(loai) \end{array}\right.$ Khi đó: $\frac{x}{y}=\left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 35: Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab là

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $a>0, b>0$.

$$\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=5\\ \log_2 a+\dfrac{1}{3}\log_2 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 a=6\\ \log_2 b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2^6\\ b=2^3\end{cases}.\quad \text{Vậy } ab=2^9.$$

Câu 36: Tính giá trị của biểu thức $P=\ln(\tan 1°)+\ln(\tan 2°)+\ln(\tan 3°)+...+\ln(\tan 89°)$.

A. $P=1$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=0$. **D.** $P=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $P=\ln(\tan 1°)+\ln(\tan 2°)+\ln(\tan 3°)+...+\ln(\tan 89°)$

$=\ln(\tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 89°)=\ln(\tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 45°.\cot 44°.\cot 43°...\cot 1°)$

$=\ln(\tan 45°)=\ln 1=0.$ (vì $\tan\alpha.\cot\alpha=1$)

Câu 37: Cho các số dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc)=2$, $\log_b(ca)=4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

A. $\frac{6}{5}$. **B.** $\frac{8}{7}$. **C.** $\frac{10}{9}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_a(bc)=2\Leftrightarrow bc=a^2$ $\qquad \log_b(ca)=4\Leftrightarrow ac=b^4$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{bc}{ac}=\dfrac{a^2}{b^4}\Leftrightarrow a^3=b^5\Leftrightarrow b=a^{\frac{3}{5}}\\ abc^2=a^2b^4\Leftrightarrow c^2=ab^3\Leftrightarrow c=\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a.a^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{5}}\end{cases}\quad (\text{do } a,b,c>0)$$

$$\log_c(ab)=\log_{\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}}(ab)=\log_{a^{\frac{7}{5}}}\left(a.a^{\frac{3}{5}}\right)=\log_{a^{\frac{7}{5}}}\left(a^{\frac{8}{5}}\right)=\frac{8}{7}$$

Câu 38: Cho $x=2000!$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+...+\dfrac{1}{\log_{2000} x}$ là:

A. 1. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** 2000.

Ta có: $A=\log_x 2+\log_x 3+...+\log_x 2000=\log_x(1.2.3...2000)=\log_x x=1$

Câu 39: Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b-8\log_b(a\sqrt[3]{b})=-\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right)+2017$.

A. $P=2019$. **B.** $P=2020$. **C.** $P=2017$. **D.** $P=2016$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\log_a^2 b-8\log_b(a\sqrt[3]{b})=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\log_a^2 b-8\left(\log_b a+\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\log_a^2 b-\frac{8}{\log_a b}=0\Leftrightarrow\log_a b=2$$

$$P=\log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right)+2017=\log_a a^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}\log_a b+2017=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+2017=2019.$$

Câu 40: Cho biểu thức $P=(\ln a+\log_a e)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$, với a là số dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=2\ln^2 a+1$. **B.** $P=2\ln^2 a+2$. **C.** $P=2\ln^2 a$. **D.** $P=\ln^2 a+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=(\ln a+\log_a e)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e=\left(\ln a+\dfrac{1}{\ln a}\right)^2+\ln^2 a-\dfrac{1}{\ln^2 a}=2\left(\ln^2 a+1\right)$

Câu 41: Cho số thực x thỏa $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$. Tính giá trị $P=(\log_2 x)^2$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P=3\sqrt{3}$. **C.** $P=27$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x>0 \Leftrightarrow x>1 \\ \log_8 x>0 \end{cases}$. Đặt $t=\log_2 x, (t>0)$. Ta có:

$$\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{3}t\right)=\frac{1}{3}\log_2(t)\Rightarrow \frac{1}{3}t=t^{\frac{1}{3}}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=27 \\ t=0,(loai) \end{array}\right. \Rightarrow P=27$$

Câu 42: Cho $\log_a(a^2b^3)=1$. Khi đó giá trị biểu thức $\log_{a^2b^3}\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{ab^3}$ là

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{15}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_a(a^2b^3)=1\Leftrightarrow 2+3\log_a b=1\Leftrightarrow \log_a b=-\dfrac{1}{3}$. Ta lại có $\log_a(a^2b^3)=1\Leftrightarrow ab^3=1$.

Cách 1: Chọn $a=8\Rightarrow \log_8 b=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$. Bấm máy $\log_{a^2b^3}\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{ab^3}=\dfrac{7}{15}$.

Cách 2: $\log_{a^2b^3}\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{ab^3}=\log_{a^2b^3}\sqrt[5]{a^3b^2}=\dfrac{1}{5}\log_{a^2b^3}a^3b^2=\dfrac{1}{5}.\dfrac{\log_a a^3b}{\log_a a^2b^3}=\dfrac{1}{5}.\dfrac{3-\dfrac{2}{3}}{2-1}=\dfrac{7}{15}$.

Câu 43: Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\log_{54}168=\dfrac{\log_7(24.7)}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 24+1}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 54}$

$$=\frac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 12\log_{12}54}=\frac{xy+1}{x.\log_{12}54}$$

Tính $\log_{12}54=\log_{12}(27.2)=3\log_{12}3+\log_{12}2=3\log_{12}\dfrac{3.2.12.24}{2.12.24}+\log_{12}\dfrac{24}{12}$.

$$=3\log_{12}\frac{12^3}{24^2}+\log_{12}\frac{24}{12}=3(3-2\log_{12}24)+(\log_{12}24-1)=8-5\log_{12}24=8-5y.$$

Do đó: $\log_{54}168=\dfrac{xy+1}{x(8-5y)}=\dfrac{xy+1}{-5xy+8x}$. Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=8 \end{cases}\Rightarrow S=a+2b+3c=15$

Câu 44: Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008^2\times 2017^2\log_a 2019$$

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2018.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008^2\times 2017^2\log_a 2019 \quad (*)$$

Ta có $n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=n^2.n.\log_a 2019=n^3\log_a 2019$. Suy ra

VT (*) $=\left(1^3+2^3+...+n^3\right).\log_a 2019=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2.\log_a 2019$. VP (*) $=1008^2\times 2017^2\log_a 2019$.

Khi đó (*) được: $n^2(n+1)^2=2^2.1008^2.2017^2=2016^2.2017^2\Rightarrow n=2016$.

Câu 45: Cho các số thực dương a,b,c lần lượt là số hạng thứ m,n,p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính $P=(b-c)\log_3 a+2(c-a)\log_9 b+3(a-b)\log_{27} c$.

A. $P=3$ **B.** $P=1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=2$

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $\begin{cases} a=u_1+(m-1)d=v_1.q^{m-1}\\ b=u_1+(n-1)d=v_1.q^{n-1}\\ c=u_1+(p-1)d=v_1.q^{p-1}\end{cases}$. Và $P=\log_3\left(a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}\right)$

$\Leftrightarrow P=\log_3\left(\left(\dfrac{a}{c}\right)^b.\left(\dfrac{c}{b}\right)^a.\left(\dfrac{b}{a}\right)^c\right)\Leftrightarrow P=\log_3\left(q^{(m-p)b+(n-m)c+(p-n)a}\right)$. Vì:

$(m-p)b+(n-m)c+(p-n)a=(m-p).(u_1+(n-1)d)+(n-m).(u_1+(p-1)d)+(p-n).(u_1+(m-1)d)=0$

(học sinh tự khai triển). Vậy $P=0$. ***Chú ý:*** Mẹo thay $a=b=c=1$.

Câu 46: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a>b>1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\log_a b^2\right)^2+6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2$ là $m+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}$ với m,n,p là các số nguyên. Tính $T=m+n+p$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-14$. **D.** $T=6$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta biến đổi đưa về cơ số là a như sau: $\log_a b^2=2\log_a b$ và

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\frac{\log_a\frac{b}{a}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\log_a b-1}{2\left(\frac{1}{2}\log_a b-1\right)}=\frac{\log_a b-1}{\log_a b-2}$$

Đặt $t=\log_a b$ $(0<t<1)$ với mọi $a>b>1$.

Vì vậy $S=f(t)=4t^2+6\left(\dfrac{t-1}{t-2}\right)^2\ge\min\limits_{(0,1)}f(t)=f\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=2\left(1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)$.

Vậy $m=2,n=16,p=-32\Rightarrow T=-14$.

Câu 47: Cho hai số a, b dương thỏa mãn điều kiện: $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}$. Tính $P=2017^a-2017^b$.

A. 0. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** -1.

Hướng dẫn gải:

Chọn A. Từ giả thiết, ta có $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}\Leftrightarrow(a-b)\left(2^a+2^b\right)=a.2^b-b.2^a$.

$\Leftrightarrow a.2^a+a.2^b-b.2^a-b.2^b=a.2^b-b.2^a\Leftrightarrow a.2^a=b.2^b$. $(*)$

Xét hàm số $f(x)=x.2^x$ với $x>0$, có $f'(x)=2^x+x.2^x.\ln 2=2^x(1+x.\ln 2)>0;\ \forall x>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy $(*)\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$. Khi $a=b$ thì $2017^a-2017^b=2017^a-2017^a=0$.

BIẾN ĐỔI, RÚT GỌN, BIỂU DIỄN BIỂU THỨC CHỨA LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 48: Nếu $\log 4 = a$ thì $\log 4000$ bằng

A. $3+a$. **B.** $4+a$. **C.** $3+2a$. **D.** $4+2a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\log 4000 = \log\left(4.10^3\right) = \log 4 + \log 10^3 = \log 4 + 3 = a+3$.

Câu 49: Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $\ln(ab)^2 = \ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^2\right)$. **B.** $\ln\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$. **D.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln\left(a^2\right) - \ln\left(b^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương án B sai vì $\ln a, \ln b$ không xác định khi $a < b < 0$.

Câu 50: Với các số thực dương x, y bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$. **B.** $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$.

C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2\log_2 x - \log_2 y$. **D.** $\log_2(xy) = \log_2 x.\log_2 y$.

Chọn C. Vì $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 y = 2\log_2 x - \log_2 y$.

Câu 51: Với $a,\ b,\ c > 0,\ a \neq 1,\ \alpha \neq 0$ bất kỳ. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. **B.** $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$. **D.** $\log_a b.\log_c a = \log_c b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Dựa vào công thức đổi cơ số $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$.

Câu 52: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln(ab) = \ln a.\ln b$.

C. $\ln\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Chọn đáp án A vì đây là tính chất của logarit.

Câu 53: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2\frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$. **B.** $\log_2\sqrt{xy} = \frac{1}{2}\left(\log_2 x + \log_2 y\right)$.

C. $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$. **D.** $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy)$.

Câu 54: Cho $a > 0,\ a \neq 1$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a a^2 = 2$. **B.** $\log_{a^2} a = \frac{1}{2}$. **C.** $\log_a 2a = 2$. **D.** $\log_a 2a = 1 + \log_a 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a = \log_a 2 + 1$.

Câu 55: Với $a;b$ là các số thực dương và $m;n$ là các số nguyên, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $a^m.a^n=a^{m+n}$ **B.** $\log a+\log b=\log(a.b)$ **C.** $\log a-\log b=\dfrac{\log a}{\log b}$ **D.** $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

Câu 56: Cho a là số dương khác 1, b là số dương và α là số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $\log_a b^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$. **B.** $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$. **C.** $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$. **D.** $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 57: Với các số thực dương a,b bất kì. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log(ab)=\log(a+b)$. **B.** $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log_b(a)$.

C. $\log(ab)=\log a+\log b$. **D.** $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Theo định nghĩa ta có công thức $\log(ab)=\log a+\log b$ và $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log a-\log b$.

Câu 58: Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương và $a,\ b,\ c\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là ***sai*** ?

A. $\log_a c=\log_b a\cdot\log_b c$ **B.** $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$ **C.** $\log_a c=\dfrac{\log_b c}{\log_b a}$ **D.** $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $\log_a c=\log_a b\cdot\log_b c$ nên khẳng định A sai.

Câu 59: Cho $\log_a b=\alpha$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $b=\alpha^a$. **B.** $b=a^\alpha$. **C.** $b=\alpha.a$. **D.** $a=b^a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 60: Cho $a,\ b$ là các số thực dương, $a\neq 1$. Rút gọn biểu thức: $P=\sqrt{\log_a^2(ab)-\dfrac{2\log b}{\log a}-1}$

A. $P=|\log_a b|$. **B.** $P=|\log_a b-1|$. **C.** $P=|\log_a b+1|$. **D.** $P=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $P=\sqrt{\log_a^2(ab)-\dfrac{2\log b}{\log a}-1}=\sqrt{(1+\log_a b)^2-2\log_a b-1}=\sqrt{\log_a^2 b}=|\log_a b|$.

Câu 61: Gọi $T=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}+\dfrac{1}{\log_d x}}$, với a,b,c,x thích hợp để biểu thức có nghĩa.

Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $T=\log_{abcd} x$. **B.** $T=\log_x abcd$.

C. $T=\dfrac{1}{\log_x abcd}$. **D.** $T=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c+\log_x d}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$T=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}+\dfrac{1}{\log_d x}}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c+\log_x d}=\dfrac{1}{\log_x abcd}=\log_{abcd} x.$$

Câu 62: Cho $a,\ b,\ x$ là các số thực dương. Biết $\log_3 x=2\log_{\sqrt{3}} a+\log_{\frac{1}{3}} b$, tính x theo a và b

A. $x=\frac{a^4}{b}$. **B.** $x=4a-b$. **C.** $x=\frac{a}{b}$. **D.** $x=a^4-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_3 x=2\log_{\sqrt{3}} a+\log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow \log_3 x=4\log_3 a-\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x=\log_3\frac{a^4}{b} \Leftrightarrow x=\frac{a^4}{b}$

Câu 63: Nếu $\log_7 x=\log_7 ab^2-\log_7 a^3b\ (a,b>0)$ thì x nhận giá trị bằng

A. a^2b. **B.** ab^2. **C.** a^2b^2. **D.** $a^{-2}b$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_7 x=\log_7 ab^2-\log_7 a^3b=\log_7\frac{ab^2}{a^3b}=\log_7\frac{b}{a^2}=\log_7 a^{-2}b$. Từ đó, $x=a^{-2}b$

Câu 64: Đặt $\log_2 6=m$. Hãy biểu diễn $\log_9 6$ theo m.

A. $\log_9 6=\frac{m}{2(m+1)}$. **B.** $\log_9 6=\frac{m}{2(m-1)}$. **C.** $\log_9 6=\frac{m}{m+1}$. **D.** $\log_9 6=\frac{m}{m-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\log_9 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 9}=\frac{\log_2 6}{2\log_2 3}=\frac{\log_2 6}{2(\log_2 6-\log_2 2)}=\frac{m}{2(m-1)}$.

Câu 65: Đặt $a=\log_3 15; b=\log_3 10$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

A. $\log_{\sqrt{3}} 50=(a+b-1)$ **B.** $\log_{\sqrt{3}} 50=3(a+b-1)$

C. $\log_{\sqrt{3}} 50=2(a+b-1)$ **D.** $\log_{\sqrt{3}} 50=4(a+b-1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_{\sqrt{3}} 50=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 50=2\log_3 50=2\log_3(10.5)$

$=2(\log_3 10+\log_3 5)=2(\log_3 10+\log_3 15-\log_3 3)=2(a+b-1)$

Câu 66: Đặt $a=\log_3 4,\ b=\log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b.

A. $\log_{12} 80=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_{12} 80=\frac{a+2ab}{ab}$.

C. $\log_{12} 80=\frac{a+2ab}{ab+b}$. **D.** $\log_{12} 80=\frac{2a^2-2ab}{ab}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_{12} 80=\log_{12}(4^2.5)=\log_{12} 4^2+\log_{12} 5=2\log_{12} 4+\frac{1}{\log_5 12}$

$=\frac{2}{\log_4 12}+\frac{1}{\log_5 4+\log_5 3}=\frac{2}{\log_4 4+\log_4 3}+\frac{1}{b+\log_5 3}$.

Từ $a=\log_3 4\Rightarrow \log_4 3=\frac{1}{a}\Rightarrow \log_5 3=\log_5 4.\log_4 3=b.\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \log_{12} 80=\frac{2}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{b+\frac{b}{a}}=\frac{2a}{a+1}+\frac{a}{b(a+1)}=\frac{a+2ab}{ab+b}$.

Câu 67: Cho $P=\log_m 16m$ và $a=\log_2 m$ với m là số dương khác 1.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=3-a^2$. **B.** $P=\frac{4+a}{a}$. **C.** $P=\frac{3+a}{a}$. **D.** $P=3+a.\sqrt{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\log_m 16m; a=\log_2 m$ $P=\frac{\log_2 16m}{\log_2 m}=\frac{4+\log_2 m}{\log_2 m}\Rightarrow P=\frac{4+a}{a}$.

Câu 68: Cho $a=\log_2 20$. Tính $\log_{20}5$ theo a.

A. $\dfrac{5a}{2}$. **B.** $\dfrac{a+1}{a}$. **C.** $\dfrac{a-2}{a}$. **D.** $\dfrac{a+1}{a-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $a=\log_2\left(2^2.5\right)=2+\log_2 5\Rightarrow \log_2 5=a-2$. Mà $\log_{20}5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 20}=\dfrac{a-2}{a}$.

Câu 69: Cho $\log_2 3=a$; $\log_2 7=b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b.

A. $5+2a+b$. **B.** $5+3a+2b$. **C.** $2+2a+3b$. **D.** $2+3a+2b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\log_2 2016=\log_2\left(2^5 3^2 7\right)=\log_2 2^5+\log_2 3^2+\log_2 7=5+2a+b$.

Câu 70: Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b=m$, tính theo m giá trị của $P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $\dfrac{4m^2-3}{2m}$. **B.** $\dfrac{m^2-12}{2m}$. **C.** $\dfrac{m^2-12}{m}$. **D.** $\dfrac{m^2-3}{2m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. *Nhận xét:* $m\neq 0$. Từ $\log_a b=m\Rightarrow \log_b a=\dfrac{1}{m}$.

$$P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3=\frac{1}{2}\log_a b-\frac{3}{\frac{1}{2}}\log_b a=\frac{1}{2}\log_a b-6\log_b a=\frac{1}{2}m-\frac{6}{m}=\frac{m^2-12}{2m}.$$

Câu 71: Đặt $\log_3 5=a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_{15}75=\dfrac{a+1}{2a+1}$. **B.** $\log_{15}75=\dfrac{2a+1}{a+1}$. **C.** $\log_{15}75=\dfrac{2a-1}{a+1}$. **D.** $\log_{15}75=\dfrac{2a+1}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\log_{15}75=\log_{15}5^2+\log_{15}3=2\log_{15}5+\log_{15}3=\frac{2}{\log_5 5+\log_5 3}+\frac{1}{\log_3 5+\log_3 3}=\frac{2}{1+a^{-1}}+\frac{1}{a+1}$$

Thu gọn ta có $\log_{15}75=\dfrac{2a+1}{a+1}$.

Câu 72: Cho $a=\log_2 3$; $b=\log_3 5$; $c=\log_7 2$. Hãy tính $\log_{140}63$ theo a, b, c.

A. $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. **B.** $\dfrac{2ac+1}{abc+2c-1}$. **C.** $\dfrac{2ac+1}{abc-2c+1}$. **D.** $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách giải 1.** $\log_{140}63=\log_{140}9+\log_{140}7=2\log_{140}3+\log_{140}7$

$$2\log_{140}3=\frac{2}{\log_3 140}=\frac{2}{\log_3 7+2\log_3 2+\log_3 5}=\frac{2}{\log_3 2.\log_2 7+\frac{2}{a}+b}=\frac{2}{\frac{1}{ca}+\frac{2}{a}+b}=\frac{2ca}{1+2c+abc}$$

$$\log_{140}7=\frac{1}{\log_7 140}=\frac{1}{\log_7 7+2\log_7 2+\log_7 5}=\frac{1}{1+2c+\log_7 2.\log_2 3.\log_3 5}=\frac{1}{1+2c+abc}$$

$$\log_{140}63=\frac{2ca}{1+2c+abc}+\frac{1}{1+2c+abc}=\frac{2ac+1}{1+2c+abc}$$

Cách giải 2. Từ giả thiết suy ra: $\log_2 3=a$; $\log_2 5=ab$; $\log_2 7=\dfrac{1}{c}$

Ta có $\log_{140}63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 140}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{\log_2 5+\log_2 7+2}=\dfrac{2a+\frac{1}{c}}{ab+\frac{1}{c}+2}=\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Câu 73: Cho $\log_2 5 = a$, $\log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo a và b là

A. $\dfrac{1}{a+b}$. **B.** $\dfrac{ab}{a+b}$. **C.** $a+b$. **D.** a^2+b^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **Cách 1:** Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Cách 2: Bấm máy : $\log_2 5 \xrightarrow{\text{STO}} \text{A}$, $\log_3 5 \xrightarrow{\text{STO}} \text{B}$

Bấm máy: $\log_6 5 - \boxed{\text{K.qua cua tung phuong an}}$ đến khi được đáp số bằng 0.

Câu 74: Cho $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$. Tính $\log_{12} 35$

A. $\dfrac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **C.** $\dfrac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\dfrac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $a = \log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \dfrac{1}{3}\log_3 5, b = \log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \dfrac{1}{3}\log_2 7$

$$\log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2(3.2^2)} = \frac{\log_2 7 + \log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3 + \log_2 2^2} = \frac{3b + c.3a}{c+2} = \frac{3b+3ac}{c+2}$$

Chú ý: Có thể bấm máy thử các đáp án.

Câu 75: Cho $a = \log_2 3,\ b = \log_2 5,\ c = \log_2 7$. Biểu thức biểu diễn $\log_{60} 1050$ là

A. $\log_{60} 1050 = \dfrac{1+a+b+2c}{1+2a+b}$. **B.** $\log_{60} 1050 = \dfrac{1+2a+b+c}{2+a+b}$.

C. $\log_{60} 1050 = \dfrac{1+a+2b+c}{1+2a+b}$. **D.** $\log_{60} 1050 = \dfrac{1+a+2b+c}{2+a+b}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\log_{60} 1050 = \dfrac{\log_2 1050}{\log_2 60} = \dfrac{\log_2\left(2.3.5^2.7\right)}{\log_2\left(2^2.3.5\right)} = \dfrac{1+a+2b+c}{2+a+b}$

Câu 76: Nếu $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$ thì

A. $\log_{30} 1350 = 2a+b+2$. **B.** $\log_{30} 1350 = 2a+b+1$.

C. $\log_{30} 1350 = a+2b+1$. **D.** $\log_{30} 1350 = a+2b+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $1350 = 30.3^2.5$

$\Rightarrow \log_{30} 1350 = \log_{30} 30 + \log_{30} 3^2 + \log_{30} 5 = 1 + 2\log_{30} 3 + \log_{30} 5 = 1+2a+b$

Câu 77: Cho $\log_{12} 27 = a$ thì $\log_6 16$ tính theo a là:

A. $\dfrac{3-a}{3+a}$. **B.** $\dfrac{a+3}{4(3-a)}$. **C.** $\dfrac{a+3}{a-3}$. **D.** $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $a = \log_{12} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 12} = \dfrac{3}{1+2\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{3-a}{2a}$.

$$\log_6 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 6} = \frac{4\log_3 2}{1+\log_3 2} = \frac{4\frac{3-a}{2a}}{1+\frac{3-a}{2a}} = \frac{4(3-a)}{a+3}.$$

Câu 78: Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m = \dfrac{3+a}{a}$ **B.** $\log_m 8m = (3-a)a$ **C.** $\log_m 8m = \dfrac{3-a}{a}$ **D.** $\log_m 8m = (3+a)a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_m 8m = \log_m m + \log_m 8 = 1 + \log_m 2^3 = 1 + 3\log_m 2 = 1 + \dfrac{3}{a} = \dfrac{3+a}{a}$.

Câu 79: Cho $a, b > 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ **B.** $\ln^2(ab) = \ln a^2 + \ln b^2$ **C.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ **D.** $\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{b})$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\ln a.\ln b = \ln b.\ln a \Leftrightarrow \ln\left(b^{\ln a}\right) = \ln\left(a^{\ln b}\right) \Leftrightarrow b^{\ln a} = a^{\ln b}$.

Câu 80: Cho a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{c}{d}$.

B. $a^c = b^d \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{d}{c}$.

C. $a^c = b^d \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{c}{d}$.

D. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{d}{c}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $a^c = b^d \Leftrightarrow c\ln a = d\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{d}{c}$.

Câu 81: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\Rightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

B. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

D. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = \log_2\left(2a^3\right) - \log_2(b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log\ b$.

Câu 82: Với mọi số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng?**

A. $\log_{\frac{3}{4}} a < \log_{\frac{3}{4}} b \Leftrightarrow a < b$.

B. $\log_2(a^2+b^2) = 2\log(a+b)$.

C. $\log_{a^2+1} a \ge \log_{a^2+1} b \Leftrightarrow a \ge b$.

D. $\log_2 a^2 = \dfrac{1}{2}\log_2 a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $a^2+1>1 \Rightarrow \log_{a^2+1} a \ge \log_{a^2+1} b \Leftrightarrow a \ge b$

Câu 83: Cho hai số thực dương a và b, với $a \ne 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b.$

B. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b.$

C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b.$

D. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b.$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Với a, $b > 0$ và $a \ne 1$, ta có

$$\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$$

VẬN DỤNG:

Câu 84: Với mọi số tự nhiên n, Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $n = \log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ c¨n bËc hai}}$.

B. $n = -\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ c¨n bËc hai}}$.

C. $n = 2 + \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ căn bËc hai}}$. **D.** $n = 2 - \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ căn bËc hai}}$.

Hướng dẫn giải

+ **Tự luận:** Đặt $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ c¨n bËc hai}} = m$. Ta có: $\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}} = 2^{-m} \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}} = 2^{2^{-m}}$

Ta thấy: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \ldots\ldots, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^{2^{-n}}$.

Do đó ta được: $2^{-m} = 2^{-n} \Leftrightarrow m = n$. Vậy $n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ c¨n bËc hai}}$.

+ **Trắc nghiệm**: Sử dụng máy tính Casio, lấy n bất kì, chẳng hạn $n = 3$.

Nhập biểu thức $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ (có 3 dấu căn) vào máy tính ta thu được kết quả bằng -3.

Chọn B.

Câu 85: Tính: $C = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}$ (n dấu căn)

A. $-n$. **B.** $3n$. **C.** $-3n$. **D.** $2n$.

Chọn A. Ta có: $\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}} = 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n} \Rightarrow C = \log_5\left[\log_5 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right] = \log_5\left(\frac{1}{5}\right)^n = -n$.

Câu 86: Gọi $(x; y)$ là nghiệm nguyên của phương trình $2x + y = 3$ sao cho $P = x + y$ là số dương nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2 x + \log_3 y$ không xác định. **B.** $\log_2(x+y) = 1$.

C. $\log_2(x+y) > 1$. **D.** $\log_2(x+y) > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $x + y > 0$ nên trong hai số x và y phải có ít nhất một số dương mà $x + y = 3 - x > 0$ nên suy ra $x < 3$ mà x nguyên nên $x = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

+ Nếu $x = 2$ suy ra $y = -1$ nên $x + y = 1$

+ Nếu $x = 1$ thì $y = 1$ nên $x + y = 2$

+ Nếu $x = 0$ thì $y = 3$ nên $x + y = 3$

+ Nhận xét rằng: $x < 2$ thì $x + y > 1$. Vậy $x + y$ nhỏ nhất bằng 1.

Câu 87: Gọi c là cạnh huyền, a, b là hai cạnh góc vuông của môt tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **B.** $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a > 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

C. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a < 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **D.** $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo giả thiết, ta có: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow a = (b-c)(b+c)$

$$\Leftrightarrow \log_a(c-b) + \log_a(c+b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} = 2$$

$\Leftrightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ (đpcm).

Câu 88: Cho a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông, trong đó $c - b \neq 1$ và $c + b \neq 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **B.** $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.

C. $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **D.** $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2=c^2-b^2$$

$$\Rightarrow \log_{c+b} a+\log_{c-b} a=\log_{c+b} a+\frac{\log_{c+b} a}{\log_{c+b}(c-b)}=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b}(c-b)+1}{\log_{c+b}(c-b)}\right)$$

$$=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b}(c^2-b^2)}{\log_{c+b}(c-b)}\right)=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b} a^2}{\log_{c+b}(c-b)}\right)=2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$$

Câu 89: Có tất cả bao nhiêu số dương a thỏa mãn đẳng thức $\log_2 a+\log_3 a+\log_5 a=\log_2 a.\log_3 a.\log_5 a$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $(*)\Leftrightarrow \log_2 a+\log_3 2.\log_2 a+\log_5 2.\log_2 a=\log_2 a.\log_3 5.\log_5 a.\log_5 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1+\log_3 2+\log_5 2\right)=\log_2 a.\log_3 5.\log_5^2 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 a=0\\ 1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ \log_5 a=\pm\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}\end{array}\right.$$

Câu 90: Rút gọn biểu thức $A=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$ ta được kết quả là:

A. $\dfrac{1}{\log_b a}$ **B.** $-\log_b a$ **C.** $\log_b a$ **D.** $\dfrac{\log_b a}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $A=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$

$=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$

$=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(1-\log_{ab} b\log_b a\right)-1=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(1-\log_{ab} a\right)-1$

$$=\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+2\right)\left(1-\frac{1}{1+\log_a b}\right)-1=\left(\frac{\left(\log_a b+1\right)^2}{\log_a b}\right)\left(\frac{\log_a b}{1+\log_a b}\right)-1$$

$=1+\log_a b-1=\log_a b$

Câu 91: Cho a,b,x là các số dương, khác 1 và thỏa mãn $4\log_a^2 x+3\log_b^2 x=8\log_a x.\log_b x$ (1). Mệnh đề (1) tương đương với mệnh đề nào sau đây?

A. $a^3=b^2$. **B.** $x=ab$. **C.** $a=b^2$. **D.** $a=b^2$ hoặc $a^3=b^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $m=\log_a x, n=\log_b x$, vì $x\neq 1$ nên $m\neq 0, n\neq 0$.

Khi đó $4\log_a^2 x+3\log_b^2 x=8\log_a x.\log_b x$ trở thành

$4m^2+3n^2=8mn \Leftrightarrow 4\left(\dfrac{m}{n}\right)^2-8\dfrac{m}{n}+3=0$. Giải được $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{2}$.

Với $2m=n \Leftrightarrow \log_a x=\dfrac{1}{2}\log_b x \Leftrightarrow a=b^2$. Với $\dfrac{1}{3}m=\dfrac{1}{2}n \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_b x \Leftrightarrow a^3=b^2$.

Câu 92: Cho a,b là các số hữu tỉ thỏa mãn: $\log_2 \sqrt[6]{360}-\log_2\sqrt{2}=a\log_2 3+b\log_2 5$. Tính $a+b$.

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$\log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt[6]{8} = \log_2 \sqrt[6]{\frac{360}{8}} = \frac{1}{6}\log_2 45 = \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{6}\log_2 5$$

Theo đề ta có $\log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt{2} = a\log_2 3 + b\log_2 5 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$

Câu 93: Cho $\frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \neq 0; \frac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r.

A. $y = q^2 - pr$. **B.** $y = \frac{p+r}{2q}$. **C.** $y = 2q - p - r$. **D.** $y = 2q - pr$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\frac{b^2}{ac} = x^y \Leftrightarrow \log\frac{b^2}{ac} = \log x^y$

$\Rightarrow y\log x = 2\log b - \log a - \log c = 2q\log x - p\log x - r\log x$

$= \log x(2q - p - r)$

$\Rightarrow y = 2q - p - r$ (do $\log x \neq 0$).

Câu 94: Kết quả rút gọn của biểu thức $C = \sqrt{\log_a b + \log_b a + 2}\left(\log_a b - \log_{ab} b\right)\sqrt{\log_a b}$ là:

A. $\sqrt[3]{\log_a b}$. **B.** $\sqrt{\log_a b}$. **C.** $\left(\sqrt{\log_a b}\right)^3$. **D.** $\log_a b$.

$C = \sqrt{\log_a b + \log_b a + 2}\left(\log_a b - \log_{ab} b\right)\sqrt{\log_a b}$

$= \sqrt{\frac{(\log_a b + 1)^2}{\log_a^2 b}}\left(\log_a b - \frac{\log_a b}{1 + \log_a b}\right)\sqrt{\log_a b} = \frac{(\log_a b + 1)}{\log_a b}\left(\frac{\log_a^2 b}{1 + \log_a b}\right)\sqrt{\log_a b} = \left(\sqrt{\log_a b}\right)^3$

Câu 95: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x = 10^{\frac{-1}{1-\log z}}$. **B.** $x = 10^{\frac{1}{1-\ln z}}$. **C.** $x = 10^{\frac{1}{1+\log z}}$. **D.** $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} \Rightarrow \log y = \frac{1}{1-\log x}$; $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}} \Rightarrow \log y = 1 - \frac{1}{\log z}$

Suy ra $\frac{1}{1-\log x} = 1 - \frac{1}{\log z} \Rightarrow \log x = \frac{1}{1-\log z} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

Câu 96: Cho các số dương a, b thỏa mãn $4a^2 - 9b^2 = 13ab$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\frac{1}{4}\log(2a+3b) = 3\log a + 2\log b$.

C. $\log\sqrt{2a+3b} = \log\sqrt{a} + 2\log\sqrt{b}$. **D.** $\log\left(\frac{2a+3b}{4}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $4a^2 + 9b^2 = 13ab \Leftrightarrow (2a+3b)^2 = 25ab \Rightarrow 2b + 3b = 5\sqrt{ab}$.

Lấy logarit thập phân $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \log\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Câu 97: Cho $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\log\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ **B.** $2(\log a+\log b)=\log(14ab)$

C. $\log(a+b)=2(\log a+\log b)$ **D.** $\log(a+b)-4=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

Phân tích: Ta nhận thấy nếu lấy loga hai vế luôn thì $\log\left(a^2+b^2\right)$ sẽ khó phân tích ra bởi không có công thức $\log(x+y)$. Do vậy, nhìn vào các phương án nhận thấy B là phương án lừa để ta chọn, tuy nhiên không có công thức biến đổi vế trái như vậy. Nên, để có thể biến đổi được vế trái ta đưa về dạng $pt\Leftrightarrow(a+b)^2-2ab=14ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $pt\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{16}=ab$. Lấy logarit hai vế ta được

$$\log\frac{(a+b)^2}{16}=\log(ab)\Leftrightarrow 2\log\frac{a+b}{4}=\log a+\log b\Leftrightarrow\log\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

Câu 98: Đặt $a=\ln 2$ và $b=\ln 3$. Biểu diễn $S=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+....+\ln\frac{71}{72}$ theo a và b:

A. $S=-3a-2b$. **B.** $S=-3a+2b$. **C.** $S=3a+2b$. **D.** $S=3a-2b$

Hướng dẫn giải.

Chọn A. $S=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+....+\ln\frac{71}{72}=\ln\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}...\frac{71}{72}\right)=\ln\frac{1}{72}=$

$$=-\ln 72=-\ln(2^3.3^2)=-(3\ln 2+2\ln 3)=-(3a+2b)$$

Câu 99: Cho $a=\log_4 3,\ b=\log_{25}2$. Hãy tính $\log_{60}\sqrt{150}$ theo $a,\ b$.

A. $\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+2b+ab}{1+4b+2ab}$. **B.** $\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1+b+2ab}{1+4b+4ab}$.

C. $\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+b+2ab}{1+4b+2ab}$. **D.** $\log_{60}\sqrt{150}=4\cdot\frac{1+b+2ab}{1+4b+4ab}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

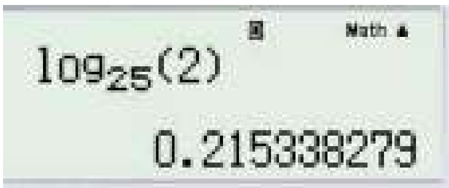
Cách 1: Ta có

$$\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1}{2}\frac{\log_{25}150}{\log_{25}60}=\frac{1}{2}\frac{\log_{25}25+\log_{25}2+\log_{25}3}{\log_{25}5+\log_{25}4+\log_{25}3}$$

$$=\frac{1+\log_{25}2+2\log_4 3.\log_{25}2}{2\log_{25}5+4\log_{25}2+4\log_4 3.\log_{25}2}=\frac{1+a+2ab}{1+4b+4ab}$$

Cách 2: Nhập máy tính

lưu biến A

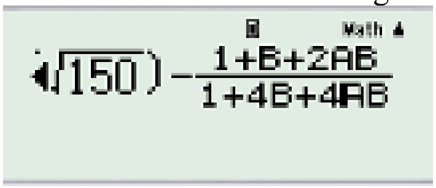

Tương tự


lưu biến B


Sau đó nhập máy tính:


ấn “=” kết quả 

chứng tỏ đáp án **A** loại

sửa phần sau dấu trừ thành 

ấn “=” được kq:

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 100: Biết $\log_{27}5 = a,\ \log_8 7 = b,\ \log_2 3 = c$ thì $\log_{12}35$ tính theo $a,\ b,\ c$ bằng:

A. $\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\dfrac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\dfrac{3(b+ac)}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\log_{27}5 = \dfrac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$, $\log_8 7 = \dfrac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b$.

Mà $\log_{12}35 = \dfrac{\log_2(7.5)}{\log_2(3.2^2)} = \dfrac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{\log_2 7 + \log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{3b + c.3a}{c+2} = \dfrac{3(b+ac)}{c+2}$.

Câu 101: Cho $a,b,c > 0, c \ne 1$ và đặt $\log_c a = m,\ \log_c b = n,\ T = \log_{\sqrt{c}}\left(\dfrac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right)$. Tính T theo m,n.

A. $T = \dfrac{3}{2}m - \dfrac{3}{8}n$. **B.** $T = 6n - \dfrac{3}{2}m$. **C.** $T = \dfrac{3}{2}m + \dfrac{3}{8}n$. **D.** $T = 6m - \dfrac{3}{2}n$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$T = \log_{\sqrt{c}}\left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right) = \log\left(c^{\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{a^3}{b^{\frac{3}{4}}}\right)} = 2\left[\log_c a^3 - \log_c b^{\frac{3}{4}}\right] = 2\left[3\log_c a - \frac{3}{4}\log_c b\right] \Leftrightarrow T = 6m - \frac{3}{2}n$$

Câu 102: Cho $\log_3 5 = a, \log_5 2 = b, \log_3 11 = c$. Khi đó $\log_{216}495$ bằng

A. $\dfrac{a+c}{3ab+3}$. **B.** $\dfrac{a+c+2}{3ab}$. **C.** $\dfrac{a+c+2}{ab+3}$. **D.** $\dfrac{a+c+2}{3ab+3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có:

$$\log_{216}495 = \log_{216}3.\log_3 495 = \frac{\log_3 495}{\log_3 216} = \frac{\log_3(3^2.11.5)}{\log_3(3^3.2^3)} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 11 + \log_3 5}{\log_3 3^3 + \log_3 2^3}$$

$$= \frac{2 + \log_3 11 + \log_3 5}{3 + 3\log_3 2} = \frac{2 + \log_3 11 + \log_3 5}{3 + 3(\log_3 5.\log_5 2)} = \frac{2 + c + a}{3 + 3a.b}.$$

Câu 103: Cho $a,\ b$ là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln\dfrac{a+b}{4} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$ **B.** $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

C. $2\log_4(a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$. **D.** $2\log\dfrac{a+b}{4} = \log a + \log b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $a^2+b^2=14ab \Leftrightarrow (a+b)^2=16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab$

Nên ta có $\ln\frac{a+b}{4}=\ln\sqrt{ab}=\frac{\ln a+\ln b}{2}$ vậy A đúng

$2\log_2(a+b)=\log_2(a+b)^2=\log_2(16ab)=4+\log_2 a+\log_2 b$ vậy B đúng

$2\log_4(a+b)=\log_4(a+b)^2=\log_4(16ab)=2+\log_4 a+\log_4 b$ vậy C sai

$2\log\frac{a+b}{4}=\log a+\log b$ vậy D đúng

Cách 2:

Câu này ý C sai vì $2\log_4(a+b)=4+\log_4 a+\log_4 b \Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=4\log_4 4+\log_4 ab$

$\Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=\log_4 4^4+\log_4 ab=\log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2=64ab$

Câu 104: Với $a>0, a\neq 1$, cho biết: $t=a^{\frac{1}{1-\log_a u}}; v=a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $u=a\frac{-1}{1-\log_a v}$. **B.** $u=a\frac{1}{1+\log_a t}$. **C.** $u=a\frac{1}{1+\log_a v}$. **D.** $u=a\frac{1}{1-\log_a v}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Từ giả thiết suy ra: $\log_a t=\frac{1}{1-\log_a u}.\log_a a=\frac{1}{1-\log_a u}$

$\log_a v=\frac{1}{1-\log_a t}.\log_a a=\frac{1}{1-\log_a t}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\log_a u}}=\frac{1-\log_a u}{-\log_a u}$

$\Leftrightarrow -\log_a v\log_a u=1-\log_a u \Leftrightarrow \log_a u(1-\log_a v)=1$

$\Leftrightarrow \log_a u=\frac{1}{1-\log_a v} \Leftrightarrow u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$

SO SÁNH CÁC BIỂU THỨC LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 105: Trong bốn số $3^{\log_3 4}$, $3^{2\log_3 2}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$, $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{0,5} 2}$ số nào nhỏ hơn 1?

A. $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{0,5} 2}$. **B.** $3^{2\log_3 2}$. **C.** $3^{\log_3 4}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **Tự luận:**

$3^{\log_3 4}=4; 3^{2\log_3 2}=3^{\log_3 4}=4; \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}=2^{-2\log_2 5}=2^{\log_2 5^{-2}}=5^{-2}=\frac{1}{25}$,

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{0,5} 2}=\left(2^{-4}\right)^{-\log_2 2}=2^{\log_2 2^4}=2^4=16.$$

Trắc nghiệm: nhập vào máy tính từng biểu thức tính kết quả, chọn kết quả nhỏ hơn 1.

Câu 106: Cho $x=\log_6 5$, $y=\log_2 3$, $z=\log_4 10$, $t=\log_7 5$. Chọn thứ tự đúng.

A. $z>x>t>y$. **B.** $z>y>t>x$. **C.** $y>z>x>t$. **D.** $z>y>x>t$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\log_6 5>\log_7 5 \Rightarrow x>t$; $\log_2 3>1>\log_6 5 \Rightarrow y>x$;

$\log_4 10 > \log_4 9 = \log_2 3 \Rightarrow z > y$. Vậy $z > y > x > t$.

Câu 107: Cho $\log_5 x > 0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_x 5 \le \log_x 4$. **B.** $\log_x 5 > \log_x 6$. **C.** $\log_5 x = \log_x 5$. **D.** $\log_5 x > \log_6 x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $\log_5 x > 0 \Rightarrow x > 1$. Khi đó $\log_5 x > \log_6 x$.

Câu 108: Cho $a, b, c > 0$ và $a < 1$ .Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$. **D.** $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$.

C. $\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c$. **D.** $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$ $(do\ 0 < a < 1)$

Câu 109: Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \ne 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $a^{\log_a b} = b$. **B.** $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

C. $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$. **D.** $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Vì khẳng định đó chỉ đúng khi $a > 1$, còn khi $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

Câu 110: Cho các số thực dương a, b với $a \ne 1$ và $\log_a b < 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 0 < b, a < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $\log_a b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$

Câu 111: Cho $0 < a < b < 1$ mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_b a > \log_a b$. **B.** $\log_a b > 1$. **C.** $\log_b a < 0$. **D.** $\log_a b > \log_b a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $0 < a < b < 1$ nên cả $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ đều là các hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$

Do $a < b$ nên $\begin{cases} \log_a a > \log_a b \\ \log_b a > \log_b b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \log_a b \\ \log_b a > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a > \log_a b$

Câu 112: Các số $\log_3 2$, $\log_2 3$, $\log_3 11$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần là:

A. $\log_3 2, \log_3 11, \log_2 3$. **B.** $\log_3 2, \log_2 3, \log_3 11$.

C. $\log_2 3, \log_3 2, \log_3 11$. **D.** $\log_3 11, \log_3 2, \log_2 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\log_3 2 < \log_3 3 = 1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_3 11$

Câu 113: Cho các số thực a, b thỏa $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\dfrac{1}{\log_a b} < 1 < \dfrac{1}{\log_b a}$. **C.** $\dfrac{1}{\log_a b} < \dfrac{1}{\log_b a} < 1$.

B. $1 < \dfrac{1}{\log_a b} < \dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\dfrac{1}{\log_b a} < 1 < \dfrac{1}{\log_a b}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Một hệ thức đúng với mọi $1 < a < b$ thì các trường hợp riêng cũng sẽ đúng.

Ta chọn $a=2, b=3$ và bấm máy kiểm tra từng đáp án chỉ có A đúng.

Câu 114: Cho 2 số $\log_{1999}2000$ và $\log_{2000}2001$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{1999}2000>\log_{2000}2001$.

B. Hai số trên nhỏ hơn 1.

C. Hai số trên lớn hơn 2.

D. $\log_{1999}2000\ge\log_{2000}2001$.

Hướng dẫn giải

$2000^2>1999.2001\Rightarrow\log_{2000}2000^2>\log_{2000}2001.1999$

$\Rightarrow 2>\log_{2000}2001+\log_{2000}1999\Rightarrow\log_{1999}2000>\log_{2000}2001$

Câu 115: Cho $a,b,c>0$ đôi một khác nhau và khác 1, Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b};\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c};\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}=1$.

B. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b};\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c};\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}>1$.

C. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b};\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c};\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}>-1$.

D. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b};\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c};\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. * $\log_a\frac{b}{c}=\log_a\left(\frac{c}{b}\right)^{-1}=-\log_a\frac{c}{b}\Rightarrow\log^2_a\frac{b}{c}=\left(-\log_a\frac{c}{b}\right)^2=\log^2_a\frac{c}{b}$

* $\log_a b.\log_b c.\log_c a=1\Leftrightarrow\log_a b.\log_b a=\log_a a=1$

* Từ 2 kết quả trên ta có:

$$\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b}\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c}\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}=\left(\log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{c}.\log_{\frac{b}{c}}\frac{c}{a}\log_{\frac{c}{a}}\frac{a}{b}\right)^2=1$$

Câu 116: Nếu $(0,1a)^{\sqrt{3}}<(0,1a)^{\sqrt{2}}$ và $\log_b\frac{2}{3}<\log_b\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì:

A. $\begin{cases}a>10\\b<1\end{cases}$.

B. $\begin{cases}0<a<10\\0<b<1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}0<a<10\\b>1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}a>10\\0<b<1\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ nên ta có $(0,1.a)^{\sqrt{3}}<(0,1.a)^{\sqrt{2}}\Rightarrow 0,1.a<1\Rightarrow 0<a<10$

Do $\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên ta có $\log_b\frac{2}{3}<\log_b\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow b>1$.

Câu 117: Cho $0<x<1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\sqrt[3]{\log_x 5}+\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}}5}<0$

B. $\sqrt[3]{\log_x 5}>\sqrt{\log_x\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{\log_x\frac{1}{2}}<\log_5\frac{1}{2}$.

D. $\sqrt{\log_x\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{\log_x 5}>0$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Sử dụng máy tính Casio, Chọn $x=0,5$ và thay vào từng đáp án, ta được

Câu 118: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b\frac{1}{2}<\log_b\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $a>1, b>1$.

B. $a>1, 0<b<a$.

C. $0<a<1, 0<b<1$.

D. $0<a<1, b>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}\Rightarrow a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}$ nên hàm số $y=a^x$ giảm. Suy ra $0<a<1$.

Và $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\Rightarrow\log_b\frac{1}{2}<\log_b\frac{2}{3}$ nên hàm số $y=\log_b x$ tăng. Suy ra $b>1$.

Câu 119: Cho các số thực dương $a,\, b$ thỏa $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{5}}$ và $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{3}{5}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $0<\log_a b<1$. **B.** $\log_a b>1$. **C.** $\log_b a<0$. **D.** $0<\log_b a<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{5}} \Rightarrow a>1$, $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{3}{5} \Rightarrow 0<b<1$ nên $\log_b a<0$.

Câu 120: Cho $a>b>1$. Gọi $M=\log_a b$; $N=\log_{ab} b$; $P=\log_{\frac{b}{a}} b$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $N>P>M$. **B.** $N>M>P$. **C.** $M>N>P$. **D.** $M>P>N$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Ta có: $N=\log_{ab} b=\dfrac{\log_a b}{\log_a ab}=\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}$.

Vì $1+\log_a b>1$ nên $\log_a b>\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}\Rightarrow M>N$.

Ta lại có: $P=\log_{\frac{b}{a}} b=\dfrac{\log_a b}{\log_a \frac{b}{a}}=\dfrac{\log_a b}{\log_a b-1}$.

Vì $\log_a b-1<0$ và $\log_a b>0$ nên $\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}>\dfrac{\log_a b}{\log_a b-1}\Rightarrow N>P$. Vậy $M>N>P$.

Chú ý: Ta có thể chọn $a=4$, $b=2$ rồi thử trực tiếp với máy tính cũng biết kết quả.

Câu 121: Cho hai số thực $a,\, b$ thỏa mãn $e<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là **sai?**

A. $\ln ab>2$. **B.** $\log_a e+\log_b e<2$. **C.** $\ln\frac{a}{b}>0$. **D.** $\ln b>\ln a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì $\frac{a}{b}<1$ nên $\ln\frac{a}{b}<\ln 1=0$

Câu 122: Với mọi số thực dương $a,\, b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{\frac{3}{4}} a<\log_{\frac{3}{4}} b\Leftrightarrow a<b$. **B.** $\log_2(a^2+b^2)=2\log(a+b)$.

C. $\log_{a^2+1} a\ge\log_{a^2+1} b\Leftrightarrow a\ge b$. **D.** $\log_2 a^2=\frac{1}{2}\log_2 a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $a^2+1>1\Rightarrow$ $\log_{a^2+1} a\ge\log_{a^2+1} b\Leftrightarrow a\ge b$

Câu 123: Cho $a,b,c>0$ và $a>1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\log_a b<\log_a c\Leftrightarrow b<c$. **B.** $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.

C. $\log_a b>c\Leftrightarrow b>c$. **D.** $a^b>a^c\Leftrightarrow b>c$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì $\log_a b>c\Leftrightarrow b>a^c$

Câu 124: Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $\log_3 x<0\Leftrightarrow 0<x<1$. **B.** $\log_{\frac{1}{3}} a>\log_{\frac{1}{3}} b\Leftrightarrow a>b>0$.

C. $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$. **D.** $\log_{\frac{1}{2}} a=\log_{\frac{1}{2}} b\Leftrightarrow a=b>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đáp án B sai vì có số bằng $\frac{1}{3}<1$ nên $\log_{\frac{1}{3}} a>\log_{\frac{1}{3}} b\Leftrightarrow 0<a<b$

Câu 125: Cho $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=5$, với *a, b* và c là các số hữu tỷ. các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $a=b$. **B.** $a>b$. **C.** $b>a$. **D.** $c>a>b$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=5 \Leftrightarrow \log_3 3^a2^b5^c=5 \Leftrightarrow 3^a2^b5^c=6^5=3^5.2^5.5^0$

Do a,b,c là các số hữu tỉ nên a=b=5 và c=0.

VẬN DỤNG:

Câu 126: Cho $a,b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ thỏa mãn: $a^{\frac{13}{7}}<a^{\frac{15}{8}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)>\log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$. Khẳng định đúng là

A. $0<a<1,b>1$. **B.** $0<a<1,0<b<1$. **C.** $a>1,b>1$. **D.** $a>1,0<b<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $a^{\frac{13}{7}}<a^{\frac{15}{8}}$ suy ra được $a>1$ vì $\frac{15}{8}>\frac{13}{7}$.

Ta có: $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)>\log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$ suy ra được $0<b<1$ vì $\sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$.

GTLN, GTNN BIỂU THỨC CHỨA LÔGARIT

VẬN DỤNG CAO:

Câu 127: Cho $1<x<64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2^4 x+12\log_2^2 x.\log_2\frac{8}{x}$.

A. 64. **B.** 96. **C.** 82. **D.** 81.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $P=\log_2^4 x+12\log_2^2 x.\log_2\frac{8}{x}=\log_2^4 x+12\log_2^2 x(\log_2 8-\log_2 x)$

Vì $1<x<64$ nên $\log_2 1<\log_2 x<\log_2 64 \Leftrightarrow 0<\log_2 x<6$

Đặt $t=\log_2 x$ với $0<t<6$.

Ta có $P=t^4+12t^2(3-t)=t^4-12t^3+36t^2$

$$P'=4t^3-36t^2+72t=0\leftrightarrow\begin{cases}t=0(L)\\t=6(L)\\t=3(TM)\end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta: $P_{max}=81$ khi $x=3$

Câu 128: Cho $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$, với $a>1$, $b>1$ và $P=\log_a^2 b+16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $a>1,b>1$, ta có: $\begin{cases}m=\frac{1}{3}(1+\log_a b)\\\log_a b>0\end{cases}$

Đặt $t=\log_a b$, $(t>0)\Rightarrow P=(\log_a b)^2+\frac{16}{\log_a b}=t^2+\frac{16}{t}=t^2+\frac{8}{t}+\frac{8}{t}\geq 3.\sqrt[3]{t^2.\frac{8}{t}.\frac{8}{t}}=12$.

Dấu "=" xảy ra khi $t^2 = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t^3 = 8 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 12$ khi $\log_a b = 2$. Suy ra $m = \frac{1}{3}(1+2) = 1$.

Câu 129: Cho $m = \log_a \sqrt{ab}$ với $a, b > 1$ và $P = log_2 b + 54\log_b a$. Khi đó giá trị của m để P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $m = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b \Rightarrow \log_a b = 2m - 1$

Lại có $P = \log^2{}_a b + 54\log_b a = (2m-1)^2 + 54.\frac{1}{2m-1}$.

Đặt $t = 2m - 1\ (t \neq 0)$ khảo sát hàm $P = t^2 + \frac{54}{t}$ thấy $P_{\min} = 27 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow m = 2$

Câu 130: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn $\sqrt{b} > a > 1$ là

A. 30. **B.** 40. **C.** 18. **D.** 60.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$(\log_a b^2)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{a}.\sqrt{a}\right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6\left(1 + \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{a}\right)^2$$

$$= 4(\log_a b)^2 + 6\left(1 + \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{b}}{a}}\right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6\left(1 + \frac{1}{\log_a b - 2}\right)^2$$

Đặt $t = \log_a b \Rightarrow P = 4t^2 + 6\left(1 + \frac{1}{t-2}\right)^2 = 4t^2 + 6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \geq 2\sqrt{4t^2.6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2}$ (BĐT Côsi)

$\Rightarrow P_{\min} = 2\sqrt{4t^2.6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2}$. Dấu bằng xảy ra khi: $4t^2 = 6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = \sqrt{6}\left(\frac{t-1}{t-2}\right) \\ 2t = -\sqrt{6}\left(\frac{t-1}{t-2}\right) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t(t-2) = \sqrt{6}(t-1) \\ 2t(t-2) = -\sqrt{6}(t-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t^2 - (4+\sqrt{6})t + \sqrt{6} = 0 \\ 2t^2 - (4-\sqrt{6})t - \sqrt{6} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{22}}{4} \end{array}\right.$$

Câu 131: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất P_{Max} của biểu thức $P = \frac{-1}{\log_b^2 a} + \log_a\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{7}{4}$.

A. $P_{Max} = 2$. **B.** $P_{Max} = 1$. **C.** $P_{Max} = 0$. **D.** $P_{Max} = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\dfrac{-1}{\log_b^2 a}+\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right)+\dfrac{7}{4}=-\log_a^2 b+\log_a b+\dfrac{3}{4}=-\left(\log_a b-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\le 1\Rightarrow P_{Max}=1.$

Câu 132: Cho $0<a<1<b$, $ab>1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a ab+\dfrac{4}{(1-\log_a b).\log_{\frac{a}{b}} ab}$.

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Do $0<a<1<b$, $ab>1$ nên suy ra $\log_a b<0$.

Mặt khác ta có $\log_b ab>0 \Leftrightarrow \log_b a+1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\log_a b}{\log_a b}>0\Rightarrow \log_a b+1<0$.

Ta có $P=\log_a ab+\dfrac{4}{(1-\log_a b).\log_{\frac{a}{b}} ab}=1+\log_a b+\dfrac{4}{(1-\log_a b)\left(\log_{ab^{-1}} a+\log_{ab^{-1}} b\right)}$

$=1+\log_a b+\dfrac{4}{(1-\log_a b)\left(\dfrac{1}{1-\log_a b}+\dfrac{\log_a b}{1-\log_a b}\right)}=1+\log_a b+\dfrac{4}{1+\log_a b}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $-P=(-1-\log_a b)+\dfrac{4}{-1-\log_a b}\ge 4$.

Suy ra $P\le -4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1+\log_a b=-2 \Leftrightarrow \log_a b=-3 \Leftrightarrow a^3b=1$.

Câu 133: Xét các số thực a, b thỏa mãn $\begin{cases} a\ge b^2 \\ b>1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_{\frac{a}{b}} a+\log_b \dfrac{a}{b}$.

A. $P_{\min}=\dfrac{1}{3}$. **B.** $P_{\min}=1$. **C.** $P_{\min}=3$. **D.** $P_{\min}=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases} a>1 \\ b>1 \end{cases}$. Ta có $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+\dfrac{1-\log_a b}{\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b>0$. Do $a\ge b^2 \longrightarrow \log_b a\ge \log_b b^2=2 \longrightarrow t=\log_a b\le \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1-t}{t}=f(t)$. Khảo sát hàm $f(t)$ trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$, được $P=f(t)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

Câu 134: Xét các số thực a, b thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\le b<a$. Biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ đạt giá trị khỏ nhất khi:

A. $a=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $a^3=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases} a>1 \\ b>1 \end{cases}$.

Ta có $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+4(\log_b a-1)=\dfrac{1}{1-\log_a b}+\dfrac{4}{\log_a b}-4$.

Đặt $t=\log_a b>0$. Do $\sqrt{a}\le b<a \longrightarrow \log_a \sqrt{a}\le \log_a b<\log_a a \longrightarrow \dfrac{1}{2}\le t<1$.

Khi đó $P=\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{4}{t}-4=f(t)$.

Khảo sát $f\left(t\right)$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right)$, ta được $f\left(t\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $t=\frac{2}{3}$.

Với $t=\frac{2}{3}\longrightarrow \log_a b=\frac{2}{3}\leftrightarrow a^2=b^3$.

Câu 135: Xét các số thực $a,\ b$ thỏa mãn $\frac{1}{4}<b<a<1$. Biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

A. $\log_a b=\frac{2}{3}$. **B.** $\log_a b=\frac{1}{3}$. **C.** $\log_a b=\frac{3}{2}$. **D.** $\log_a b=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\longleftrightarrow b^2-b+\frac{1}{4}\ge 0\longleftrightarrow b-\frac{1}{4}\le b^2$.

Mà $a<1\longrightarrow \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\ge \log_a b^2=2\log_a b$.

Ta có $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}.\log_{\frac{a}{b}} b=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}.\frac{\log_a b}{1-\log_a b}\ge 2\log_a b-\frac{1}{2}.\frac{\log_a b}{1-\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b$. Do $b<a<1\longrightarrow t=\log_a b>1$.

Khi đó $P\ge 2t+\frac{t}{2t-2}=f\left(t\right)$.

Khảo sát $f\left(t\right)$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$, ta được $P\ge f\left(t\right)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$.

Câu 136: Xét các số thực $a,\ b$ thỏa mãn $a>1>b>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{a^2}a^2b+\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $P_{\max}=1+2\sqrt{3}$. **B.** $P_{\max}=-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\max}=-2$. **D.** $P_{\max}=1-2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $P=\log_{a^2}a^2b+\log_{\sqrt{b}}a^3=\frac{\log_a a^2b}{\log_a a^2}+\frac{\log_a a^3}{\log_a\sqrt{b}}=\frac{\log_a b+2}{2}+\frac{6}{\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b$. Do $a>1>b>0\longrightarrow \log_a b<\log_a 1=0\longrightarrow t<0$.

Khi đó $P=\frac{t+2}{2}+\frac{6}{t}=\frac{t}{2}+\frac{6}{t}+1=1-\left(-\frac{t}{2}-\frac{6}{t}\right)\overset{\text{Cauchy}}{\le}1-2\sqrt{3}$.

Câu 137: Xét các số thực $a,\ b$ thỏa $1<a\le b^2$. Biểu thức $P=2\left(2\log_{\frac{a}{b}}a-\log_{\frac{a}{b}}b\right)^2+27\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

A. $a=b^2$. **B.** $a=2b$. **C.** $a=b+1$ **D.** $2a=b+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\log_{\frac{a}{b}}b=\log_{\frac{a}{b}}\left(a.\frac{b}{a}\right)=\log_{\frac{a}{b}}a-1$.

Do đó $P=2\left[2\log_{\frac{a}{b}}a-\left(\log_{\frac{a}{b}}a-1\right)\right]^2+\frac{27}{\log_{\frac{a}{b}}a}=2\left(\log_{\frac{a}{b}}a+1\right)^2+\frac{27}{\log_{\frac{a}{b}}a}$.

Đặt $t=\log_{\frac{a}{b}}a$. Do $1<a\le b^2\longrightarrow \sqrt{a}\le b$, suy ra

$\frac{1}{t}=\frac{1}{\log_{\frac{a}{b}}a}=\log_a\frac{a}{b}=1-\log_a b\le 1-\log_a\sqrt{a}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\longrightarrow t\ge 2$.

Khi đó $P=2(t+1)^2+\frac{27}{t}=f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên $[2;+\infty)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{63}{2}$ khi $t=2$.

Với $t=2 \longrightarrow \log_{\frac{a}{b}} a=2 \leftrightarrow a=b^2$.

Câu 138: Cho các số thực $a,\ b,\ c>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(bc)+\log_b(ca)+4\log_c(ab)$.

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$$P=\log_a(bc)+\log_b(ca)+4\log_c(ab)=\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_a a+4(\log_c a+\log_c b)$$

$$=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+\log_a c+\frac{4}{\log_a c}+\log_b c+\frac{4}{\log_b c}\ge 2+4+4=10.$$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ c=a^2 \end{cases}$.

Câu 139: Cho các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn $\log_2 a\ge(1-\log_2 b\log_2 c)\log_{bc}2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=10\log_2^2 a+10\log_2^2 b+\log_2^2 c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện bài toán, ta có $x=\log_2 a,\ y=\log_2 b,\ z=\log_2 c\Rightarrow x,y,z>0$.

Do đó $z\ge\frac{1}{y+z}(1-yz)\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 1$ và $S=10(x^2+y^2)+z^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức ta có

$$12x^2+12y^2+3z^2=\frac{x^2}{\frac{1}{12}}+\frac{y^2}{\frac{1}{12}}+\frac{z^2}{\frac{1}{3}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}}=2(x+y+z)^2.$$

Do đó $10x^2+10y^2+z^2\ge 4(xy+yz+zx)\ge 4$.

Chú ý: Ta đánh giá như sau: $10x^2+10y^2+z^2\ge 2k(xy+yz+zx)\ (k>0)$

$$\Leftrightarrow (k+10)x^2+(k+10)y^2+(k+1)z^2\ge k(x+y+z)^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\ge k(x+y+z)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có: $\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}}$.

Vậy cần chọn $k>0$ sao cho $\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}=k\Leftrightarrow k=2$. Ta có kết quả như trên.

Câu 140: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $5\log_2^2 a+16\log_2^2 b+27\log_2^2 c=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\log_2 a\log_2 b+\log_2 b\log_2 c+\log_2 c\log_2 a$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x=\log_2 a,\ y=\log_2 b,\ z=\log_2 c$, ta có $5x^2+16y^2+27z^2=1$ và $S=xy+yz+zx$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức ta có:

$$11x^2+22y^2+33z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{33}} = 6(x+y+z)^2 \Rightarrow 5x^2+16y^2+27z^2 \ge 12(xy+yz+zx) \Rightarrow S \le \frac{1}{12}.$$

Câu 141: Với $a,b,c>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(bc)+3\log_b(ca)+4\log_c(ab)$.

A. 16. **B.** $6+4\sqrt{3}$. **C.** $4+6\sqrt{3}$. **D.** $4+8\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$P=(\log_a b+\log_a c)+3(\log_b c+\log_b a)+4(\log_c a+\log_c b)$

$=(\log_a b+3\log_b a)+(3\log_b c+4\log_c b)+(\log_a c+4\log_c a)$

$\ge 2\sqrt{\log_a b.3\log_b a}+2\sqrt{3\log_b c.4\log_c b}+2\sqrt{\log_a c.4\log_c a}=2\sqrt{3}+2\sqrt{12}+4=4+6\sqrt{3}.$

Câu 142: Cho các số thực $a,b,c>1$. Tính $\log_b(ca)$ khi biểu thức $S=\log_a(bc)+2\log_b(ca)+9\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức AM – GM ta có:

$S=(\log_a b+\log_a c)+2(\log_b c+\log_b a)+9(\log_c a+\log_c b)$

$=(\log_a b+2\log_b a)+(2\log_b c+9\log_c b)+(\log_a c+9\log_c a)$

$\ge 2\sqrt{\log_a b.2\log_b a}+2\sqrt{2\log_b b.9\log_c b}+2\sqrt{\log_a c.9\log_c a}=2\sqrt{2}+2\sqrt{18}+2\sqrt{9}=6+8\sqrt{2}.$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}\log_a b=2\log_b a=\sqrt{2}\\ 2\log_b c=9\log_c b=\sqrt{18}\\ \log_a c=9\log_c a=\sqrt{9}\end{cases} \Rightarrow \log_b(ca)=\log_b c+\log_b a=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 143: Cho các số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\frac{c}{b}-2\log_b\frac{c}{b}-3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a b-\log_b c$. Tính $S=2m+3M$.

A. $S=\frac{2}{3}$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x=\log_a b, y=\log_b c$ $x=\log_a b, y=\log_b c$

$\Rightarrow P=x-y$ và thay vào điều kiện ta được: $x^2+y^2=xy-x-2y-1$ (*)

Từ $P=x-y \Rightarrow y=x-P$ thế vào (*) ta được: $x^2+(x-P)^2=x(x-P)-x-2(x-P)-1$

$\Leftrightarrow x^2+(3-P)x+(P-1)^2=0$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=(3-P)^2-4(P-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le P\le \frac{5}{3}$

Vậy $m=-1$ và $M=\frac{5}{3} \Rightarrow S=2m+3M=2.(-1)+3.\frac{5}{3}=3$.

Câu 144: Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $b>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(a-b)^2+(10^a-\log b)^2}$.

A. $\sqrt{2}\log(\ln 10)$ **B.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$

C. $\frac{1}{\ln 10}+\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$ **D.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\ln\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét điểm $A(a;10^a), B(b;\log b)$

Do đồ thị của hai hàm số $y=10^x, y=\log x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Do đó khoảng cách giữa hai điểm A,B là $AB=P$ đạt giá trị nhỏ nhất khi A,B đối xứng nhau qua $y=x$. Vì vậy A, B cùng nằm trên đường thẳng $y=-x+m$.

Khi đó tọa độ các điểm là $A(a;10^a), B(10^a;a)$

$\Rightarrow AB=f(a)=\sqrt{2}\left|10^a-a\right|\ge \min_{\mathbb{R}} f(a)=f\left(\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$.

Câu 145: Cho các số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a \frac{c}{b}-2\log_b \frac{c}{b}-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a b-\log_b c$.

A. $\frac{1-2\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{10}-1}{3}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}+2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $x=\log_a b,\ y=\log_b c$

$\Rightarrow P=x-y$ và thay vào điều kiện ta có $x^2+y^2=xy-x-2y+1$.

Khi đó $y=x-P$ và

$x^2+(x-P)^2=x(x-P)-x-2(x-P)+1 \Leftrightarrow x^2+(3-P)x+P^2-2P-1=0$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta=(3-P)^2-4(P^2-2P-1)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{10}}{3}\le P\le \frac{1+2\sqrt{10}}{3}$.

Câu 146: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a b+\log_b c+\sqrt{\log_c a}$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\log_a b,\ \log_b c,\ \log_c a>0$ với $0<a,b,c<1$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\log_a b+\log_b c\ge 2\sqrt{\log_a b.\log_b c}=2\sqrt{\log_a c}$.

Do đó $S\ge 2\sqrt{\log_a c}+\sqrt{\log_c a}\ge 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c}.\sqrt{\log_c a}}=2\sqrt{2}$.

Câu 147: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log a.\log b+\log b.\log c+3\log c.\log a=1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log^2 a+\log^2 b+\log^2 c$ là $\frac{-m+\sqrt{n}}{p}$ với m,n,p là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ tối giản. Tính $T=m+n+p$.

A. $T=64$. **B.** $T=16$. **C.** $T=102$. **D.** $T=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Cách mẹo trắc nghiệm, vai trò của x và z là như nhau nên cho $x=z$ ta có

$$\begin{cases} P = 2x^2 + y^2 \\ 3x^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(3x^2 + 2xy\right) = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(3P - 2\right)x^2 + 2Pxy - y^2 = 0$$

$$\Delta'_x = P^2y^2 + \left(3P - 2\right)y^2 \ge 0 \Leftrightarrow P^2 + \left(3P - 2\right) \ge 0 \Rightarrow P \ge \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

Câu 148: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc = e$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \ln a.\ln b + 2\ln b.\ln c + 5\ln c.\ln a$ là $\frac{p}{q}$ với p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ tối giản. Tính $S = 2p + 3q$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $S = 7$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 16$. **D.** $S = 19$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $a = e^x, b = e^y, c = e^z$, $abc = e \Rightarrow x + y + z = 1\ (1)$

Ta có $M = \ln a.\ln b + 2\ln b.\ln c + 5\ln c.\ln a \Rightarrow M = xy + 2yz + 5zx$.

Từ $(1) \Rightarrow z = 1 - x - y$ thay vào biểu thức chứa M ta có:

$$M = -2y^2 - 5x^2 - 6xy + 2y + 5x = -2\left(y + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{2} \le \frac{5}{2}$$

$\max M = \frac{5}{2}$ khi $x = 2, y = \frac{5}{2}, z = \frac{3}{2}$. Vậy $p = 5, q = 2 \Rightarrow S = 16$

Câu 149: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 19$. **B.** $P_{\min} = 13$. **C.** $P_{\min} = 14$. **D.** $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Với điều kiện đề bài, ta có

$$P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

Ta có $f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Câu 150: Cho $a \in \left[\frac{1}{9};3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $9\log^3_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a} + \log^2_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Khi đó giá trị của $A = 5m + 2M$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Rút gọn biểu thức $P = \frac{-1}{3}\log^3_3 a + \log^2_3 a + 3\log_3 a + 1$.

Đặt $\log_3 a = t$. Vì $a \in \left[\frac{1}{9};3\right] \Rightarrow t \in [-2;1]$.

Ta tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(t)=\frac{-1}{3}t^3+t^2+3t+1$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng cách lập bảng biến thiên ta thu được $M=\frac{14}{3};m=\frac{-2}{3}\Rightarrow A=5m+2M=6$.

Câu 151: Cho $a>1$, $b>1$. Tính $S=\log_a\sqrt{ab}$, khi biểu thức $P=\log_a^2 b+8\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $S=6\sqrt[3]{2}$. **B.** $S=\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$. **C.** $S=\sqrt[3]{4}$. **D.** $S=2\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $P=\log_a^2 b+8\log_b a=\log_a^2 b+\frac{4}{\log_a b}+\frac{4}{\log_a b}\ge 3.\sqrt[3]{\log_a^2 b.\frac{4}{\log_a b}.\frac{4}{\log_a b}}=3\sqrt[3]{16}$.

Dấu bằng xảy ra $\log_a^2 b=\frac{4}{\log_a b}\Leftrightarrow \log_a b=\sqrt[3]{4}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(1+\log_a b\right)=\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$.

Câu 152: Cho hai số thực $b>a>1$, tính $S=\log_a\sqrt[3]{ab}$, khi biểu thức $P=\frac{\log_a b}{\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)}+\log_a\sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $S=4$. **B.** $S=\frac{11}{4}$. **C.** $S=\frac{4}{3}$. **D.** $S=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\frac{\log_a b}{\left(1-\log_a b\right)^2}+\frac{1+\log_a b}{2}=f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{t+1}{2}$. Với $t=\log_a b>1,\ \forall b>a>1$.

Do đó $f(t)\ge\min\limits_{(1;+\infty)}f(t)=f(3)=\frac{11}{4}$. Dấu bằng đạt tại $\log_a b=3\Rightarrow S=\frac{1+\log_a b}{3}=\frac{4}{3}$.

Câu 153: Cho hai số thực $a>1$, $b>1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{1}{\log_{ab}a}+\frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}$ là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $P=2m+3n$.

A. $P=30$. **B.** $P=42$. **C.** $P=24$. **D.** $P=35$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $S=\log_a ab+\log_b\sqrt[4]{ab}=\left(1+\log_a b\right)+\frac{1}{4}\left(\log_b a+1\right)=\frac{5}{4}+\left(\log_a b+\frac{1}{4}\log_b a\right)$

$\Rightarrow S\ge\frac{5}{4}+2\sqrt{\log_a b.\frac{1}{4}.\log_b a}=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$. Vậy $m=9,\ n=4\Rightarrow P=18+12=30$.

Câu 154: Cho các số thực $a,b\in(1;2]$ thỏa mãn $a<b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m+n$.

A. $S=9$. **C.** $S=18$. **D.** $S=54$. **C.** $S=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\log_{\frac{b}{a}}^2 a=\frac{1}{\log_a^2\frac{b}{a}}=\frac{1}{\left(\log_a b-1\right)^2}$.

Với mọi $b\in(1;2]$, ta có $b^2+4b-4\ge b^3$ vì tương đương với $(b-1)\left(b^2-4\right)\le 0$.

Dấu bằng đạt tại $b=2$. Khi đó $\log_a\left(b^2+4b-4\right)\ge\log_a b^3=3\log_a b$.

Đặt $x=\log_a b\left(x>1\right)$. $P\ge 6x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=3\left(x-1\right)+3\left(x-1\right)+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+6$.

$\Rightarrow P\ge 6+3.\sqrt[3]{3\left(x-1\right).3\left(x-1\right).\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}}=6+3.\sqrt[3]{9}$.

Dấu bằng đạt tại $3\left(x-1\right)=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\Leftrightarrow\log_a b=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 155: Cho $a,b,c>1$. Biết rằng biểu thức $P=\log_a\left(bc\right)+\log_b\left(ac\right)+4\log_c\left(ab\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c=n$. Tính giá trị $m+n$.

A. $m+n=12$. **B.** $m+n=\dfrac{25}{2}$. **C.** $m+n=14$. **D.** $m+n=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $P=\log_a\left(bc\right)+\log_b\left(ac\right)+4\log_c\left(ab\right)=\log_a b+\log_a c+\log_b a+4\log_b c+4\log_c b$

Ta có: $\log_a b+\log_b a\ge 2;\log_a c+4\log_c a\ge 4;\log_b c+4\log_c b\ge 4$

Khi đó $P\ge 10=m$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \log_a c=4\log_c a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \log_a c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \log_b c=2\end{cases}$. Vậy $m+n=12$.

Câu 156: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$, biết $P=\log_b^2\left(\dfrac{a^4}{b^4}\right)+\log_b\sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b=a^m$. Tính $T=M+m$.

A. $T=\dfrac{7}{2}$. **B.** $T=\dfrac{37}{10}$. **C.** $T=\dfrac{17}{2}$. **D.** $T=\dfrac{35}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $P=\left(\dfrac{4\log_a b}{1-\log_a b}\right)^2+\dfrac{1}{2\log_a b}$. Đặt $x=\log_a b,\left(0<x<1\right)$, ta có,

$y=\dfrac{16x^2}{\left(1-x\right)^2}+\dfrac{1}{2x}$, $y'=\dfrac{-65x^3+3x^2-3x+1}{2\left(1-x\right)^3x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\min y=y\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{7}{2}$.

Do đó $M=\dfrac{7}{2}$, $m=\dfrac{1}{5}\Rightarrow T=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{37}{10}$.

Câu 157: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b=a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<k<\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}<k<1$. **C.** $-1<k<-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<k<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=\log_a\left(ab\right)+\sqrt{\log_a a-\log_a b}$

$=1+\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}=-\left(\sqrt{1-\log_a b}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$.

Dấu bằng đạt tại $\sqrt{1-\log_a b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\log_a b=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow b=a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<k<1$.

Câu 158: Xét hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $b>a>1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a^3\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)+\log_{\sqrt[3]{b^2}}\left(\dfrac{b}{a}\right)$..

A. $\dfrac{23+16\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{23-16\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{23+8\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{23-8\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $P=\left(2\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)^3+\dfrac{3}{2}\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)=8\left(1-\log_a b\right)^3+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{\log_a b}\right)$.

Đặt $\log_a b=x,\ (x>1)$, ta có $P=f(x)=8(1-x)^3+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ và $f'(x)=\dfrac{3}{2x^2}-24(1-x)^2$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\in(1;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên, ta có $P_{\max}=\max\limits_{(1;+\infty)}f(x)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{23-16\sqrt{2}}{2}$.

Câu 159: Cho hai số thực $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $T=\dfrac{2}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b=a^m$. Tính $P=M+m$.

A. $P=\dfrac{81}{16}$. **B.** $P=\dfrac{23}{8}$. **C.** $P=\dfrac{19}{8}$. **D.** $P=\dfrac{49}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $T=\dfrac{2}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}=2\log_a(ab)+\sqrt{\log_a a-\log_a b}=2\left(1+\log_a b\right)+\sqrt{1-\log_a b}$

$=-2\left(\sqrt{1-\log_a b}-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}\le\dfrac{33}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1-\log_a b}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\log_a b=\dfrac{15}{16}\Leftrightarrow b=a^{\frac{15}{16}}\Rightarrow m=\dfrac{15}{16},\ M=\dfrac{33}{8}$.

Khi đó $P=\dfrac{15}{16}+\dfrac{33}{8}=\dfrac{81}{16}$.

Câu 160: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\dfrac{1}{4}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\log_b\dfrac{a}{b}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\log_b a-1}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\log_a b}{1-\log_a b}$, và $\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge0\Rightarrow b-\dfrac{1}{4}\le b^2$

Do đó $\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)\ge\log_a b^2=2\log_a b$. Khi đó ta có: $P\ge2\log_a b-\dfrac{1}{2}.\dfrac{\log_a b}{1-\log_a b}$.

Đặt $x=\log_a b,\ (x>1)$, $f(x)=2x-\dfrac{x}{2(1-x)}$. $f'(x)=2-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\in(1;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên ta được $\min\limits_{(1;+\infty)}f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b-\dfrac{1}{4}=b^2 \\ \log_a b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$.

Câu 161: Xét các số thực $a, b, c \in (1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{bc}\left(2a^2+8a-8\right)+\log_{ca}\left(4a^2+16a-16\right)+\log_{ab}\left(c^2+4c-4\right)$.

A. 3. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Với $x\in(1;2]$ ta có $x^2+4x-4\ge x^3 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-4\right)\le 0$: luôn đúng.

Ta có $P\ge \log_{bc}2a^3+\log_{ca}4b^3+\log_{ab}c^3=\log_{bc}2+\log_{ca}4+3\left(\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ab}c\right)$.

Mặt khác $\log_{bc}2+\log_{ca}4=\dfrac{1}{\log_2 bc}+\dfrac{1}{\log_4 ca}\ge\dfrac{1}{\log_2(2.2)}+\dfrac{1}{\log_4(2.2)}=\dfrac{3}{2}$, $\forall a, b, c\in(1;2]$,

và $\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ab}c=\dfrac{\ln a}{\ln b+\ln c}+\dfrac{\ln b}{\ln c+\ln a}+\dfrac{\ln c}{\ln a+\ln b}\ge\dfrac{3}{2}$. Do đó $P\ge\dfrac{3}{2}+3.\dfrac{3}{2}=6$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Câu 162: Xét các số thực a, b thỏa $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)+3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. 19. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $P=\dfrac{4}{\left(\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)^2}+3\left(\log_b a-1\right)=\dfrac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}+\dfrac{3}{\log_a b}-3$.

Đặt $\log_a b=x$, $(0<x<1)$, và $f(x)=\dfrac{4}{(1-x)^2}+\dfrac{3}{x}-3$.

$f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{8}{(1-x)^3}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\in(0;1)$.

Lập bảng biến thiên, ta có $P\ge f\left(\dfrac{1}{3}\right)=15$. Dấu bằng xảy ra tại $x=\log_a b=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow b=\sqrt[3]{a}$.

Câu 163: Xét các số thực a, b thỏa $\dfrac{1}{6}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=\dfrac{1}{8}\log^3_a\left(\dfrac{6b-1}{9}\right)+4\log^3_{\frac{b}{a}}a$.

A. $m=9$. **B.** $m=12$. **C.** $m=\dfrac{23}{2}$. **D.** $m=\dfrac{25}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $4\log^3_{\frac{b}{a}}a=\dfrac{4}{\left(\log_a\dfrac{b}{a}\right)^3}=\dfrac{4}{\left(\log_a b-1\right)^3}$, $(3b-1)^2\ge 0\Rightarrow\dfrac{6b-1}{9}\le b^2$ và $\dfrac{1}{6}<b<a<1$

Nên $\log^3_a\left(\dfrac{6b-1}{9}\right)\ge\log^3_a b^2=8\log^3_a b$. Đặt $\log_a b=x$ $(x>1)$, $f(x)=x^3+\dfrac{4}{(x-1)^3}$.

$f'(x)=3x^2-\frac{12}{(x-1)^4}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in(1;+\infty)$.

Câu 164: Cho hai số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a>b>1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\log_b\left(\frac{b}{a}\right)$.

A. 5. **B.** $5-\sqrt{6}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $4-\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Biến đổi và sử dụng AM-GM, ta có

$P=2\log_a\left(\frac{a}{b}\right)+3\log_b\left(\frac{b}{a}\right)=2(1-\log_a b)+3(1-\log_b a)$

$=5-(3\log_b a+2\log_a b)\le 5-2\sqrt{3\log_b a.2\log_a b}=5-2\sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3\log_a b=2\log_b a \Leftrightarrow \log_a b=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 165: Cho hai số thực dương x,y thay đổi thỏa mãn $x^2-4y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2(x+2y).\log_2(2x-4y)$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Theo giả thiết, ta có $(x-2y)(x+2y)=1$ suy ray $x-2y=\frac{1}{x+2y}$.

Vì vậy $P=\log_2(x+2y).\log_2\frac{2}{x+2y}=\log_2(x+2y)\left[1-\log_2(x+2y)\right]$

$=-\left[\log_2(x+2y)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=\frac{1}{x+2y}\\ \log_2(x+2y)=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=\sqrt{2}\\ x-2y=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2\sqrt{2}}\\ y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\end{cases}$.

Câu 166: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2(x-y)^2$ là:

A. $\max P=3\log_2 2$ **B.** $\max P=\log_2 12$ **C.** $\max P=12$ **D.** $\max P=16$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ $x^2+2xy+3y^2=4$. Suy ra: Nếu $y=0$ thì $x=\pm2\Rightarrow P=2$

Nếu $y\ne0$. Ta có:

$$P=\log_2(x-y)^2\Leftrightarrow 4.(x-y)^2=4.2^P\Rightarrow\frac{4.2^P}{4}=\frac{4(x-y)^2}{x^2+2xy+3y^2}=\frac{4\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}+3}$$

Đặt $t=\frac{x}{y},t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2^P=\frac{4t^2-8t+4}{t^2+2t+3}\Leftrightarrow 2^P\left(t^2+2t+3\right)=4t^2-8t+4$

$\Leftrightarrow\left(2^P-4\right)t^2+\left(2^P+8\right)t+3.2^P-4=0$. (Xét $P\ne4$)

Để phương trình có nghiệm: $\Delta'\ge0\Leftrightarrow\left(2^P+4\right)^2-\left(2^P-4\right)\left(3.2^P-4\right)\ge0$

$\Leftrightarrow -2.\left(2^P\right)^2+24.2^P\geq 0\Leftrightarrow 0\leq 2^P\leq 12\Rightarrow P\leq \log_2 12$. Vậy max của P là $\log_2 12$.

Câu 167: Cho các số thực $x_1,x_2,...,x_n$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+...+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right).$$

A. $2n$. **B.** n. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\left(x_k-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow x_k^2\geq x_k-\frac{1}{4},\forall x_k\in\left(\frac{1}{4};1\right)$ do đó với cơ số $0<x_k<1$ ta có

$P\geq \log_{x_1}x_2^2+\log_{x_2}x_3^2+...+\log_{x_n}x_1^2=2\left(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+...+\log_{x_n}x_1\right)$

$\geq 2.n\sqrt[n]{\log_{x_1}x_2.\log_{x_2}x_3...\log_{x_n}x_1}=2n$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{2}$.

Câu 168: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a^3>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab).\log_b a}{3\left(\log_a b-1\right)^2+8}$.

A. $e^{\frac{1}{8}}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $e^{\frac{1}{4}}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $P=\dfrac{\log_a(ab)}{\log_a b.\log_a\frac{a^3}{b}\left(3\left(\log_a b-1\right)^2+8\right)}=\dfrac{\log_a b+1}{\log_a b.\left(3-\log_a b\right)\left(3\left(\log_a b-1\right)^2+8\right)}$.

Đặt $x=\log_a b$ $(0<x<3)$. Ta có $P=f(x)=\dfrac{x+1}{x(3-x)\left(3x^2-6x+11\right)}$.

Suy ra $\ln f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\ln(3-x)-\ln\left(3x^2-6x+11\right)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{6(x-1)}{3x^2-6x+11}=\dfrac{(x-1)\left(9x^3-9x^2-25x+33\right)}{x(x+1)(3-x)\left(3x^2-6x+11\right)}$.

Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)\left(9x^3-9x^2-25x+33\right)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;3)$.

Suy ra $P_{\min}=\min\limits_{(0;3)}f(x)=f(1)=\frac{1}{8}$.

Câu 169: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a\left(\dfrac{a^2+4b^2}{4}\right)+\dfrac{1}{4\log_{ab}b}$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S=\log_a\left(\dfrac{a^2+4b^2}{4}\right)+\dfrac{1}{4\log_{ab}b}\geq \log_a(ab)+\frac{1}{4}\log_b(ab)=\frac{5}{4}+\log_a b+\frac{1}{4}\log_b a$.

Vậy $S\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\log_a b.\frac{1}{4}\log_b a}=\frac{9}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=4b^2\\ \log_a b=\frac{1}{4}\log_b a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$.

Câu 170: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Biết biểu thức $P = \log_a\left(\frac{3b-1}{4a^3}\right) + 12\log^2_{\frac{b}{a}} a$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $a = b^m$. Tính $T = M + m$.

A. $T = 15$. **B.** $T = 12$. **C.** $T = \frac{37}{3}$. **D.** $T = \frac{28}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $(2b-1)^2(b+1) \ge 0 \Rightarrow 3b - 1 \le 4b^3 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3} \le \frac{b^3}{a^3}$.

Đặt $x = \log_a b \ (x > 1)$ với mọi $0 < b < a < 1$.

$$P \ge \log_a \frac{b^3}{a^3} + 12\left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}}\right)^2 = 3\log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = 3x - 3 + \frac{12}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{12}{(x-1)^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x-1).\frac{3}{2}(x-1).\frac{12}{(x-1)^2}} = 9.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) = \frac{12}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \log_a b = 3 \Leftrightarrow b = a^3 \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{3}}$.

Vậy $M = 9, m = \frac{1}{3}$. Vậy $T = \frac{28}{3}$.

Câu 171: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\log_a b^2\right)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ là $m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}$ với m, n, p là các số nguyên. Tính $T = m + n + p$.

A. $T = -1$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -14$. **D.** $T = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta biến đổi đưa về cơ số là a như sau: $\log_a b^2 = 2\log_a b$ và

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{b}{a} = \frac{1}{2}\frac{\log_a \frac{b}{a}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\log_a b - 1}{2\left(\frac{1}{2}\log_a b - 1\right)} = \frac{\log_a b - 1}{\log_a b - 2}$$

Đặt $t = \log_a b \ (0 < t < 1)$ với mọi $a > b > 1$.

Vì vậy $S = f(t) = 4t^2 + 6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \ge \min\limits_{(0,1)} f(t) = f\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2\left(1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right)$.

Vậy $m = 2, n = 16, p = -32 \Rightarrow T = -14$.

Câu 172: Cho các số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{a^2}(a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $1 - 2\sqrt{3}$. **B.** $1 - 2\sqrt{2}$. **C.** $1 + 2\sqrt{3}$. **D.** $1 + 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $P = \frac{1}{2}\log_a(a^2 b) + 6\log_b a = \frac{\log_a b + 2}{2} + \frac{6}{\log_a b} = 1 + \left(\frac{1}{2}\log_a b + \frac{6}{\log_a b}\right)$.

Với $a > 1 > b > 0 \Rightarrow \log_a b < 0$ do đó

$$P = 1 + \left(\left(-\frac{1}{2}\log_a b\right) + \left(-\frac{6}{\log_a b}\right)\right) \le 1 - 2\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\log_a b\right)\left(-\frac{6}{\log_a b}\right)} = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Câu 173: Cho hai số thực dương a,b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\dfrac{4ab}{a+4b}\right)+\log_b(ab)$.

A. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\dfrac{4ab}{a+4b}\le\dfrac{4ab}{2\sqrt{a.4b}}=\sqrt{ab}$ và cơ số $0<a<1$ nên $\log_a\left(\dfrac{4ab}{a+4b}\right)\ge\log_a\sqrt{ab}=\dfrac{1+\log_a b}{2}$.

Vì vậy $P\ge\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\log_a b+\log_b a\right)\ge\dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_a b.\log_b a}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=4b\\ \dfrac{1}{2}\log_a b=\log_b a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4b\\ b=a^{\sqrt{2}}\end{cases}$.

Câu 174: Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$. Khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a+b+c$ là

A. 3. **B.** $3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trắc nghiệm: Biểu thức P đạt được giá trị lớn nhất tại các điểm biên của đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$ và do a,b,c có vai trò bình đẳng nên ta được $a=b=1,c=2\ \Rightarrow a+b+c=4$

Tự luận: + Đặt $x=\log_2 a, y=\log_2 b, z=\log_2 c\Rightarrow x,y,z\in[0;1]$ và $x^3+y^3+z^3\le 1$

Ta được $P=\left(2^x\right)^3+\left(2^y\right)^3+\left(2^z\right)^3-3x.2^x-3y.2^y-3z.2^z$

+ Ta chứng minh được $2^x\le x+1,\ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow 2^x-x-1\le 0$

Và khi $A+B+C\ge 0$ thì $A^3+B^3+C^3\le 3ABC$

Khi đó $\left(2^x\right)^3+(-x)^3+(-1)^3\le 3x.2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^3-3x.2^x\le x^3+1$

Tương tự $\left(2^y\right)^3-3y.2^y\le y^3+1$ và $\left(2^z\right)^3-3z.2^z\le z^3+1\Rightarrow P\le\left(x^3+y^3+z^3\right)+3=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(0;0;1)$ và các hoán vị của nó

$\Rightarrow(a;b;c)=(1;1;2)$ và các hoán vị của nó $\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 175: Số nguyên tố dạng $M_p=2^p-1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mec-xen. Số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

A. 2098960 chữ số **B.** 2098961 chữ số **C.** 6972593 chữ số **D.** 6972592 chữ số

Hướng dẫn giải

Chọn B. ***Đầu tiên ta cần biết:*** Số tự nhiên A có n chữ số thì $n=\left[\log(A)\right]+1$

Ta cần tính $2^{6972593}-1$ có bao nhiêu chữ số, ta thấy rằng $2^{6972593}-1$ và $2^{6972593}$ chắc chắn có cùng số chữ số, nó giống như là 213 và 213−1 có cùng 3 chữ số vậy.

Từ lập luận trên ta đi tính số chữ số của $2^{6972593}$ bằng công thức: $n=\left[\log(A)\right]+1$.

Áp dụng công thức ta được: $n=\left[\log 2^{6972593}\right]+1=\left[6972593.\log 2\right]+1=2098960$.

CHUYÊN ĐỀ 4: HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Hàm số mũ: $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$.

1.1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

1.2. Tập giá trị: $T = (0, +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mũ mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.

1.3. Tính đơn điệu:

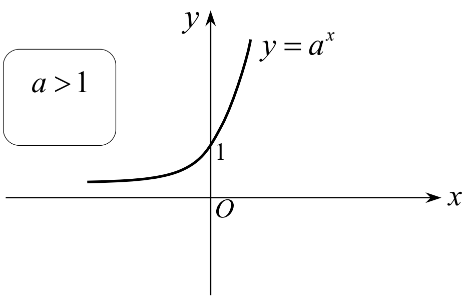
+ Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó ta luôn có: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

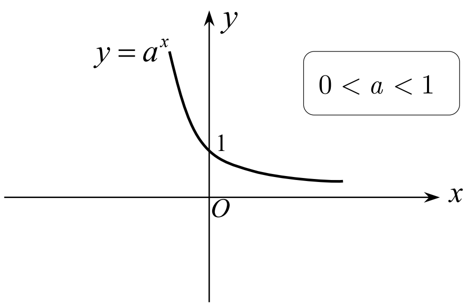
+ Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó ta luôn có: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

1.4. Đạo hàm:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a^x)' = a^x.\ln a \Rightarrow (a^u)' = u'.a^u.\ln a \\ (e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u.u' \\ (\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}. \end{array}}$$

1.5. Đồ thị: Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang.





2. Hàm số logarit: $y = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

2.1. Tập xác định: $D = (0, +\infty)$.

2.2. Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải phương trình logarit mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.

2.3. Tính đơn điệu:

+ Khi $a > 1$ thì $y = \log_a x$ đồng biến trên D, khi đó nếu: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

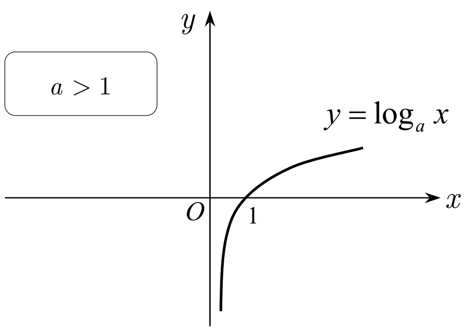
+ Khi $0 < a < 1$ thì $y = \log_a x$ nghịch biến trên D, khi đó nếu

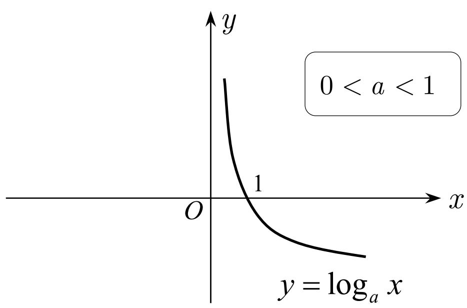
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

2.4. Đạo hàm:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a} \\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ (x > 0) \Rightarrow (\ln |u|)' = \dfrac{u'}{u} \end{array}} \Rightarrow \boxed{(\ln^n |u|)' = n \cdot \dfrac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u|}$$

2.5. Đồ thị: Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng.





B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3(2x+1)$.

A. $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=\log_3(2x+1)$ có nghĩa khi $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$. Vậy TXĐ là $D=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3(x^2+3x+2)$.

A. $D=[-2,-1]$. **B.** $D=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$.

C. $D=(-2,-1)$. **D.** $D=(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện $x^2+3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-1 \end{array}\right.$.

Câu 3: Hàm số $y=\log_2(-x^2+5x-6)$ có tập xác định là:

A. $(2;3)$ **B.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số có nghĩa khi và chỉ khi $-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow 2<x<3$.

Câu 4: Cho $a>0,\ a\neq 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là khoảng $(0;+\infty)$.

B. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

C. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là tập $\mathbb{R}$.

D. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\ln(x-1)+\ln(x+1)}$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;\sqrt{2})$. **C.** $\varnothing$. **D.** $[\sqrt{2};+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ \ln[(x-1)(x+1)]\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-1\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\leq -\sqrt{2} \vee x\geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq\sqrt{2}.$

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(5^{x+2}-125)$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện để hàm số xác định là: $5^{x+2}-125>0 \Leftrightarrow 5^{x+2}>5^3 \Leftrightarrow x>1$.

Câu 7: Hàm số $y=(x^2-16)^{-5}-\ln(24-5x-x^2)$ có tập xác định là

A. $(-8;-4)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$. **C.** $(-8;3)\setminus\{-4\}$. **D.** $(-4;3)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định của hàm số $y=(x^2-16)^{-5}-\ln(24-5x-x^2)$ là:

$\begin{cases} x^2-16\neq 0 \\ 24-5x-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 4 \\ -8<x<3 \end{cases}$. Vậy tập xác định là: $D=(-8;3)\setminus\{-4\}$.

Câu 8: Tập xác định $y=\sqrt{-2x^2+5x-2}+\ln\dfrac{1}{x^2-1}$ là:

A. $D=(1;2]$ **B.** $D=[1;2]$ **C.** $D=(-1;1)$ **D.** $D=(-1;2)$

Chọn A. Hàm số $y=\sqrt{-2x^2+5x-2}+\ln\dfrac{1}{x^2-1}$ xác định khi

$$\begin{cases} -2x^2+5x-2\geq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\leq x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow 1<x\leq 2$$

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3\dfrac{10-x}{x^2-3x+2}$.

A. $D=(-\infty;1)\cup(2;10)$ **B.** $D=(1;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;10)$ **D.** $D=(2;10)$

Chọn A. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{10-x}{x^2-3x+2}>0 \Leftrightarrow x<1$ hoặc $2<x<10$.

Tập xác định $D=(-\infty;1)\cup(2;10)$

Câu 10: Cho tập $D=(3;4)$ và các hàm số $f(x)=\dfrac{2017}{\sqrt{x^2-7x+12}}$, $g(x)=\log_{x-3}(4-x)$, $h(x)=3^{x^2-7x+12}$

D là tập xác định của hàm số nào ?

A. $f(x)$ và $f(x)+g(x)$ **B.** $f(x)$ và $h(x)$

C. $g(x)$ và $h(x)$ **D.** $f(x)+h(x)$ và $h(x)$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Sử dụng điều kiện xác định của các hàm số.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{(x-2)^2}+\log_2(8-x^2)$ là

A. $D=(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})\setminus\{2\}$ **B.** $D=(2;8)$. **C.** $D=(2\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $D=(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ 8-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $D=(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})\setminus\{2\}$

Câu 12: Hàm số nào trong các hàm số sau có tập xác định $D=(-1;3)$?

A. $y=\sqrt{x^2-2x-3}$. **B.** $y=2^{x^2-2x-3}$.

C. $y=\log_2(x^2-2x-3)$. **D.** $y=(x^2-2x-3)^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ xác định khi $x^2-2x-3\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3 \Rightarrow D=[-1;3]$ (Loại A).

Hàm số $y=2^{x^2-2x-3}$ và $y=(x^2-2x-3)^2$ xác định trên $D=\mathbb{R}$.(Loại B,D).

Hàm số $y=\log_2(x^2-2x-3)$ xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow -1<x<3 \Rightarrow D=(-1;3)$

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2(x^3-8)^{1000}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $D=(2;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;2)$. **D.** $D=(-2;+\infty)\cup(-\infty;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số có nghĩa khi $\left(x^3-8\right)^{1000}>0 \Leftrightarrow x^3-8\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Vậy TXĐ là $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Câu 14: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log\left(x^2+3x\right)-1}$.

A. $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x>0 \\ \log\left(x^2+3x\right)\geq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x>0 \\ x^2+3x\geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+3x\geq 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -5 \end{array}\right.$$

Câu 15: Tập xác định của hàm số $\log_2\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$ là

A. $\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Hàm số có nghĩa khi $\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}>0 \Leftrightarrow 3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}$.

Vì $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-x+1>0 \end{cases}, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$TXĐ $D=\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-\ln\left(x^2-1\right)$.

A. $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2)$. **B.** $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. **C.** $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)$. **D.** $(1;\ 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $\begin{cases} 2-x>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<-1\cup x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2)$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2-2mx+4)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$?

A. $-2<m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$ **C.** $m>-2$ **D.** $-2\leq m\leq 2$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2mx+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1-x}}+\log_3\sqrt{x-m}$ xác định trên $(2;3)$.

A. $1\leq m\leq 2$ **B.** $1<m\leq 2$ **C.** $-1<m<2$ **D.** $-1\leq m\leq 2$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1-x>0 \\ x-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2m+1 \\ x>m \end{cases}$

Suy ra, tập xác định của hàm số là $D=(m;2m+1)$, với $m\geq -1$.

Hàm số xác định trên $(2;3)$ suy ra $(2;3)\subset D \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 2 \\ 2m+1\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 2 \\ m\ge 1\end{cases}$

Câu 19: Tìm tập xác định hàm số sau: $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3-2x-x^2}{x+1}}$.

A. $D=\left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$. **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};\ 1\right)$. **D.** $D=\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};\ 1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số xác định khi: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3-2x-x^2}{x+1}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-2x-x^2}{x+1}>0 \\ \dfrac{3-2x-x^2}{x+1}\le 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1) \\ x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2};-1\right)\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$$

Câu 20: Tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2-x}{x+2}}$ là

A. $[0;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-2)\cup[0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. y xác định khi

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2-x}{x+2}\ge 0 \\ \dfrac{2-x}{x+2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+2}\le 1 \\ \dfrac{2-x}{x+2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty) \\ x\in(-2;2)\end{cases} \Leftrightarrow x\in[0;2)$$

Câu 21: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ khi

A. $m>\dfrac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **D.** $m<\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ khi $4^x-2^x+m>0,(1)$, $\forall x\in R$.

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Khi đó (1) trở thành $t^2-t+m>0 \Leftrightarrow m>-t^2+t$, $\forall t\in(0;+\infty)$

Đặt $f(t)=-t^2+t$. ycbt xảy ra khi $m>\underset{(0;+\infty)}{Max}\, f(t)=\dfrac{1}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\log_2\left(x^2-4mx+3m^2+2m\right)$. Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ là

A. $S=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

C. $S=[0;2]$. **D.** $S=(0;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện để hàm số xác định $x^2-4mx+3m^2+2m>0$.

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-4mx+3m^2+2m>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m^2-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$.

Câu 23: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\left(x^2-2x+3m\right)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$?

A. $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\dfrac{2}{3};10\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\left(x^2-2x+3m\right)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$x^2-2x+3m>1,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2x+3m-1>0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 1-3m+1<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{2}{3}$

Câu 24: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_{\sqrt{5}}(x-m)$ xác định với mọi $x\in(-3;+\infty)$?

A. $m>-3$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m\ge -3$.

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow x-m>0 \Leftrightarrow x>m$.

Để $f(x)$ xác định với mọi $x\in(-3;+\infty)$ thì $m\le -3$ Ta chọn đáp án **C.**

Câu 25: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)(x+2m)$ xác định với mọi $x\in[-4;2]$?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\ge\dfrac{3}{2}$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge -1$.

Thay $m=2$ vào điều kiện $(3-x)(x+2m)>0$ ta được $(3-x)(x+4)>0 \Leftrightarrow x\in(-4;3)$ mà $[-4;2]\not\subset(-4;3)$ nên các đáp án B, A, D loại. Ta chọn đáp án đúng là **C.**

Câu 26: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_3\sqrt{(m-x)(x-3m)}$ xác định với mọi $x\in(-5;4]$?

A. $m\ne 0$. **B.** $m>\dfrac{4}{3}$. **C.** $m<-\dfrac{5}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

- Thay $m=2$ vào điều kiện $(m-x)(x-3m)>0$ ta được $(2-x)(x-6)>0 \Leftrightarrow x\in(2;6)$ mà $(-5;4]\not\subset(2;6)$ nên các đáp án B, A loại.

- Thay $m=-2$ vào điều kiện $(m-x)(x-3m)>0$ ta được $(-2-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow x\in(-6;-2)$ mà $(-5;4]\not\subset(-6;-2)$ nên các đáp án C loại. Do đó Ta chọn đáp án đúng là **D.**

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ **B.** $m\in[1;+\infty)$ **C.** $m\in(-4;1)$ **D.** $m\in(1;+\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\log_3 x$, khi đó $x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ trở thành $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số

$y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow mt^2-4t+m+3=0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4-m^2-3m<0 \Leftrightarrow m<-4 \vee m>1$.

TÍNH ĐẠO HÀM HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(4x+1)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{(4x+1)\ln 3}$. **B.** $y'=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{\ln 3}{4x+1}$. **D.** $y'=\dfrac{4\ln 3}{4x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Với $x>-\dfrac{1}{4}$. Áp dụng công thức $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ ta có $y'=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

Câu 29: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2017}(x^2+1)$.

A. $y'=\dfrac{2x}{2017}$

B. $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2017}$

C. $y'=\dfrac{1}{(x^2+1)\ln 2017}$

D. $y'=\dfrac{1}{(x^2+1)}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $y'=\left(\log_{2017}(x^2+1)\right)'=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 2017}=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2017}$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\ln(4x-x^2)$. Chọn khẳng định đúng?

A. $f'(3)=-1,5$. **B.** $f'(2)=0$. **C.** $f'(5)=1,2$. **D.** $f'(-1)=-1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Tập xác định $D=(0;4)$. Loại **C**,**D.**

$f'(x)=\dfrac{4-2x}{4x-x^2}\Rightarrow f'(3)=\dfrac{-2}{3}$ loại **A.** $f'(2)=0$.

Câu 31: Đạo hàm của hàm số $y=\log_8(x^2-3x-4)$ là:

A. $\dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$. **B.** $\dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 2}$. **C.** $\dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)}$. **D.** $\dfrac{1}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $y'=\dfrac{(x^2-3x-4)'}{(x^2-3x-4)\ln 8}=\dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số $y=\log(2\sin x-1)$ trên tập xác định là:

A. $y'=\dfrac{-2\cos x}{2\sin x-1}$.

B. $y'=\dfrac{2\cos x}{2\sin x-1}$.

C. $y'=\dfrac{2\cos x}{(2\sin x-1)\ln 10}$.

D. $y'=\dfrac{-2\cos x}{(2\sin x-1)\ln 10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $y=\log(2\sin x-1)\Rightarrow y'=\dfrac{2\cos x}{(2\sin x-1)\ln 10}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=2xe^x+3\sin 2x$ .Khi đó $y'(0)$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $y'=2(e^x+xe^x)+6\cos 2x\Rightarrow y'(0)=8$ $y=2xe^x+3\sin 2x$

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(x+1)-2\ln(x-1)+2x$ tại điểm $x=2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3\ln 3}+2$. **C.** $\frac{1}{3\ln 3}-1$. **D.** $\frac{1}{3\ln 3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Sử dụng công thức $(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}$, ta được

$$y'=\frac{1}{(x+1)\ln 3}-2.\frac{1}{x-1}+2\Rightarrow y'(2)=\frac{1}{3\ln 3}-2+2=\frac{1}{3\ln 3}.$$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\ln(x^4+1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Ta có: $f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}\Rightarrow f'(1)=2$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\ln(4x-x^2)$. Chọn khẳng định đúng.

A. $f'(3)=-1,5$. **B.** $f'(2)=0$. **C.** $f'(5)=1,2$. **D.** $f'(-1)=-1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $f'(x)=\frac{4-2x}{4x-x^2}$; $f'(2)=0$.

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log(\ln 2x)$.

A. $y'=\frac{2}{x\ln 2x.\ln 10}$. **B.** $y'=\frac{1}{x\ln 2x.\ln 10}$. **C.** $y'=\frac{1}{2x\ln 2x.\ln 10}$. **D.** $y'=\frac{1}{x\ln 2x}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $y'=\frac{(\ln 2x)'}{\ln 2x.\ln 10}=\frac{1}{x.\ln 2x.\ln 10}$.

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

A. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **B.** $y'=\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

C. $y'=\frac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **D.** $y'=\frac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng công thức: $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_5|2x+1|$ ta được kết quả

A. $y'=\frac{1}{|2x+1|\ln 5}$. **B.** $y'=\frac{1}{(2x+1)\ln 5}$. **C.** $y'=\frac{2}{(2x+1)\ln 5}$. **D.** $y'=\frac{2}{|2x+1|\ln 5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $y'=\frac{2}{(2x+1)\ln 5}$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\frac{x-1}{x+2}$

A. $y'=\frac{-3}{(x-1)(x+2)^2}$. **B.** $y'=\frac{-3}{(x-1)(x+2)}$.

C. $y'=\frac{3}{(x-1)(x+2)^2}$. **D.** $y'=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương pháp: Áp dụng công thức: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Cách giải: $I=\left(\ln\dfrac{x-1}{x+2}\right)'=\dfrac{\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)'}{\dfrac{x-1}{x+2}};\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)'=\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{\frac{2}{3}}|x|$

A. $y'=\dfrac{\ln 3}{x\ln 2}$ **B.** $y'=\dfrac{\ln 3}{|x|\ln 2}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{|x|(\ln 2-\ln 3)}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{x(\ln 2-\ln 3)}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có : $y'=\dfrac{1}{x\ln\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{x(\ln 2-\ln 3)}$. **Nhớ:** $\left(\log_a|u|\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y'=\dfrac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}.2^{\sqrt{1-x}}$. **B.** $y'=\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}}.2^{\sqrt{1-x}}$. **C.** $y'=\dfrac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$. **D.** $y'=\dfrac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $y'=2^{\sqrt{1-x}}.\ln 2.\left(\sqrt{1-x}\right)'=.2^{\sqrt{1-x}}.\ln 2.\dfrac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}$. Hay $y'=\dfrac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}.2^{\sqrt{1-x}}$

Câu 43: Đạo hàm của hàm số $y=(2x^2-5x+2)e^x$ là:

A. xe^x. **B.** $\left(2x^2-x-3\right)e^x$. **C.** $2x^2e^x$. **D.** $(4x-5)e^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\left[\left(2x^2-5x+2\right)e^x\right]'=(4x-5)e^x+\left(2x^2-5x+2\right)e^x=(2x^2-x-3)e^x$

Câu 44: Cho hàm số $y=\dfrac{2^x+3^x}{4^x}$. Giá trị $y'(0)$ bằng:

A. $\ln\dfrac{3}{8}$ **B.** 1 **C.** $\ln\dfrac{8}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Phân tích:** Ta thấy với bài toán này ta có thể chuyển nhanh hàm số về dạng

$$y=\frac{2^x+3^x}{4^x}=\frac{1}{2^x}+\left(\frac{3}{4}\right)^x$$

Lời giải: Ta có $y=\dfrac{2^x+3^x}{4^x}=\dfrac{1}{2^x}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

Khi đó $y'=\left(\dfrac{1}{2^x}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\right)'=\dfrac{1}{2^x}.\ln\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x.\ln\dfrac{3}{4}$

Với $x=0$ thì $y'(0)=\dfrac{1}{2^0}.\ln\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^0.\ln\dfrac{3}{4}=\ln\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{3}{4}=\ln\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}\right)=\ln\dfrac{3}{8}$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x\ln^2 x$, ta có $f'(e)$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{2}{e}$. **C.** $2e+1$. **D.** $2e$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f'(x)=\ln^2 x+2\ln x$, $f'(e)=\ln^2(e)+2\ln e=3$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+3}{9^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+3)\ln 3}{3^{2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+3)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+3)\ln 3}{3^{x^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+3)\ln 3}{3^{x^2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $y=\dfrac{x+3}{9^x}=(x+3).\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \Rightarrow y'=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+(x+3)\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\ln\dfrac{1}{9}$

$$=\frac{1+(x+3)\ln\frac{1}{9}}{9^x}=\frac{1-(x+3)\ln 9}{\left(3^2\right)^x}=\frac{1-(x+3)\ln 3^2}{3^{2x}}=\frac{1-2(x+3)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 47: Hàm số $y=2^{2x^2+x}$ có đạo hàm là

A. $y'=(4x+1)2^{2x^2+x}\ln 2$. **B.** $y'=2^{2x^2+x}\ln 2$.

C. $y'=(4x+1)2^{2x^2+x}\ln\left(2x^2+x\right)$. **D.** $y'=\left(2x^2+x\right)2^{2x^2+x}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $y'=\left(2^{2x^2+x}\right)'=2^{2x^2+x}\cdot\ln 2\cdot\left(2x^2+x\right)'=(4x+1)2^{2x^2+x}\ln 2$.

Câu 48: Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $(a^u)'=u'a^u\ln a$, với u là một hàm số. **B.** $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$.

C. $\left(e^x\right)'=e^x$. **D.** $(\ln u)'=\dfrac{u'}{2u}$, với u là một hàm số.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=e^x+e^{-x}$. Tính $y''(1)=?$

A. $e+\dfrac{1}{e}$. **B.** $e-\dfrac{1}{e}$. **C.** $-e+\dfrac{1}{e}$. **D.** $-e-\dfrac{1}{e}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Ta có: $y'=e^x-e^{-x}\Rightarrow y''=e^x+e^{-x}\Rightarrow y''(1)=e+\dfrac{1}{e}$.

Câu 50: Tính đạo hàm của hàm số $y=3^{6x+1}$.

A. $y'=3^{6x+2}.2$. **B.** $y'=(6x+1).3^{6x}$. **C.** $y'=3^{6x+2}.2\ln 3$. **D.** $y'=3^{6x+1}.\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $y=3^{6x+1}\Rightarrow y'=(6x+1)'\cdot 3^{6x+1}\ln 3=6\cdot 3^{6x+1}\ln 3=3^{6x+2}2\ln 3$

Câu 51: Tính đạo hàm của hàm số: $y=3^{2017x}$

A. $y'=2017\ln 3.3^{2017x}$. **B.** $y'=\dfrac{3^{2017}}{\ln 3}$. **C.** $y'=3^{2017}$. **D.** $y'=\ln 3.3^{2017x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $y=3^{2017x}=\left(3^{2017}\right)^x\Rightarrow y'=\left(3^{2017}\right)^x\ln\left(3^{2017}\right)=2017.3^{2017x}.\ln 3$.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y=(x+2)\ln^2(2x)$ là

A. $\ln^2(2x)+\dfrac{2x}{x+2}\ln(2x)$. **B.** $\ln^2(2x)+\dfrac{2x+2}{x}\ln(2x)$.

C. $\ln^2(2x)+\dfrac{2x+4}{x}\ln(2x)$. **D.** $\ln^2(2x)+\dfrac{x}{x+2}\ln 2x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Áp dụng công thức tính đạo hàm: $(u.v)' = u'.v + u.v'$

Ta có: $y' = \left[(x+2).\ln^2(2x)\right]' = (x+2)'.\ln^2(2x) + (x+2).\left[\ln^2(2x)\right]'$

$$= \ln^2(2x) + (x+2)\left[2\ln(2x).\frac{1}{x}\right] = \ln^2(2x) + \frac{2x+4}{x}\ln(2x).$$

Câu 53: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\log_2 x}{x}$ với $x > 0$.

A. $y' = \frac{1-\ln x}{x\ln x}$. **B.** $y' = \frac{1-\ln x}{x\ln 2}$. **C.** $y' = \frac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$. **D.** $y' = \frac{1-\ln x}{x^2\ln^2 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $y = \frac{\log_2 x}{x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x\ln 2}x - \log_2 x}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \frac{\ln x}{\ln 2}}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$

Câu 54: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y' = \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 55: Tính đạo hàm của hàm $y = x^x$ tại điểm $x = 2$ là

A. $y'(2) = 4\ln 2$. **B.** $y'(2) = 4\ln(2\mathrm{e})$. **C.** $y'(2) = 4$. **D.** $y'(2) = 2\ln(2\mathrm{e})$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $x > 0$, ta có: $y = x^x \Leftrightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Leftrightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Khi đó: $y'(2) = 4(\ln 2 + 1) = 4\ln(2e)$.

Câu 56: Đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(e^{\cos 2x} + 1\right)$ là

A. $y' = \frac{2e^{\cos 2x}\sin 2x}{e^{\cos 2x}+1}$ **B.** $y' = \frac{e^{\cos 2x}}{e^{\cos 2x}+1}$ **C.** $y' = \frac{2\sin 2x}{e^{\cos 2x}+1}$ **D.** $y' = -\frac{2e^{\cos 2x}\sin 2x}{e^{\cos 2x}+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y' = \frac{\left(e^{\cos 2x}+1\right)'}{e^{\cos 2x}+1} = \frac{-2\sin 2x.e^{\cos 2x}}{e^{\cos 2x}+1} \Rightarrow y' = \left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)' = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}}$.

Mà $\left(1+\sqrt{x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = \ln x$. Hãy tính $f(x) + f'(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

A. e. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f(x) + f'(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln x + \frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln x - \ln x = 0$$

Câu 58: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[5]{\ln^4 7x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $\dfrac{1}{5x\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$. **B.** $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$. **C.** $\dfrac{1}{35x\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$. **D.** $\dfrac{4}{5x\sqrt[5]{\ln 7x}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\sqrt[5]{\ln^4 7x}=(\ln 7x)^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y'=\dfrac{4}{5}\dfrac{1}{(\ln 7x)^{\frac{1}{5}}}(\ln 7x)'=\dfrac{4}{5x\sqrt[5]{\ln 7x}}$.

Câu 59: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$ là

A. $f'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

C. $f'(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}$. **D.** $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng công thức: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u};\left(e^u\right)'=e^u.u';\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)'}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}.\left(e^x+\frac{\left(e^{2x}+1\right)'}{2.\sqrt{e^{2x}+1}}\right)=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}.\left(e^x+\frac{2.e^{2x}}{2.\sqrt{e^{2x}+1}}\right).$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}.\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right).$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}.e^x.\left(1+\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right)=\frac{e^x.\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)}{\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)}.\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

VẬN DỤNG:

Câu 60: Cho hàm số $y=e^{3x}.\sin 5x$. Tính m để $6y'-y''+my=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$:

A. $m=-30$. **B.** $m=-34$. **C.** $m=30$. **D.** $m=34$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$y'=\left(e^{3x}\right)'.\sin 5x+e^{3x}.(\sin 5x)'=3e^{3x}.\sin 5x+5e^{3x}.\cos 5x=e^{3x}(3\sin 5x+5\cos 5x)$.

$y''=\left(e^{3x}\right)'.(3\sin 5x+5\cos 5x)+e^{3x}(3\sin 5x+5\cos 5x)'$.

$=9e^{3x}.\sin 5x+15e^{3x}\cos 5x+15e^{3x}\cos 5x-25e^{3x}.\sin 5x=30e^{3x}\cos 5x-16e^{3x}\sin 5x$.

Theo đề: $6y'-y''+my=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 18e^{3x}\sin 5x+30e^{3x}\cos 5x-30e^{3x}\cos 5x+16e^{3x}\sin 5x+m.e^{3x}.\sin 5x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 34e^{3x}.\sin 5x+me^{3x}.\sin 5x=0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m=-34$.

Câu 61: Hàm số $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C\,(a>0)$ là đạo hàm của hàm số nào sau?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$. **B.** $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}$. **C.** $\sqrt{x^2+a}$. **D.** $x+\sqrt{x^2+a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng công thức: $(\ln u')=\dfrac{u'}{u}\Rightarrow F'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

Câu 62: Cho hàm số $y = \ln\frac{1}{x+1}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $xy' + 1 = e^{y}$. **B.** $xe^{y} + y' = 0$. **C.** $xy' + e^{y} = 1$. **D.** $xe^{y} + y' = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $y = \ln\frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x+1}$. $x.y' + 1 = -\frac{x}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} = e^{\ln\frac{1}{x+1}} = e^{y}$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x) = \ln\left|\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right|$. Khi đó tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A. $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sqrt{3}$.. **B.** $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.. **C.** $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4$.. **D.** $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$..

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} < 0$ nên chọn $f(x) = \ln\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\right)'}{\left(\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\right)} = \frac{-2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \frac{-2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}.$$

Do đó $f''(x) = \left(\frac{2}{\cos 2x}\right)' = \frac{4\sin 2x}{\cos^2 2x}$. Vậy $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sqrt{3}$.

TÍNH ĐƠN DIỆU, TIỆM CẬN, CỰC TRỊ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU:

Câu 64: Cho a là một số thực dương khác 1. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

(a) Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $D = (0; +\infty)$.

(b) Hàm số $y = \log_a x$ là hàm đơn điệu trên khoảng $(0; +\infty)$.

(c) Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đồ thị hàm số $y = a^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

(d) Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nhận Ox là một tiệm cận.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 65: Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục Oy.
D. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Điều kiện: $x > 0$ nên TXĐ $D = (0; +\infty)$.

Câu 66: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$.

B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm số $y=\log_2 x$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 67: Cho hàm số $y=\log_{\frac{1}{5}} x$. Khẳng định nào sau đây sai

A. Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

B. $y' = \dfrac{-1}{x\ln 5}$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số $y=\log_{\frac{1}{5}} x$. Do đó

- Tập xác định $D=(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ A sai.
- $y' = \dfrac{-1}{x\ln 5}$ $\Rightarrow$ B đúng.
- Cơ số $a=\dfrac{1}{5}<1$ $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định $\Rightarrow$ C đúng.
- Hàm số logarit nhận trục Oy làm tiệm cận đứng $\Rightarrow$ D đúng.

Câu 68: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=\log_a x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0,+\infty)$.

B. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ với $0<a\neq 1$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

C. Hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=\log_a x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0,+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $y=\log_{\frac{1}{a}} x=\log_{a^{-1}} x=-\log_a x \Rightarrow$ Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ với $0<a\neq 1$, đối xứng với nhau qua trục hoành.

Câu 69: Giá trị thực của a để hàm số $y=\log_{2a+3} x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. $a>1$. **B.** $a>-1$. **C.** $0<a<1$. **D.** $0<a\neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có hàm số $y=\log_{2a+3} x$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow 2a+3>1\Leftrightarrow a>-1$.

Câu 70: Đồ thị hàm số nào sau đây đối xứng với đồ thị hàm số $y=10^{-x}$ qua đường thẳng $y=x$.

A. $y=\log x$. **B.** $\ln x$. **C.** $y=-\log x$. **D.** $y=10^x$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Đồ thị hàm số $y=a^x, y=\log_a x\,(0<a\neq 1)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Suy ra $y=-\log x$.

Câu 71: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y=a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C. Đồ thị của các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

Câu 72: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\log_2(1-x)$. **B.** $y=2017^{2-x}$. **C.** $y=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$. **D.** $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ có TXĐ $D=(-\infty;3)$

Ta có $y'=\dfrac{(3-x)'}{(3-x).\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{-1}{(3-x).\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}>0,\forall x<3$

Câu 73: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\log_{\frac{e}{\pi}} x$. **B.** $y=\log_{\sqrt{3}} x$. **C.** $y=\log_2 x$. **D.** $y=\log_\pi x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Dựa vào tính chất hàm số logarit nghịch biến khi cơ số lớn hơn không và bé hơn 1

Câu 74: Cho hàm số $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên trên $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $y'=(2x-2)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}\ln\dfrac{3}{4}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y		↗	$\dfrac{3}{4}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên trên $(-\infty;1)$.

Câu 75: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **D.** $y=(0,5)^x$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ khi $a>1$.

Câu 76: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4^x}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai** ?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Vì $y=\frac{1}{4^x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$. Có $a=\frac{1}{4}<1$.

Nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Câu 77: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến?

A. $y=\left(\frac{\pi}{3+\sqrt{5}}\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$. **C.** $y=\left(\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^x$. **D.** $y=3^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y=3^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^x=\left(\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right)^x$ có cơ số $\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}>1$ nên là hàm số đồng biến.

Câu 78: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$. **C.** $y=\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^x$. **D.** $y=\left(\frac{e+1}{\pi}\right)^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Cơ số $\frac{e+1}{\pi}>1$ nên hàm số mũ $y=\left(\frac{e+1}{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 79: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $y=x+\log_2 x$. **B.** $y=x+\log_2\frac{1}{x}$. **C.** $y=x^2+\log_2 x$. **D.** $y=-\log_2 x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=-\log_2 x$ có $y'(x)=-\frac{1}{x\ln 2}<0,\forall x>0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 79: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$. **B.** $y=\frac{1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^x}$. **C.** $y=\frac{1}{5^x}$. **D.** $y=\left(\frac{e}{3}\right)^x$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a>1$.

Ta có $\frac{1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}\approx 2,441>1$ nên hàm số $y=\frac{1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^x}=\left(\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 80: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=x^2+\log_2 x$. **C.** $y=x+\log_2 x$. **D.** $y=\log_2\frac{1}{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta thấy hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên **A, B, C** loại.

Kiểm tra $y=\log_2\frac{1}{x}$ có $y'=-\frac{1}{x\ln 2}<0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Câu 81: Hàm số $y=\log_2\left(x^3-4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. TXĐ: $D=(-2;0)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3x^2-4}{(x^3-4x)\ln 2}$, $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-4}{(x^3-4x)\ln 2}=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(loai) \\ x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

Vậy y' đổi dấu từ dương sang âm qua $x_0=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ nên hàm số có một cực trị.

Câu 82: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ có tọa độ điểm cực đại là $(a;b)$. Khi đó ab bằng

A. e. **B.** $2e$. **C.** 1. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tập xác định $D=(0;+\infty)$. Ta có $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=e$ và $y''(e)<0$.

Nên tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $\left(e;\dfrac{1}{e}\right) \Rightarrow a.b=1$.

Câu 83: Cho các hàm số $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=\dfrac{1}{2x}$, $y=x^2$. Chọn phát biểu **sai**.

A. Có 2 đồ thị có tiệm cận ngang. **B.** Có 2 đồ thị có tiệm cận đứng.
C. Có 2 đồ thị có chung một đường tiệm cận. **D.** Có đúng 2 đồ thị có tiệm cận.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Hàm số $y=2^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Hàm số $y=\log_2 x$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{2x}$ có.

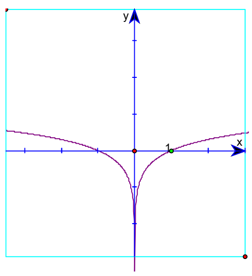
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x}$ có tiệm cận đứng $x=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó đáp án A, B, C đúng và D sai.

Câu 84: Cho hàm số $y=\log|x|$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phương trình $\log|x|=m$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.
C. Hàm số xác định với $\forall x\neq 0$.
D. $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$ $(x\neq 0)$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

+ Ta có: $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$ nên $y'>0 \Leftrightarrow x>0$ và $y'<0 \Leftrightarrow x<0$ nên B sai.

+ Ta có: $y=\log|x|$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nên đồ thị gồm 2 nhánh (xem hình) nên phương trình $\log|x|=m$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Câu 85: Hàm số $y=\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện $x > -2$. Ta có $y' = \frac{x-1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (1;+\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 86: Hàm số $y = \log_{0,5}\left(-x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: ĐK: $-x^2+2x>0 \Leftrightarrow x\in(0;2)$. $y' = \frac{-2x+2}{\left(-x^2+2x\right)\ln 0,5} = \frac{2x-2}{\left(-x^2+2x\right)\ln 2}$

$y'>0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{\left(-x^2+2x\right)\ln 2} > 0 \xrightarrow{dk} 2x-2>0 \Rightarrow x>1 \xrightarrow{dk} x\in(1;2)$

Cách 2: *sử dụng máy tính*

MODE 7, nhập hàm số, kiểm tra trên các khoảng ở các đáp án tương ứng, nếu giá trị của cột $f(x)$ tăng dần tức là hàm số đồng biến.

Câu 87: Cho các số thực a,b,c thỏa $0<a\neq 1$ và $b>0, c>0$. Khẳng định nào sau đây không đúng ?

A. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ **B.** $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

C. $a^{f(x)}b^{g(x)} = c \Leftrightarrow f(x) + g(x)\log_a b = \log_a c$ **D.** $\log_a f(x) < g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^{g(x)}$

Hướng dẫn giải

$\log_a f(x) < g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^{g(x)}$ chỉ đúng khi cơ số $a>1$.

Vậy với $0<a\neq 1$ thì đẳng thức $\log_a f(x) < g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^{g(x)}$ sai.

Câu 88: Hàm số $y = \left(x^2-2x+1\right)e^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y = \left(x^2-2x+1\right)e^{2x} \Rightarrow y' = 2\left(x^2-2x+1\right)e^{2x} + (2x-2)e^{2x} \Rightarrow y' = 2\left(x^2-x\right)e^{2x}$

Hàm số nghịch biến khi $y'<0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-x\right)e^{2x} < 0 \Leftrightarrow x^2-x \Leftrightarrow 0<x<1$.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$. Tìm khẳng định **sai**.

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

C. Hàm số không có cực trị.

D. $f(x)$ luôn nhỏ hơn 1 với mọi x dương.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$ có TXĐ $= \mathbb{R}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ **A** đúng.

$y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không cắt trục Ox $\Rightarrow$ **B** sai.

$y' = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x\right]' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x .\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \Rightarrow y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số không có cực trị

$\Rightarrow$ **C** đúng.

$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x > \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^0 \Leftrightarrow y > 1, \forall x > 0 \Rightarrow$ **D** đúng.

Câu 90: Tìm hoành độ các điểm cực đại của hàm số $y = e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$.

A. $x_{CĐ} = 1$. **B.** Không có cực đại. **C.** $x_{CĐ} = \dfrac{2}{3}$. **D.** $x_{CĐ} = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = \left(3x^2 - 5x + 2\right)e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$2/3$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{2}{3}$.

Câu 91: Hàm số $y = \ln\left(-x^2 + 9\right)$ đồng biến trên tập nào?

A. $\left(-\infty; 3\right]$ **B.** $(-3; 0)$ **C.** $\left(-\infty; 3\right)$ **D.** $\left(-3; 3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $y = \ln\left(-x^2 + 9\right)$ có tập xác định là $D = \left(-3; 3\right)$ và có $y' = \dfrac{-2x}{9 - x^2}$

Ta có $y' > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-3; 0\right)$ do đó hàm số đồng biến trên $\left(-3; 0\right)$

Câu 92: Cho hàm số $y = \left(\dfrac{a}{1+a^2}\right)^{1-x}$ (với $a > 0$ là một hằng số). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $\left(1; +\infty\right)$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}$.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; 1\right)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $0 < \dfrac{a}{1+a^2} < 1,\ \forall\ a > 0$. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 < x_2$ thì $1 - x_1 > 1 - x_2$.

Suy ra $\left(\dfrac{a}{1+a^2}\right)^{1-x_1} < \left(\dfrac{a}{1+a^2}\right)^{1-x_2}$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách 2. Ta có $0 < \dfrac{a}{1+a^2} < 1\ (a > 0)$. Suy ra $y' = -\left(\dfrac{a}{1+a^2}\right)^{1-x} \ln\dfrac{a}{1+a^2} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 93: Hàm số $y = \left(-3a^2 + 10a - 2\right)^x$ đồng biến trên $\left(-\infty; +\infty\right)$ khi:

A. $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $a\in(-3;+\infty)$. **C.** $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$. **D.** $a\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=\left(-3a^2+10a-2\right)^x$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $-3a^2+10a-2>1\Leftrightarrow\frac{1}{3}<a<3$.

Câu 94: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\frac{1}{3^x}$. **B.** $y=\log_2\left(x^2-1\right)$. **C.** $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^2+1\right)$. **D.** $y=3^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số mũ cơ số lớn hơn 1 đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 95: Hàm số $y=\log_2\left(x^3-4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện $x^3-4x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\2<x\end{array}\right.$

$y'=\frac{\left(x^3-4x\right)'}{\left(x^3-4x\right)\ln 2}=\frac{3x^2-4}{\left(x^3-4x\right)\ln 2}$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{2}{\sqrt{3}}(TM)\\x=\frac{2}{\sqrt{3}}(L)\end{array}\right.$. Thấy hàm số có 1 cực trị.

Câu 96: Cho hàm số $y=\frac{e^x}{x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Hàm số $y=\frac{e^x}{x^2+1}$ có đạo hàm $y'=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$ với mọi x và $y'=0\Leftrightarrow x=1$

Nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 97: Chọn khẳng định đúng khi nói về hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$

A. Hàm số có một điểm cực tiểu. **B.** Hàm số có một điểm cực đại.
C. Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Tập xác định $D=(0;+\infty)$; $y'=\frac{1-\ln x}{\ln^2 x}$; $y'=0\Leftrightarrow x=e$

Hàm y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=e$ nên $x=e$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 98: Hàm số $y=\log_2\left(x^3-4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện: $x^3-4x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\x>2\end{array}\right.$

$y'=\frac{3x^2-4}{\left(x^3-4x\right)\ln 2}$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}(L)\\x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

$y' < 0\left(\forall x \in \left(-2, \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ $y' > 0\left(\forall x \in \left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right)$ nên $x = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ là điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = \log_2\left(x^3 - 4x\right)$ có một điểm cực trị.

Câu 99: Hàm số $f(x) = x^2 \ln x$ đạt cực trị tại điểm.

A. $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $x = \sqrt{e}$. **C.** $x = e$. **D.** $x = \dfrac{1}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ĐK: x > 0. $f'(x) = 2x\ln x + x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

$f''(x) = 2\ln x + 3 \Rightarrow f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{5}{2}$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO:

Câu 100: Hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi

A. $a \neq 1$ và $0 < a < 2$. **B.** $a > 1$. **C.** $a < 0$. **D.** $a \neq 1$ và $a > \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 < 1 \\ a^2 - 2a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a < 0 \\ (a-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 2 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Câu 101: Hàm số $y = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có đạo hàm $y' = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y' = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$y' > 0 \Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > 1 - x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x < 0 \\ \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x^2 > (1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ 2x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0$$

Câu 102: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln\left(16x^2 + 1\right) - (m+1)x + m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\infty)$.

A. $m \in (-\infty;-3]$. **B.** $m \in [3;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;-3)$. **D.** $m \in [-3;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $y = \ln\left(16x^2 + 1\right) - (m+1)x + m + 2$, $y' = \dfrac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Cách 1: $\dfrac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 32x - (m+1)\left(16x^2 + 1\right) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2 + 32x - (m+1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16(m+1)<0 \\ \Delta' = 16^2 - 16(m+1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -16m^2-32m+240 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m \ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 3.$$

TH: $m=-1$ thì (1) thành $x \le 0$ nên $m=-1$ không thỏa mãn

Cách 2: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1} \le m+1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m+1 \ge \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$, với $g(x)=\dfrac{32x}{16x^2+1}$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{(16x^2+1)^2}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\dfrac{1}{4}\right)=4; g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$. Do đó: $m+1 \ge 4 \Leftrightarrow m \ge 3$.

Cách 3: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1} \le m+1, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử $m=3$ ta có: $32x \le 4(16x^2+1) \Leftrightarrow (8x-2)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$: Loại đáp án A, C

Thử $m=-3$ ta có: $32x \le -32x^2-2$: không đúng $\forall x \in \mathbb{R}$: Loại D.

Câu 103: Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1 \le m < 3e^4+1$. **B.** $m \ge 3e^4+1$. **C.** $3e^2+1 \le m \le 3e^3+1$. **D.** $m < 3e^2+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. • $y'=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^x+1\right)'$

$=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)$

• ycbt $\Leftrightarrow y'=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right) \ge 0, \forall x \in (1;2)$ (*)

mà $\begin{cases} \left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\dfrac{4}{2017}\right) < 0 \end{cases}$

Nên (*) $\Leftrightarrow 3e^{3x}-(m-1)e^x \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow 3e^{2x}+1 \le m, \forall x \in (1;2)$

• Đặt $g(x)=3e^{2x}+1, \forall x \in (1;2)$, $g(x)=3e^{2x}.2>0, \forall x \in (1;2)$

x	1		2
$g'(x)$	|	$+$	|
$g(x)$	|	$\nearrow$	|

. Vậy (*) xảy ra khi $m \ge g(2) \Leftrightarrow m \ge 3e^4+1$.

Câu 104: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)$ **B.** $m\in(-1;1)$. **C.** $m\in\left[-\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $m\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $y'=2^{\frac{mx+1}{x+m}}\ln 2.\frac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}-m\notin\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\\ y'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-\frac{1}{2}\\ m^2-1<0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le m<1.$$

Câu 105: Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\frac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left[\frac{-7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{-1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{-4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ hàm số xác định.

Ta có $y'=\frac{3}{3x-1}+\frac{m}{x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Thì $y'\ge 0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow\frac{3}{3x-1}+\frac{m}{x^2}\ge 0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m\ge\frac{-3x^2}{3x-1},\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow m\ge\max_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}f(x)\text{ với } f(x)=\frac{-3x^2}{3x-1},\quad f'(x)=\frac{-9x^2+6x}{(3x-1)^2};\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên có $m\ge\frac{-4}{3}$.

Câu 106: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{e^{4x}+m-2}{e^{2x}}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$ là

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{16}\right]$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{513}{256}\right]$. **D.** $[-1;2]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=e^{2x}$. Vì $x\in\left(\ln\dfrac{1}{2};0\right)$ nên $t\in\left(\dfrac{1}{16};1\right)$. Khi đó $y=\dfrac{t^2+m-2}{t}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$ thì $y'>0,\forall t\in\left(\dfrac{1}{16};1\right)$.

Có $y'=\dfrac{2t.t-t^2-m+2}{t^2}=\dfrac{t^2-m+2}{t^2}>0\Leftrightarrow t^2-m+2>0\Leftrightarrow m<t^2+2$.

Đặt $f(t)=t^2+2$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{16};1\right)$.

Do đó $m\le f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{513}{256}$ thì hàm sống đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$.

Câu 107: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}<m<3$. **D.** $m<3$.

Hướng dẫn gải:

Chọn B. Đặt $t=3^{-x}$, với $x\in(-1;1)\longrightarrow t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{t-3}{t-m}\longrightarrow y'(t)=\dfrac{-m+3}{(t-m)^2}$.

Ta có $t'=-3^{-x}.\ln 3<0,\ \forall x\in(-1;1)$, do đó $t=3^{-x}$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};3\right)\longleftrightarrow y'(t)>0,\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m+3>0\\ t-m\ne 0\end{cases},\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ m\ne t\end{cases},\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ m\notin\left(\dfrac{1}{3};3\right)\end{cases}\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{3}.$$

Câu 108: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$

A. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)$ **B.** $m\in[-1;2]$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\ln m^2\}$

Ta có $y'=\dfrac{(-m^2+m+2)e^x}{(e^x-m^2)^2}>0\Leftrightarrow -m^2+m+2>0\Leftrightarrow -1<m<2$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;\ln m^2)$ và $(\ln m^2;+\infty)$

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$ thì $\left[\begin{array}{l}\ln m^2 \le \frac{1}{4}\\ \ln m^2 \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}\\ m\le -1 \vee m\ge 1\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $-1<m<2$ suy ra $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$.

TÍNH CHẤT HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 109: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ đồng biến trên mỗi khoảng mà hàm số xác định.

C. Đồ thị hàm số $y=\log_{2^{-1}} x$ nằm phía trên trục hoành.

D. Đồ thị hàm số $y=2^{-x}$ nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đồ thị hàm số $y=\log_{2^{-1}} x$ nằm cả ở phía dưới Ox.

Câu 110: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên $(-\infty;\ +\infty)$.

B. Hàm số $y=a^x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên $(-\infty;\ +\infty)$.

C. Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $0<a\ne 1$ luôn đi qua điểm $(a;\ 1)$.

D. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ với $0<a\ne 1$ thì đối xứng với nhau qua trục tung.

Hướng dẫn giải

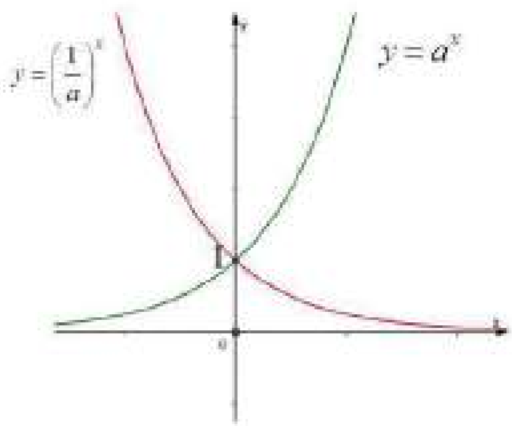
Chọn D.

Đáp án A sai: Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ là một hàm số nghịch biến trên $(-\infty;\ +\infty)$.

Đáp án B sai: Hàm số $y=a^x$ với $a>1$ là một hàm số đồng biến trên $(-\infty;\ +\infty)$.

Đáp án C sai: Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $0<a\ne 1$ luôn đi qua điểm $(a;\ a^a)$.

Đáp án D đúng: Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ với $0<a\ne 1$ thì đối xứng với nhau qua trục tung.



Câu 111: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=a^x$ $(0<a<1)$ đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x,(a>1)$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ luôn đi qua $(a;1)$.

D. Đồ thị $y=a^x, y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(0<a\neq 1)$ đối xứng qua trục Ox.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 112: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $x_1>x_2$.
B. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)<0$.
C. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)>0$.
D. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $x_1<x_2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Xét 2 trường hợp:

+) TH1: $a>1$. Khi đó, $a^{x_1}<a^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2\Leftrightarrow (x_1-x_2)<0$.

Mà $a>1\Rightarrow a-1>0\Rightarrow (a-1)(x_1-x_2)<0$.

+) TH1: $0<a<1$. Khi đó, $a^{x_1}<a^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2\Leftrightarrow (x_1-x_2)>0$.

Mà $a<1\Rightarrow a-1<0\Rightarrow (a-1)(x_1-x_2)<0$.

Câu 113: Trên khoảng $(0;+\infty)$ cho hàm số $y=\log_b\frac{1}{x}$ đồng biến và hàm số $y=\log_a\frac{2}{x}$ nghịch biến. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $0<b<a<1$. **B.** $0<a<1<b$. **C.** $1<b<a$. **D.** $0<b<1<a$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số $y=\log_b\frac{1}{x}=-\log_b x$ có đạo hàm $y'=\frac{-1}{x.\ln b}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $y'>0\Leftrightarrow\frac{-1}{x.\ln b}>0\Leftrightarrow \ln b<0\Leftrightarrow 0<b<1$.

Hàm số $y=\log_a\frac{2}{x}=\log_a 2-\log_a x$ có đạo hàm $y'=\frac{-1}{x.\ln a}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $y'<0\Leftrightarrow\frac{-1}{x.\ln a}<0\Leftrightarrow \ln a>0\Leftrightarrow a>1$.

Vậy $0<b<1<a$.

Câu 114: Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\log_{2016}2017<1$.
B. $\left(\frac{2017}{2016}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0$.
C. $\left(\frac{2016}{2017}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0$.
D. $\log_{2017}2016<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đáp ánA sai vì $2017>2016\Leftrightarrow\log_{2016}2017>\log_{2016}2016\Leftrightarrow\log_{2016}2017>1$

B sai vì với $a>1$ thì $a^x>1$ với mọi x dương.

C sai vì với $a<1$ thì $a^x<1\Leftrightarrow a^x<a^0\Leftrightarrow x>1$.

VẬN DỤNG:

Câu 115: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x=\ln\left(a^2-ab+b^2\right)^{1000}$, $y=1000\ln a-\ln\frac{1}{b^{1000}}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $x<y$. **B.** $x>y$. **C.** $x\leq y$. **D.** $x\geq y$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000}$

$y = 1000\ln a - \ln\dfrac{1}{b^{1000}} = 1000\ln a - \ln b^{-1000} = 1000\left(\ln a + \ln b\right) = \ln\left(a.b\right)^{1000}$

Ta có $\left(a-b\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \ge ab$

Vậy ta có $\ln\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge \ln ab \Leftrightarrow 1000\ln\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge 1000\ln ab$

$\ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000} \ge \ln\left(ab\right)^{1000}$. Hay $x \ge y$.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 116: Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hai hàm số $y = 4^x$ và $y = -2^{x+1} + 3$.

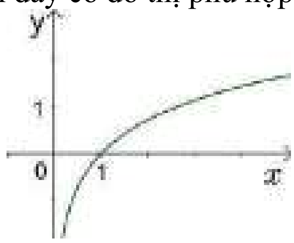
A. $M\left(0;1\right)$. **B.** $M\left(1;4\right)$. **C.** $M\left(2;16\right)$. **D.** $M\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình hoành độ giao điểm là

$4^x = -2^{x+1} + 3 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2.2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$ Tọa độ điểm $M\left(0;1\right)$.

Câu 117: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên?



A. $y = \log_{0,5} x$. **B.** $y = \log_{\sqrt{7}} x$. **C.** $y = e^x$. **D.** $y = e^{-x}$.

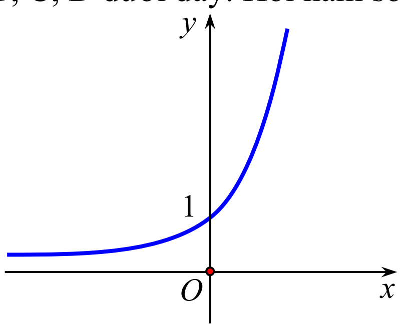
Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có điểm $A\left(1;\ 0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$ hoặc $y = \log_{\sqrt{7}} x$

Nhưng hàm số đồng biến nên ta chọn $y = \log_{\sqrt{7}} x$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(1;\ 0\right)$ nên loại C, **D.**

Câu 118: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

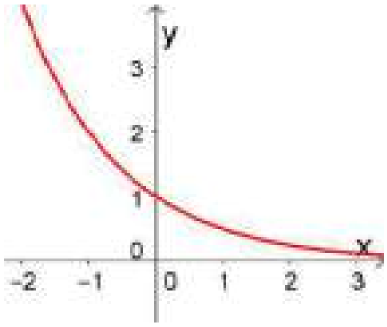


A. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **B.** $y = x^2$. **C.** $y = \log_2 x$. **D.** $y = 2^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(0;1\right)$ và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên A, D thỏa mãn. Đồ thị có hướng đi lên nên hàm số luôn đồng biến. Vậy phương án đúng là **D.**

Câu 119: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+2x+1$. **B.** $y=\log_{0,5}x$. **C.** $y=\dfrac{1}{2^x}$. **D.** $y=2^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đồ thị hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên A, D loại

Đồ thị hàm số giao với Oy tại điểm $(0;1)$ nên B loại do $x>0$ nên chọn C.

Câu 120: Tìm tọa độ giao điểm M của hai đồ thị hàm số $y=3^x$ và $y=\dfrac{1}{3}$.

A. $M\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $M\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $M\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Pt hoành độ giao điểm: $3^x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=-1$.

Câu 121: Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y=\log_3(2x+1)$ là.

A. (1,1). **B.** (-1,0). **C.** (1,0). **D.** (-1,1).

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_3(2.1+1)=1$.

Câu 122: Chọn phát biểu **sai** trong các phát biểu sau?

A. Đồ thị hàm số logarit nằm bên trên trục hoành.
B. Đồ thị hàm số mũ không nằm bên dưới trục hoành.
C. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên phải trục tung.
D. Đồ thị hàm số mũ với số mũ âm luôn có hai tiệm cận.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên phải trục tung và cả dưới, cả trên trục hoành.

Câu 123: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên phải trục tung.
B. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên trái trục tung.
C. Đồ thị hàm số mũ nằm bên phải trục tung.
D. Đồ thị hàm số mũ nằm bên trái trục tung.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hàm số lôgarit chỉ xác định khi $x>0$ nên đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung.

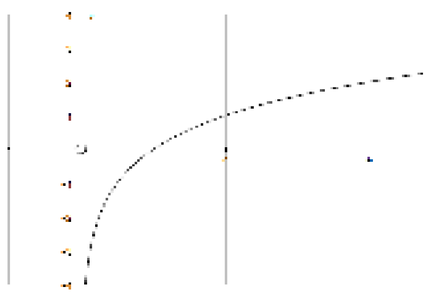
Câu 124: Với mọi giá trị tham số thực m, đường thẳng nào có phương trình dưới đây luôn có điểm chung với đồ thị hàm số $y=\log_2 x$.

A. $y=x-m$. **B.** $y=-m^2-1$. **C.** $x=m+1$. **D.** $y=-mx+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Hàm số $y=\log_2 x$ là hàm số có tập xác định $D=(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $T=\mathbb{R}$ (có đồ thị như hình vẽ).

Đường thẳng $y=-m^2-1$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-m^2-1$.



Vậy đường thẳng trên luôn luôn có điểm chung với đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ với mọi giá trị tham số thực m.

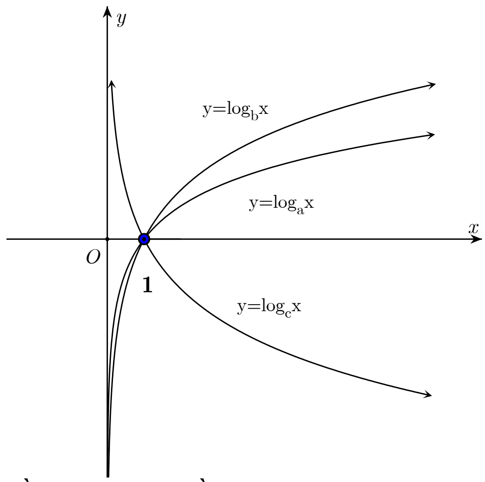
Câu 125: Với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ nằm phía trên đường thẳng $y=16$?

A. $x<-5$. **B.** $x>-5$. **C.** $x\le -5$. **D.** $x\ge -5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}>16\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\Leftrightarrow x+1<-4\Leftrightarrow x<-5.$

Câu 126: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\log_b x<0\Leftrightarrow x\in(1;+\infty)$. **B.** Hàm số $y=\log_c x$ đồng biến trên $(0;1)$.

C. Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;1)$. **D.** $a>b>c$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **A.** sai vì $\log_b x<0\Leftrightarrow x\in(0;1)$.

B. sai vì $y=\log_c x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

C. sai vì $y=\log_a x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

D. đúng vì

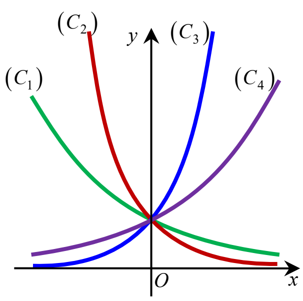
Từ đồ thị các hàm số suy ra $a>1, b>1, 0<c<1$

Với $x>1$ ta có: $\log_b x, \log_a x>0$ và

$$\log_b x>\log_a x\Leftrightarrow\frac{1}{\log_x b}>\frac{1}{\log_x a}\Leftrightarrow\log_x a>\log_x b\Leftrightarrow a>b$$

Vậy $a>b>c$.

Câu 127: Cho bốn hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ (1), $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y=4^x$ (3), $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) và bốn đường cong (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) như hình vẽ bên. Đồ thị các hàm số (1), (2), (3), (4) lần lượt là

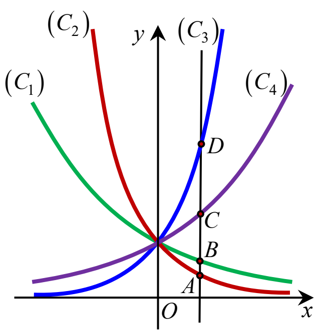


A. $(C_2), (C_3), (C_4), (C_1)$. **B.** $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$.

C. $(C_4), (C_1), (C_3), (C_2)$. **D.** $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ và $y=4^x$ có cơ số lớn hơn 1nên hàm đồng biến nên nhận đồ thị là (C_3) hoặc (C_4). Lấy $x=2$ ta có $\left(\sqrt{3}\right)^2<4^2$ nên đồ thị $y=4^x$ là (C_3) và đồ thị $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ là (C_4).



Ta có đồ thị hàm số $y=4^x$ và $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ đối xứng nhau qua Oy nên đồ thị $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ là (C_2). Còn lại (C_1) là đồ thị của $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Vậy đồ thị các hàm số $(1), (2), (3), (4)$ lần lượt là $(C_4), (C_1), (C_3), (C_2)$.

Cách khác: Viết lại các cơ số theo thứ tự tăng dần: $\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\sqrt{3}<4$.

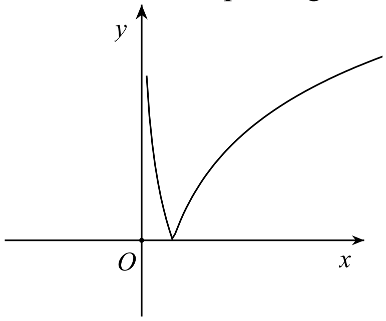
Trên hệ trục, kẻ đường thẳng đứng $(x=1)$ cắt 4 đường cong lần lượt tại 4 điểm $A\to B\to C\to D$ (tính từ dưới lên trên).

Theo thứ tự các đường cong đi qua $A\to B\to C\to D$

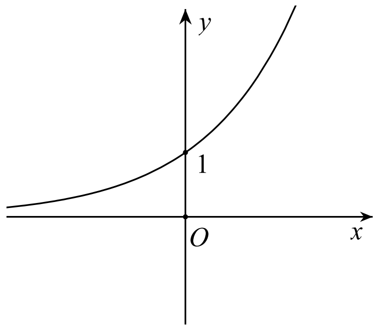
lần lượt sẽ là $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x \to y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \to y=\left(\sqrt{3}\right)^x \to y=4^x$

Vậy đồ thị các hàm số $(1), (2), (3), (4)$ lần lượt là $(C_4), (C_1), (C_3), (C_2)$.

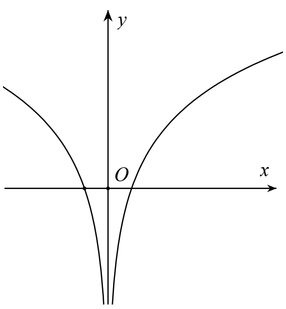
Câu 128: Cho hàm số $y=\log_2(2x)$. Khi đó, hàm số $y=\left|\log_2(2x)\right|$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây:



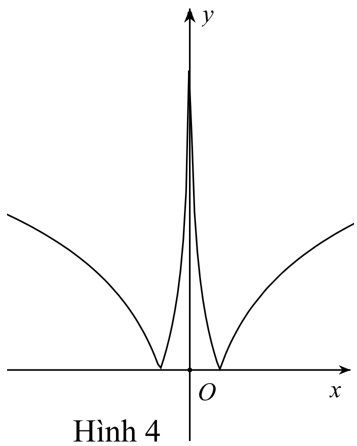
Hình 1



Hình 2



Hình 3



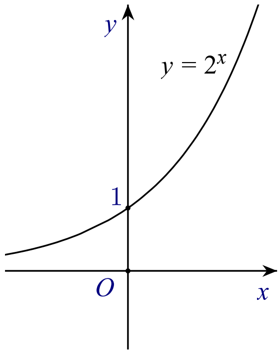
Hình 4

A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

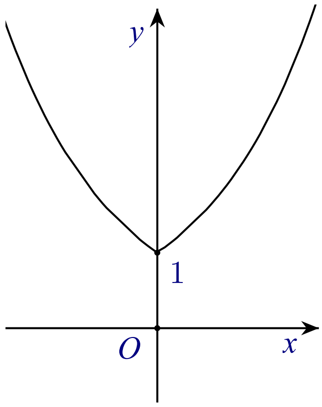
Hướng dẫn giải

Chọn A. Sử dụng lý thuyết phép suy đồ thị.

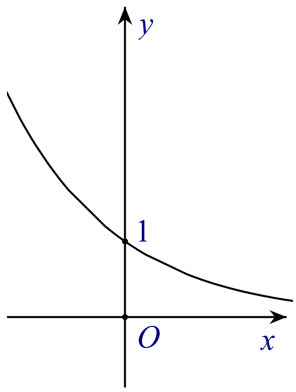
Câu 129: Biết hàm số $y = 2^x$ có đồ thị là hình bên.



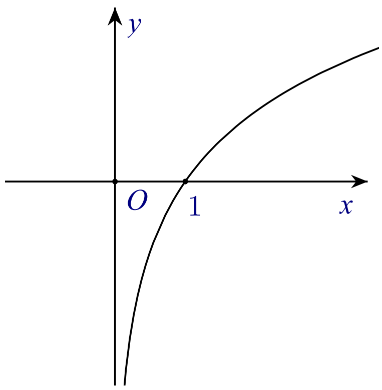
Khi đó, hàm số $y = 2^{|x|}$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình được liệt kê ở bốn A, B, C, D dưới đây ?



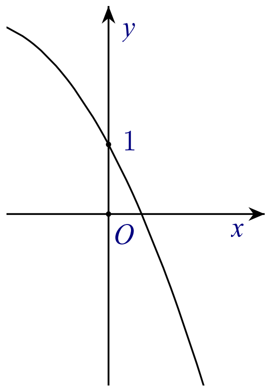
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Hướng dẫn giải

Chọn A. Sử dụng lý thuyết phép suy đồ thị.

Câu 130: Với những giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 3^{x+1}$ nằm phía trên đường thẳng $y = 27$.

A. $x > 2$. **B.** $x > 3$. **C.** $x \le 2$. **D.** $x \le 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Yêu cầu bài toán tương đương $3^{x+1} > 27 \Leftrightarrow x > 2$.

Câu 131: Cho hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số luôn đi qua hai điểm $A(1;\, 0)$, $B\left(1;\, \frac{1}{2}\right)$.

B. Đồ thị hàm số đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ qua đường thẳng $y = x$.

C. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

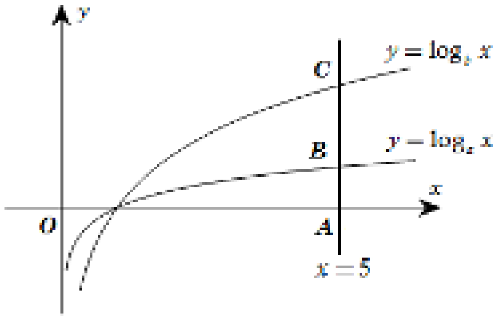
D. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do khi $x=1$ thì $y=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số không qua $A(1;0)$.

VẬN DỤNG:

Câu 132: Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a=b^2$. **B.** $a^3=b$. **C.** $a=b^3$ **D.** $a=5b$.

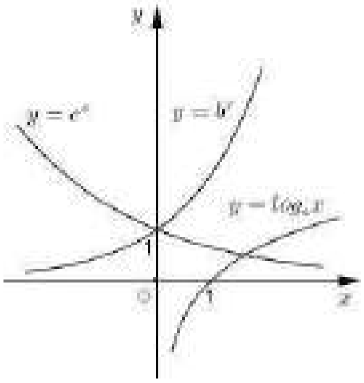
Hướng dẫn gải:

Chọn C. Theo giải thiết, ta có $A(5;0)$, $B(5;\log_a 5)$, $C(5;\log_b 5)$.

Do $CB=2AB \Rightarrow \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \log_a 5-\log_b 5=2.(-\log_a 5)$

$\Leftrightarrow 3\log_a 5=\log_b 5 \Leftrightarrow \log_a 5=\dfrac{1}{3}\log_b 5 \Leftrightarrow \log_a 5=\log_{b^3} 5 \Rightarrow a=b^3$.

Câu 133: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

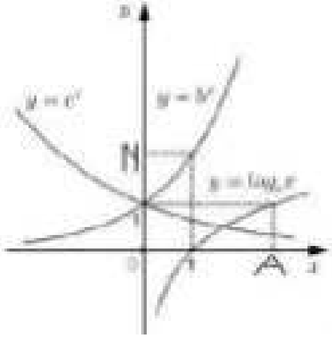


A. $b<c<a$. **B.** $a<b<c$. **C.** $c<a<b$. **D.** $c<b<a$.

Giải

Chọn D.

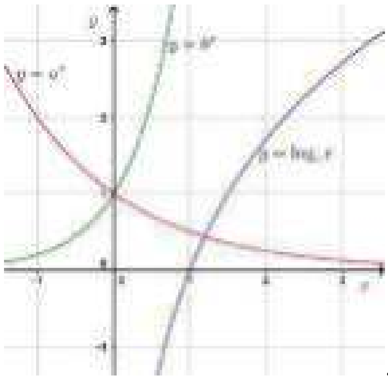
Hàm số $y=b^x$ đồng biến nên $b>1$. Hàm số $y=c^x$ nghịch biến nên $c<1 \Rightarrow c<b$



Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đi qua điểm $S(a;1)$ và đồ thị hàm số $y=b^x$ đi qua điểm $R(1;b)$.

Từ đó ta xác định điểm $A(a;0)$ là hình chiếu của $S(a;1)$ lên trục hoành và $N(0;b)$ là hình chiếu của $R(1;b)$ lên trục tung như trên hình vẽ. Ta thấy $OA > ON \Rightarrow a > b$.

Câu 134: Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

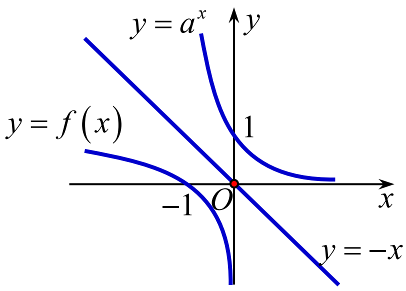
A. $c < a < b$. **B.** $a < c < b$. **C.** $b < c < a$. **D.** $a < b = c$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Dựa vào đồ thị ta có $0 < a < 1;\ b, c > 1$. $\log_c x = 1 \Leftrightarrow x = c \in (1,2)$

Khi x = 1 thì hàm số $y = b^x$ có y(1) > 3 ⇔ b > 3

Câu 135: Biết hai hàm số $y = a^x$, $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$. Tính $f\left(-a^3\right)$.



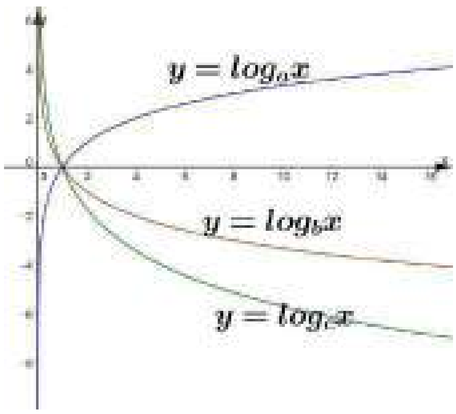
A. $f\left(-a^3\right) = -a^{-3a}$. **B.** $f\left(-a^3\right) = \frac{-1}{3}$. **C.** $f\left(-a^3\right) = -3$. **D.** $f\left(-a^3\right) = -a^{3a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x, (0 < a < 1)$ qua đường thẳng $y = -x$. Nên ta có hàm số $y = f(x) = -\log_a(-x)$.

Vậy ta có $f\left(-a^3\right) = -\log_a\left(-\left(-a^3\right)\right) = -3$.

Câu 136: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < c < a$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < a < b$. **D.** $a < c < b$.

Hướng dẫn giải

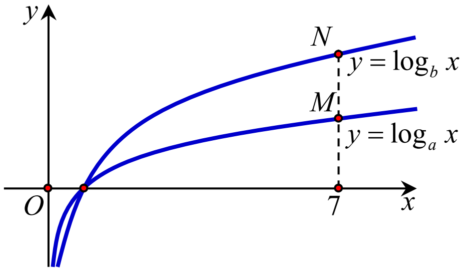
Chọn A. Do đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đi lên từ trái sang phải trên khoảng $(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến, suy ra $a>1$.

Mặc khác đồ thị hàm số $y=\log_b x; y=\log_c x$ đi xuống từ trái sang phải trên khoảng $(0;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến, suy ra $b<1; c<1$.

Mà từ đồ thị ta xét tại $x=2 \Rightarrow \log_b 2>\log_c 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 b}>\dfrac{1}{\log_2 c}$

nhân hai vế $\log_2 b.\log_2 c>0$, ta được $\log_2 c>\log_2 b \Leftrightarrow c>b$. Vậy: $a>c>b$.

Câu 137: Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại H, M, N. Biết rằng $HM=MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



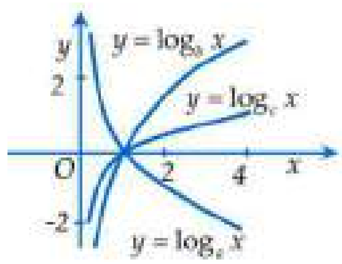
A. $a=7b$. **B.** $a=2b$. **C.** $a=b^7$. **D.** $a=b^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có

$MH=MN \Leftrightarrow HN=2MH \Leftrightarrow \log_b 7=2\log_a 7 \Leftrightarrow \log_b 7=\log_{\sqrt{a}} 7 \Leftrightarrow b=\sqrt{a} \Leftrightarrow a=b^2$.

Câu 138: Cho ba số dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=\log_c x$ như hình vẽ dưới đây:



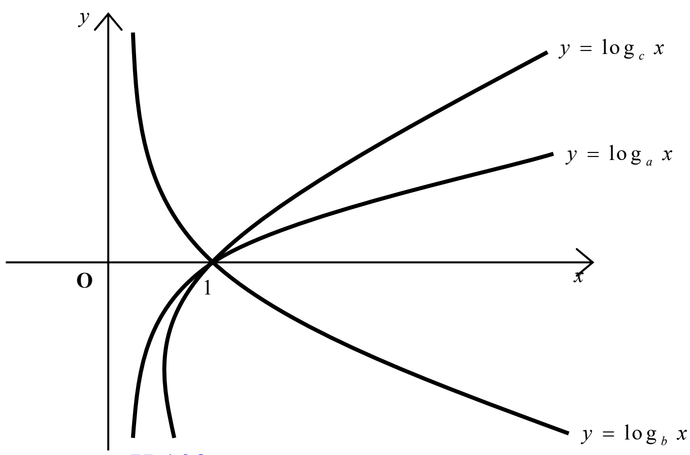
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $c<a<b$. **D.** $b<a<c$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Dựng đường thẳng $y=1$ cắt các đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm $A(a;1)$, $B(b;1)$, $C(c;1)$. Từ đó suy ra $a<b<c$.

Câu 139: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên.



H 103

Tìm khẳng định đúng

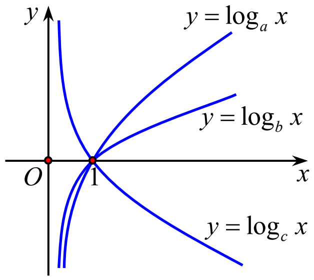
A. $b<c<a$. **B.** $a<b<c$. **C.** $a<c<b$. **D.** $b<a<c$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Dựa vào đồ thị, ta thấy: Hàm số $y=\log_b x$ nghịch biến, suy ra $0<b<1$.

Hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_c x$ đồng biến và đồ thị $y=\log_c x$ phía trên $y=\log_a x$, suy ra: $1<c<a$. Nên ta có $b<c<a$.

Câu 140: Cho các số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ được cho như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $c>b>a$. **B.** $a>b>c$. **C.** $c>a>b$. **D.** $b>a>c$.

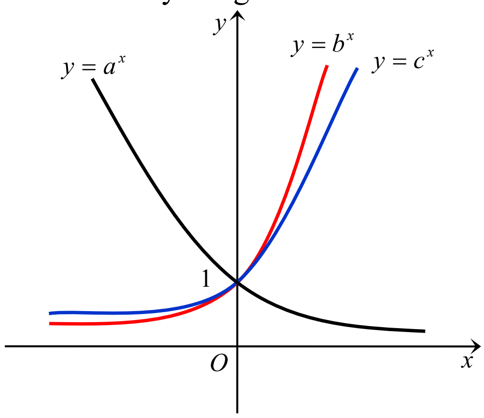
Hướng dẫn giải

Chọn D. Dựa vào đồ thị ta có $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ đồng biến

Suy ra $a,b>1$. Còn $y=\log_c x$ nghịch biến suy ra $0<c<1$.

Tại $x_0>1$ ta có $\log_a x_0>\log_b x_0>0$. Suy ra $\log_{x_0} a<\log_{x_0} b \Rightarrow a<b$. Vậy $b>a>c$.

Câu 141: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



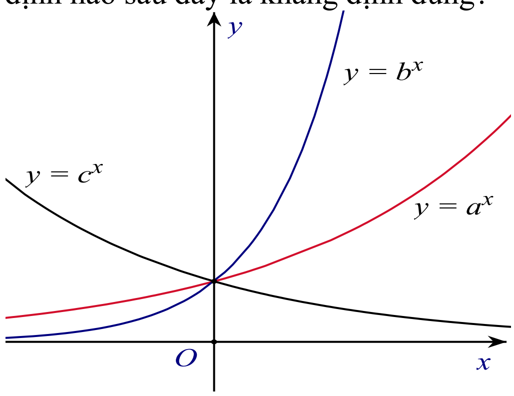
A. $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<c<a$. **D.** $c<a<b$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $0<a<1$; $b>1, c>1$ và $b^x>c^x$ khi $x>0$ nên $b>c$. Vậy $a<c<b$.

Câu 142: Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ $\left(0<a,b,c\neq 1\right)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $b>a>c$ **B.** $a>b>c$ **C.** $a>c>b$ **D.** $c>b>a$

Chọn A. Do $y = a^x$ và $y = b^x$ là hai hàm đồng biến nên $a, b > 1$.

Do $y = c^x$ nghịch biến nên $c < 1$. Vậy x bé nhất.

Mặt khác: Lấy $x = m$, khi đó tồn tại $y_1,\ y_2 > 0$ để $\begin{cases} a^m = y_1 \\ b^m = y_2 \end{cases}$

Dễ thấy $y_1 < y_2 \Rightarrow a^m < b^m \Rightarrow a < b$. Vậy $b > a > c$.

Câu 143: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ $x = 2$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$. **B.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$. **C.** $y = \frac{-1}{16}x + \frac{7}{8}$. **D.** $y = \frac{1}{8}x + \frac{7}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = f'(x) = \left(\sqrt[4]{x^2 + 12}\right)' = \left[\left(x^2 + 12\right)^{\frac{1}{4}}\right]' = \frac{1}{4}\left(x^2 + 12\right)^{\frac{-3}{4}}.2x = \frac{1}{2}x\left(x^2 + 12\right)^{\frac{-3}{4}}$

Tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ $x = 2$ thì có tung độ $y = f(2) = 2$

Ta có phương trình tiếp tuyến: $y = f'(2).(x - 2) + f(2) = \frac{1}{8}(x - 2) + 2 = \frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$.

Câu 144: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_{\sqrt{a}} x$ và $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a.

A. $a = \sqrt{3}$. **B.** $a = \sqrt[3]{6}$. **C.** $a = \sqrt{6}$ **D.** $a = \sqrt[6]{3}$.

Hướng dẫn gải:

Chọn D. Do $AB \parallel Ox \Rightarrow A,\ B$ nằm trên đường thẳng $y = m\ (m \neq 0)$.

Lại có $A,\ B$ lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x,\ y = \log_{\sqrt{a}} x$.

Từ đó suy ra $A\left(a^m; m\right)$, $B\left(a^{\frac{m}{2}}; m\right)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $x_C = x_B = a^{\frac{m}{2}}$. Lại có C nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$, suy ra $C\left(a^{\frac{m}{2}}; \frac{3m}{2}\right)$.

Theo đề bài $S_{ABCD} = 36 \Rightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ BC = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|a^m - a^{\frac{m}{2}}\right| = 6 \\ \left|\frac{3m}{2} - m\right| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -12 \\ a = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} < 1\ (\text{loại}) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = 12 \\ a = \sqrt[6]{3} \end{cases}$.

TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

VẬN DỤNG

Câu 145: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{3}{2015}\right) + \cdots + f\left(\frac{2013}{2015}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$$

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 1008. **D.** 1007.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $f\left(1-x\right)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4}{4+2.4^{x}}=\dfrac{2}{2+4^{x}}\Rightarrow f\left(1\right)+f\left(1-x\right)=1$

Do đó: $f\left(\dfrac{1}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2014}{2015}\right)=1, f\left(\dfrac{2}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2013}{2015}\right)=1,..., f\left(\dfrac{1007}{2015}\right)+f\left(\dfrac{1008}{2015}\right)=1$

$\Rightarrow S=1007$.

Câu 146: Kí hiệu $f\left(x\right)=\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}-1$. Giá trị của $f\left(f\left(2017\right)\right)$ bằng:

A. 2016. **B.** 1009. **C.** 2017. **D.** 1008.

Hướng dẫn gải:

Chọn C. Ta có $\begin{cases} x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}=x^{1+\frac{1}{\log_2 x}}=x^{1+\log_x 2}=x^{\log_x(2x)}=2x \\ 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}=2^{3.\frac{1}{3.\log_{x^2} 2}}=2^{\frac{1}{\log_{x^2} 2}}=2^{\log_2 x^2}=x^2 \end{cases}$.

Khi đó $f\left(x\right)=\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}}-1=\left[\left(x+1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1=x.$

Suy ra $f\left(2017\right)=2017\Rightarrow f\left(f\left(2017\right)\right)=f\left(2017\right)=2017.$

Câu 147: Cho $f\left(x\right)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(\log\left(\log e\right)\right)=2$. Tính giá trị của $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$

A. 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\log\left(\log\left(e\right)\right)=\log\left(\dfrac{1}{\ln 10}\right)=-\log\left(\ln 10\right)\Leftrightarrow\log\left(\ln\left(10\right)\right)=-t$

Theo giả thiết ta có: $f\left(t\right)=a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin t+6=2\Leftrightarrow a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin t=-4$

Khi đó

$$f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)=f\left(-t\right)=a\ln\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin\left(-t\right)+6=a\ln\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}-b\sin t+6$$

$$=-\left[a\ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)+b\sin t\right]+6=10$$

Câu 148: Cho $f\left(x\right)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Nếu $a+b=1$ thì $f\left(a\right)+f\left(b\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **Cách 1**: $a+b=1\Leftrightarrow b=1-a$.

$$f\left(a\right)+f\left(b\right)=\dfrac{9^a}{9^a+3}+\dfrac{9^b}{9^b+3}=\dfrac{9^a}{9^a+3}+\dfrac{9^{1-a}}{9^{1-a}+3}=\dfrac{9^a}{9^a+3}+\dfrac{3}{3+9^a}=1.$$

Cách 2: Chọn $a=b=\dfrac{1}{2}$. Bấm máy $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9^a}{9^a+3}+\dfrac{9^a}{9^a+3}=2.\dfrac{9^a}{9^a+3}\xrightarrow[a=\frac{1}{2}]{calc}=1$.

Câu 149: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{9^x}{3+9^x}$, $x\in R$. Nếu $a+b=3$ thì $f\left(a\right)+f\left(b-2\right)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $b-2=1-a$

$f(a)=\dfrac{9^a}{3+9^a}$; $f(b-2)=f(1-a)=\dfrac{9^{1-a}}{3+9^{1-a}}=\dfrac{3}{3+9^a}\Rightarrow f(a)+f(b-2)=\dfrac{9^a}{3+9^a}+\dfrac{3}{3+9^a}=1$.

Câu 150: Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

A. 10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $9^x+9^{-x}=23\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2+\left(3^{-x}\right)^2+2.3^x.3^{-x}=25\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=25\Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=5$.

Do đó: $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\dfrac{5+5}{1-5}=\dfrac{-5}{2}.\Rightarrow a=-5,b=2\Rightarrow a.b=-10$.

Câu 151: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(2^{-x}\right)^2=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2.2^x.2^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9$

Như vậy $2^x+2^{-x}=3\Rightarrow P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}=\dfrac{5+3}{8-4.3}=-2$

Câu 152: Cho x,y,z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x=5^y=10^{-z}$. Giá trị của biểu thức $A=xy+yz+zx$ bằng ?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow 2^x=5^y=\dfrac{1}{10^z}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x.10^z=1\\5^y.10^z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^x.10^z\right)^y=1\\\left(5^y.10^z\right)^x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{xy}.10^{yz}=1\\5^{xy}.10^{xz}=1\end{cases}$

Khi đó $2^{xy}.10^{yz}.5^{xy}.10^{xz}=1\Leftrightarrow 10^{xy+yz+zx}=1\Leftrightarrow xy+yz+zx=0$.

Câu 153: Cho x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Tính giá trị biểu thức $M=xy+yz+zx$.

A. $M=3$. **B.** $M=6$. **C.** $M=0$. **D.** $M=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $2^x=3^y\Rightarrow y=\dfrac{x\ln 2}{\ln 3}$; $2^x=6^{-z}\Rightarrow z=-\dfrac{x\ln 2}{\ln 6}$.

Xét $M=xy+yz+zx=x^2\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}-\dfrac{\ln^2 2}{\ln 3.\ln 6}-\dfrac{\ln 2}{\ln 6}\right)=x^2\left(\dfrac{\ln 2.\ln 6-\ln^2 2-\ln 2.\ln 3}{\ln 3.\ln 6}\right)$

$=x^2\cdot\dfrac{\ln 2\left(\ln 6-\ln 2-\ln 3\right)}{\ln 3.\ln 6}=0$

Câu 154: Cho các số thực $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ $x>0;y>0;z>0;1\neq t>0$ thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{a}=\dfrac{\ln y}{b}=\dfrac{\ln z}{c}=\ln t$ và $xy=z^2t^2$. Tính giá trị $P=a+b-2c$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\dfrac{\ln x}{a}=\dfrac{\ln y}{b}=\dfrac{\ln z}{c}=\ln t\Rightarrow a=\dfrac{\ln x}{\ln t}=\ln_t x; b=\dfrac{\ln y}{\ln t}=\ln_t y; c=\dfrac{\ln z}{\ln t}=\ln_t z$

$P = a + b - 2c = \ln_t x + \ln_t y - 2\ln_t z = \ln_t\left(\frac{xy}{z^2}\right) = \ln_t\left(\frac{z^2t^2}{z^2}\right) = 2.$

VẬN DỤNG CAO:

Câu 155: Xét hàm số $f(t) = \dfrac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có nhận xét: $\begin{cases} e^x \ge e.x \\ e^y \ge e.y \end{cases} \Rightarrow e^{x+y} \le e(x+y) \Leftrightarrow x + y = 1$. (Dấu "=" xảy ra khi $x + y = 1$).

Do đó ta có: $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow f(x) + f(1 - x) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{9^x}{9^x + m^2} + \dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9 + m^2.9^x + 9 + m^2.9^{1-x}}{9 + m^2.9^x + m^2.9^{1-x} + m^4} = 1$

$\Leftrightarrow 9 + m^2.9^x + 9 + m^2.9^{1-x} = 9 + m^2.9^x + m^2.9^{1-x} + m^4 \Leftrightarrow m^4 = 9 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 156: Cho $0 < a \ne 1 + \sqrt{2}$ và các hàm $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. $f^2(x) - g^2(x) = 1$. II. $g(2x) = 2g(x)f(x)$.

III. $f(g(0)) = g(f(0))$. IV. $g'(2x) = g'(x)f(x) - g(x)f'(x)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn gải:

Chọn D. Ta có

- $f^2(x) - g^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{I}$ đúng.
- $g(2x) = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{2} = \dfrac{(a^x - a^{-x})(a^x + a^{-x})}{2} = 2.\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}.\dfrac{a^x + a^{-x}}{2} = 2g(x).f(x) \Rightarrow \text{II}$ đúng
- $\begin{cases} f(g(0)) = f(0) = 1. \\ g(f(0)) = g(1) = \dfrac{a - \frac{1}{a}}{2} = \dfrac{a^2 - 1}{2a} \end{cases} \Rightarrow f(g(0)) \ne g(f(0)) \Rightarrow \text{III}$ sai.
- Do $g(2x) = 2g(x)f(x)$ nên $g'(2x) = 2[g'(x)f(x) - g(x)f'(x)] \Rightarrow \text{IV}$ sai.

Vậy có 2 khẳng định đúng.

Cách giải trắc nghiệm: Chọn $a = 1$.

Câu 157: Cho hàm số $f(x) = \log_3 \dfrac{m^2x}{1 - x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \le e(a+b)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 27 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $-3\sqrt{3}$ **D.** -27

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ giả thiết ta có: $a + b = 1$

Và $f(a)+f(b)=f(a)+f(1-a)=\log_3\dfrac{m^2a}{1-a}+\log_3\dfrac{m^2(1-a)}{1-(1-a)}=\log_3 m^4=3$

$\Leftrightarrow m^4=27 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt[4]{27}$. Do đó tích phần tử thuộc S là $-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}$.

Câu 158: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$. Tính tổng

$$S=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+f\left(\frac{3}{2017}\right)+...+f\left(\frac{2015}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

A. $S=2016$. **B.** $S=1008$. **C.** $S=2017$. **D.** $S=4032$.

Hướng dẫn gải:

Chọn B. Xét $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)+\dfrac{1}{2}\log_2\left[\dfrac{2(1-x)}{1-(1-x)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)+\dfrac{1}{2}\log_2\left[\dfrac{2(1-x)}{x}\right]=\dfrac{1}{2}\log_2\left[\dfrac{2x}{1-x}.\dfrac{2(1-x)}{x}\right]=\dfrac{1}{2}\log_2 4=1$.

Áp dụng tính chất trên, ta được

$S=\left[f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2015}{2017}\right)\right]+...+\left[f\left(\dfrac{1008}{2017}\right)+f\left(\dfrac{1009}{2017}\right)\right]$

$=1+1+...+1=1008$.

Câu 159: Cho $f(x)=\dfrac{2016^x}{2016^x+\sqrt{2016}}$.

Tính giá trị biểu thức $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$

A. S = 2016 **B.** S = 2017 **C.** S = 1008 **D.** S = $\sqrt{2016}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $f(1-x)=\dfrac{\sqrt{2016}}{2016^x+\sqrt{2016}}\to f(x)+f(1-x)=1$. Suy ra

$S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)$

$+f\left(\dfrac{2015}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{1008}{2017}\right)+f\left(\dfrac{1009}{2017}\right)=1008$.

Câu 160: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{25^x}{25^x+5}$.

Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+f\left(\dfrac{3}{2017}\right)+f\left(\dfrac{4}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2017}{2017}\right)$.

A. $S=\dfrac{6053}{6}$. **B.** $S=\dfrac{12101}{6}$. **C.** $S=1008$. **D.** $S=\dfrac{12107}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Sử dụng máy tính cầm tay để tính tổng ta tính được kết quả: $S=1008$.

Câu 161: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{16^x}{16^x+4}$.

Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+f\left(\dfrac{3}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2017}{2017}\right)$.

A. $S=\dfrac{5044}{5}$. **B.** $S=\dfrac{10084}{5}$. **C.** $S=1008$. **D.** $S=\dfrac{10089}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. *Nhận xét:* Cho $x+y=1$

Ta có $f\left(x\right)+f\left(y\right)=\dfrac{16^x}{16^x+4}+\dfrac{16^y}{16^y+4}=\dfrac{16+4.16^x+16+4.16^y}{16+4.16^x+4.16^y+16}=1$

$$S=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+f\left(\frac{2015}{2017}\right)+...+f\left(\frac{1008}{2017}\right)+f\left(\frac{1009}{2017}\right)+f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$=\underbrace{1+1+...+1}_{1008\ so\ hang}+\frac{16}{16+4}=1008+\frac{4}{5}=\frac{5044}{5}.$$

Câu 162: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2017}{2017}\right)$.

A. 336. **B.** 1008. **C.** $\dfrac{4039}{12}$. **D.** $\dfrac{8071}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét: $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}-2}{9^{1-x}+3}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy ta có:

$$P=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+...+f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f\left(\frac{2017}{2017}\right)=\sum_{1}^{1008}\left[f\left(\frac{k}{2017}\right)+f\left(1-\frac{k}{2017}\right)\right]+f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$\Leftrightarrow P=\sum_{1}^{1008}\frac{1}{3}+f\left(1\right)=336+\frac{7}{12}=\frac{4039}{12}.$$

Câu 163: Cho a,b là các số thực và $f\left(x\right)=a\ln^{2017}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+bx\sin^{2018}x+2$. Biết $f\left(5^{\log_c 6}\right)=6$, tính giá trị của biểu thức $P=f\left(-6^{\log_c 5}\right)$ với $0<c\neq 1$

A. $P=-2$ **B.** $P=6$ **C.** $P=4$ **D.** $P=2$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $5^{\log_c 6}=6^{\log_c 5}=x\Rightarrow -6^{\log_c 5}=-x$

Khi đó $f\left(-x\right)=a.\ln^{2017}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-bx\sin^{2018}x+2$

$$=a.\ln^{2017}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-bx\sin^{2018}x+2=-\left[a.\ln^{2017}\left(\sqrt{x^2+1}\right)+bx\sin^{2018}x+2\right]+4$$

Mặt khác $f\left(x\right)=6\rightarrow P=f\left(-x\right)=-f\left(x\right)+4=-6+4=-2$

Câu 164: Cho $f\left(x\right)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f\left(1\right).f\left(2\right).f\left(3\right)...f\left(2017\right)=e^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=2018$. **B.** $m-n^2=-2018$. **C.** $m-n^2=1$. **D.** $m-n^2=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Xét các số thực $x>0$

Ta có: $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2\left(x+1\right)^2}}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}=1+\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Vậy, $f\left(1\right).f\left(2\right).f\left(3\right)...f\left(2017\right)=e^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)}=e^{2018-\frac{1}{2018}}=e^{\frac{2018^2-1}{2018}}$, hay $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2018^2-1}{2018}$

Ta chứng minh $\dfrac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản. Giả sử d là ước chung của 2018^2-1 và 2018

Khi đó ta có $2018^2-1 \vdots d$, $2018 \vdots d \Rightarrow 2018^2 \vdots d$ suy ra $1 \vdots d \Leftrightarrow d=\pm 1$

Suy ra $\dfrac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m=2018^2-1, n=2018$. Vậy $m-n^2=-1$.

Câu 165: Cho hàm số $f(x)=\left(x^2+3x+2\right)^{\cos(2017\pi x)}$ và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức tổng quát $u_n=\log f(1)+\log f(2)+...+\log f(n)$. Tìm tổng tất cả các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018}=1$?

A. 21 **B.** 18 **C.** 3 **D.** 2018

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\log f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2017\pi k)\left[\log(k+1)+\log(k+2)\right]=$ $(k\text{chẵn})-(k\text{lẻ})$.

Trường hợp 1: $n=2p$ (Chẵn), khi đó ta có khai triển sau:

$u_n=\left(\log 3+\log 4+...+\log(2p+1)+\log(2p+2)\right)-\left(\log 2+\log 3+...+\log(2p)+\log(2p+1)\right)$

.

Như vậy $\boxed{u_n=\log(p+1)}$ cho nên $u_n^{2018}=1 \Leftrightarrow p=9 \Leftrightarrow \boxed{n=18}$.

Trường hợp 1: $n=2p+1$ (Lẻ), khi đó ta có khai triển sau:

$u_n=\left(\log 3+\log 4+...+\log(2p+1)+\log(2p+2)\right)-\left(\log 2+\log 3+...+\log(2p+2)+\log(2p+3)\right)$

.

Như vậy $\boxed{u_n=-\log(4p+6)}$ cho nên $u_n^{2018}=1 \Leftrightarrow p=1 \Leftrightarrow \boxed{n=3}$.

Kết luận: Tổng các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018}=1$ là 21.

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA HÀM MŨ, HÀM LÔGARIT MỘT BIẾN SỐ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 166: Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau **không đúng**?

A. Hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$.

B. Hàm số $y=e^x$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $y=\log_2 x$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[1;5)$.

D. Hàm số $y=2^x$ có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $[-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Vì hàm số $y=e^x$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 167: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên $\left[1;e^3\right]$.

A. $\max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{4}{e^2}$. **B.** $\max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{1}{e}$. **C.** $\max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{9}{e^3}$. **D.** $\max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{\ln^2 2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $y'=\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}\right)'=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[1,e^3]\\x=e^2\in[1,e^3]\end{array}\right.$.

$y(1)=0$; $y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$; $y(e^3)=\dfrac{9}{e^3}$. Vậy $\max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{4}{e^2}$.

Câu 168: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(2-\ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là

A. $\max\limits_{[2;3]} y=e$. **B.** $\max\limits_{[2;3]} y=-2+2\ln 2$. **C.** $\max\limits_{[2;3]} y=4-2\ln 2$. **D.** $\max\limits_{[2;3]} y=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $y'=2-\ln x-1=1-\ln x$; $y'=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e\in[2;3]$.

Khi đó: $y(2)=4-2\ln 2$; $y(3)=6-3\ln 3$; $y(e)=e$. Do đó: $\max\limits_{[2;3]} y=e$.

Câu 169: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^2e^x$ trên đoạn $[-1;1]$?

A. e **B.** $\dfrac{1}{e}$ **C.** $2e$ **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn A. Trên đoạn $[-1;1]$, ta có $f'(x)=xe^x(x+2)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$ (loại)

Ta có: $f(-1)=\dfrac{1}{e}$; $f(0)=0$; $f(1)=e$. Suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=e$.

VẬN DỤNG

Câu 170: Cho hai số thực x,y phân biệt thỏa mãn $x,y\in(0;2018)$.

Đặt $S=\dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{2018-y}-\ln\dfrac{x}{2018-x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\ge\dfrac{2}{1009}$ **B.** $S\le\dfrac{2}{1009}$ **C.** $S\ge\dfrac{4}{1009}$ **D.** $S\le\dfrac{4}{1009}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo định lý Lagrange ta có:

$$S=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(u)=\frac{2018}{u(2018-u)}\ge\frac{2018}{\left(\frac{u+2018-u}{2}\right)^2}=\frac{2}{1009}.$$

Trong đó $f(t)=\ln\left(\dfrac{t}{2018-t}\right)$ và u là số nằm giữa x và y.

Câu 171: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $b<4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4^ab^{2a}}{(4^a-b^a)^3}+\dfrac{7.4^{a-2}}{b^a}$ là $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $S=m+n$.

A. 43. **B.** 33. **C.** 23. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Biến đổi biểu thức và đặt $x=\left(\dfrac{4}{b}\right)^a$ $(x>1)$ ta có

$$P=\frac{\left(\frac{4}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{4}{b}\right)^a-1\right)^3}+\frac{7}{16}\left(\frac{4}{b}\right)^a=f(x)=\frac{x}{(x-1)^3}+\frac{7}{16}x\ge\min_{(1;+\infty)}f(x)=f(3)=\frac{27}{16}.$$

Câu 172: Với giá trị nào của x để hàm số $y=2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}$ có giá trị lớn nhất?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Tập xác định của hàm số $y=2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}$ là $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\left(2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}\right)'=\left(\frac{2}{x\ln 3}-\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}\right)2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}.\ln 2=\left(\frac{2-2\log_3 x}{x\ln 3}\right)2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}.\ln 2$.

$y'=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{x\ln 3}-\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}\right)2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}.\ln 3=0\Leftrightarrow\log_3 x=1\Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Dựa và bảng biến thiên ta có hàm số $y=2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x=3$.

Câu 173: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(20x^2+20x-1283\right)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là

A. -1283. **B.** $-163.e^{280}$. **C.** $157.e^{320}$. **D.** $-8.e^{300}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $y'=(40x+20)e^{40x}+\left(20x^2+20x-1283\right)40e^{40x}=\left(800x^2+840x-51300\right)e^{40x}$

$y'=0\Rightarrow x=-\frac{342}{40};x=\frac{300}{40}$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		$-\frac{342}{40}$		$\frac{300}{40}=7,5$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$y(7)=-163.e^{280};y(8)=157.e^{320}$. Vậy $\min y=-163.e^{280}$.

Câu 174: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$. Gọi $M;N$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tích $M.N$ là:

A. $2\sqrt{7}+4\ln 5$. **B.** $2\sqrt{7}-4\ln 2$. **C.** $2\sqrt{7}-4\ln 5$. **D.** $2\sqrt{7}+4\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-(\ln x+1)=\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x$.

Do $\sqrt{x^2+3}>|x|\Rightarrow x-\sqrt{x^2+3}<x-|x|\le 0\Leftrightarrow\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}<0$.

Và $x\ge 1\Rightarrow\ln x\ge 0\Rightarrow-\ln x\le 0$.

Do đó $y'=\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x<0$. Nên hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.

Khi đó $M=y(1)=2;\ N=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2$. Vậy $M.N=2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Câu 175: Tìm giá trị lớn nhất của $y=2^{sin^2x}+2^{cos^2x}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\sin^2 x$, $t\in[0;1]$. Tìm GTLN của $y=2^t+2^{1-t}$ trên $[0;1]$.

$y'=2^t\ln2-2^{1-t}\ln2=0 \Leftrightarrow 2^t=2^{1-t} \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. $f(0)=3$; $f(1)=3$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]} y=3$.

Câu 176: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left(\sqrt{\pi}\right)^{\sin 2x}$ trên $\mathbb{R}$ bằng?

A. $\sqrt{\pi}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** π.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Với mọi số thực x, ta có $\sin 2x\le 1$ và $y=\left(\sqrt{\pi}\right)^{\sin 2x}\le\sqrt{\pi}$. Lại có $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\pi}$.

Suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\sqrt{\pi}$.

Câu 177: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2^x+2^{2-x}$ là:

A. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=4$. **B.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-4$. **C.** Đáp án khác. **D.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $f(x)=2^x+2^{2-x}=2^x+\frac{4}{2^x}\ge 2\sqrt{2^x.\frac{4}{2^x}}=4$. Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(1)=4$

Câu 178: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x(2-\ln x)$ trên $[2;3]$ là

A. 1. **B.** $4-2\ln 2$. **C.** e. **D.** $-2+2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $f'(x)=1-\ln x$, cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$

Khi đó: $f(2)=4-2\ln 2$, $f(3)=6-3\ln 3$ và $f(e)=e$. Nên $\min\limits_{[2;3]} f(x)=4-2\ln 2$.

Câu 179: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2-2\ln x$ trên $\left[e^{-1};e\right]$ là

A. $M=e^2-2, m=e^{-2}+2$. **B.** $M=e^{-2}+2, m=1$.

C. $M=e^{-2}+1, m=1$. **D.** $M=e^2-2, m=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số $y=x^2-2\ln x$ xác định và liên tục trên $\left[e^{-1};e\right]$

$y'=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$, cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin\left[e^{-1};e\right]\\x=1\in\left[e^{-1};e\right]\end{array}\right.$

Ta có: $y\left(e^{-1}\right)=e^{-2}+2$, $y(1)=1$, $y(e)=e^2-2$. Vậy $M=e^2-2, m=1$.

Câu 180: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2\ln x$ trên đoạn $[1;2]$.

A. $\min\limits_{[1;2]} y=-\frac{1}{2e}$. **B.** $\min\limits_{[1;2]} y=\frac{1}{e}$. **C.** $\min\limits_{[1;2]} y=-\frac{1}{e}$. **D.** $\min\limits_{[1;2]} y=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y=x^2\ln x\Rightarrow y'=2x\ln x+x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1,2]\\x=e^{-1/2}\notin[1,2]\end{array}\right.$

$y(1)=0; y(2)=4\ln 2\Rightarrow \min\limits_{[1,2]} y=0$

Câu 181: Cho hàm số $y=\ln x-\frac{1}{2}x^2+1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $M=\frac{1}{2}$. **B.** $M=\ln 2-1$. **C.** $M=\frac{7}{8}-\ln 2$. **D.** $M=\frac{7}{8}+\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $y=f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+1$. TXĐ $D=\left[\frac{1}{2};2\right]$ thì $f(x)$ liên tục trên D.

$y=\ln x-\frac{1}{2}x^2+1\Rightarrow y'=\frac{1}{x}-x$, $y'=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left(\frac{1}{2};2\right)\\x=-1\notin\left(\frac{1}{2};2\right)\end{array}\right.$

$f(1)=\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{7}{8}$; $f(2)=\ln 2-1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ là $\frac{1}{2}$

Câu 182: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^x\left(x^2-x-5\right)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng:

A. $-5e^3$. **B.** $7e^{-3}$. **C.** $2e^3$. **D.** e^3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $y=e^x\left(x^2-x-5\right)\Rightarrow y'=e^x\left(x^2-x-5\right)+e^x(2x-1)=e^x\left(x^2+x-6\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-3\end{array}\right.$ $f(1)=-5e$, $f(2)=-3e^2$, $f(3)=e^3$. Vậy $\max y=e^3$.

Câu 183: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{|x|}$ trên $[-2;2]$?

A. $\max y=4;\min y=-\frac{1}{4}$ **B.** $\max y=4;\min y=\frac{1}{4}$

C. $\max y=1;\min y=\frac{1}{4}$ **D.** $\max y=4;\min y=1$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=|x|$, với $x\in[-2;2]\Rightarrow t\in[0;2]$

Xét hàm $f(t)=2^t$ trên đoạn $[0;2]$; $f(t)$ đồng biến trên $[0;2]$

$\max\limits_{[-2;2]} y=\max\limits_{[0;2]} f(t)=4$; $\min\limits_{[-2;2]} y=\min\limits_{[0;2]} f(t)=1$

Hoặc với $x\in[-2;2]\Rightarrow|x|\in[0;2]$. Từ đây, suy ra: $2^0\le 2^{|x|}\le 2^2\Leftrightarrow 1\le 2^{|x|}\le 4$

Câu 184: Hàm số $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$ trên đoạn $[1;2]$. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là

A. $4\ln 2-4\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{7}-4\ln 2$. **C.** $4\ln 2-2\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Xét trên $[1;2]$ hàm số liên tục, $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x-1<0$, $\forall x\in[1;2]$

Nên $\max\limits_{x\in[1;2]} y=y(1)=2$ và $\min\limits_{x\in[1;2]} y=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2$. Do đó: $\max\limits_{x\in[1;2]} y.\min\limits_{x\in[1;2]} y=2\sqrt{7}-4\ln 2$

VẬN DỤNG CAO

Câu 185: Tìm tất cả giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{4^{\sin x}+6^{m+\sin x}}{9^{\sin x}+4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

A. $m\ge\log_6\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge\log_6\frac{13}{18}$. **C.** $m\le\log_6 3$. **D.** $m\le\log_6\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn gải:

Chọn A. Hàm số viết lại $f\left(x\right)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\sin x}+6^m\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sin x}}{1+4.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\sin x}}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sin x}\Rightarrow f\left(t\right)=\dfrac{t^2+nt}{1+4t^2}$ với $\begin{cases}\dfrac{2}{3}\le t\le\dfrac{3}{2}\\ n=6^m>0\end{cases}$.

Bài toán trở thành "Tìm $n>0$ để bất phương trình $f\left(t\right)\ge\dfrac{1}{3}$ có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$".

Ta có $f\left(t\right)\ge\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{t^2+nt}{1+4t^2}\ge\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow t^2+1\le 3nt\xleftrightarrow{t\in\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]}n\ge\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3t}$.

Xét hàm $g\left(t\right)=\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3t}$ trên đoạn $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$, ta có $\min\limits_{\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]}g\left(t\right)=g\left(1\right)=\dfrac{2}{3}$.

Để bất phương trình $f\left(t\right)\ge\dfrac{1}{3}$ có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$ thì bất phương trình $g\left(t\right)\le n$ phải có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]\Leftrightarrow n\ge\min\limits_{\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]}g\left(t\right)\Rightarrow n\ge\dfrac{2}{3}\Rightarrow 6^m\ge\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m\ge\log_6\dfrac{2}{3}$.

Câu 186: Cho cấp số cộng $\left(a_n\right)$; cấp số nhân $\left(b_n\right)$ thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0; b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ sao cho $f\left(a_2\right)+2=f\left(a_1\right)$ và $f\left(\log_2 b_2\right)+2=f\left(\log_2 b\right)$. Số nguyên dương $n>1$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $b_n>2018a_n$ là?

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

Hướng dẫn giải

Tính bảng biến thiên:

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘	0	↘	-2	↗ $+\infty$

Chọn A.

Vì $f\left(a_2\right)<f\left(a_1\right)\Rightarrow a_1,a_2\in\left(0;1\right)$ và $a_2=1;a_1=0$. Tương tự $\log_2 b_2=1$ và $\log_2 b_1=0$.

Khi đó $a_n=n-1$ và $b_n=2^{n-1}$. Vậy $b_n>2018a_n\Leftrightarrow 2^{n-1}>2018\left(n-1\right)$.

Câu 187: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{9^x}{9^x+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f\left(a\right)+f\left(b\right)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2\left(a+b-1\right)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 81 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -9

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo giả thiết ta có: $e^{a+b-2}\le a+b-1\Leftrightarrow e^{a+b-2}\le 1+\left(a+b-2\right)$.

Mặt khác ta có: $e^{a+b-2}\ge 1+\left(a+b-2\right)$.

Do đó dấu bằng phải xảy ra $\Leftrightarrow a+b-2=0\Leftrightarrow a+b=2$.

Câu 188: Cho $a>1$. Biết khi $a=a_0$ thì bất đẳng thức $x^a\le a^x$ đúng với mọi $x\in\left(1;+\infty\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < a_0 < 2$. **B.** $e < a_0 < e^2$. **C.** $2 < a_0 < 3$. **D.** $e^2 < a_0 < e^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có bất đẳng thức tương đương với $\ln\left(x^a\right) \le \ln\left(a^x\right) \Leftrightarrow a\ln x \le x\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \ge \frac{\ln x}{x}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ta có $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Suy ra $f(x) \le \frac{\ln a}{a} = \max\limits_{(1;+\infty)} f(x) = f(e) = \frac{\ln e}{e} \Rightarrow a = e$.

BÀI TOÁN LÃI SUẤT – TRẢ GÓP

1. Lãi đơn

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $V_n = V_0(1 + r.n)$

Trong đó:

V_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

V_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần: $T_n = T_0(1 + r)^n$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

b. Lãi kép liên tục: $T_n = T_0.e^{nr}$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

c. Lãi kép, gửi định kỳ.

● ***Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.***

Bài toán 1: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$

Chứng minh

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r)+m$
3	$m(1+r)+m$	$m(1+r)^2+m(1+r)+m$
…	…	…
n		$m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m$

Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n = m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m \;= m\left[(1+r)^{n-1}+...+(1+r)+1\right]$

Ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1 = 1,\;\; u_n = (1+r)^{n-1},\;\; q = 1+r$

Ta biết rằng: $S_n = u_1 + ... + u_n = u_1.\dfrac{q^n-1}{q-1}$ nên $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$.

Bài toán 2: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng *m* triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau *n* (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng *m* là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \dfrac{Ar}{(1+r)^n - 1}$

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên $A = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] \Leftrightarrow m = \dfrac{Ar}{(1+r)^n - 1}$.

Bài toán 3: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng *m* triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau *n* (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm *n* là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$.

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên $A = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] \Leftrightarrow m = \dfrac{Ar}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{Ar}{m}+1 \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$

Như vậy trong trường hợp một này ta cần nắm vững công thức Bài toán 1 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 2, Bài toán 3.

- ***Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.***

Bài toán 4: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng *m* triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau *n* (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$

Chứng minh:

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r)+m$	$m(1+r)^2+m(1+r)$
3	$m(1+r)^2+m(1+r)+m$	$m(1+r)^3+m(1+r)^2+m(1+r)$
…	…	…
n	…	$m(1+r)^n+...+m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n = m(1+r)^n + ... + m(1+r) = m\left[(1+r)^n + ... + (1+r)\right] = m(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Bài toán 5: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 4. Ta có số tiền thu được là: $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên $A = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) \Leftrightarrow m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$.

Bài toán 6: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r}\left[\dfrac{Ar}{m(1+r)} + 1\right]$.

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 4. Ta có: số tiền thu được là: $T_n = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên $A = \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) \Leftrightarrow m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{Ar}{m(1+r)} + 1$.

$\Rightarrow n = \log_{1+r}\left[\dfrac{Ar}{m(1+r)} + 1\right]$.

Như vậy trong trường hợp này ta cần nắm vững công thức bài toán 4 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 5, bài toán 6.

- ***Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.***

Bài toán 7: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Chứng minh:

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A-m$	$(A-m)(1+r)=A(1+r)-m(1+r)$
2	$A(1+r)-m(1+r)-m$	$A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)$
3	$A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)-m$	$A(1+r)^3-m(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)$
…	…	…
n	…	$A(1+r)^n-m(1+r)^n-...-m(1+r)^2-m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n=A(1+r)^n-m(1+r)^n-...-m(1+r)^2-m(1+r)=A(1+r)^n-m\left[(1+r)^n+...+(1+r)\right]$$

$$=A(1+r)^n-m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

● *Trường hợp vay nợ và trả định kì cuối tháng.*

Bài toán 8: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năn) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n=A(1+r)^n-m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$

Chứng minh:

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	A	$A(1+r)-m$
2	$A(1+r)-m$	$A(1+r)^2-m(1+r)^2-m$
3	$A(1+r)^2-m(1+r)-m$	$A(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m$
…	…	…
n	…	$A(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-...-m(1+r)-m$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n=A(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-...-m(1+r)-m=A(1+r)^n-m\left[(1+r)^{n-1}+...+(1+r)+1\right]$$

$$=A(1+r)^n-m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

Sau đây cùng tìm hiểu cách áp dụng các lý thuyết vào các bài toán tính tiền lãi, tiền nợ phải trả như thế nào ?

VẬN DỤNG

Câu 189: Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất $0,4\%$ giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

A. 172 triệu. **B.** 72 triệu. **C.** $167,3042$ triệu. **D.** $104,907$ triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6.12 = 72$ triệu đồng

Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1-0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng

Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là $167,3042$ triệu đồng

Câu 190: Bác B gởi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $0,72\%$ tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gởi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất $0,78\%$ tháng. Sau khi gởi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gởi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là $57.694.945,55$ đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gởi thêm lãi suất là

A. $0,55\%$. **B.** $0,3\%$. **C.** $0,4\%$. **D.** $0,5\%$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Số tiền bác B rút ra sau năm đầu: $T_1 = 50.000.000*\left(1+0,0072*3\right)^4$

Số tiền bác B rút ra sau sáu tháng tiếp theo: $T_2 = T_1*\left(1+0,0078*6\right)$

Số tiền bác B rút ra sau ba tháng tiếp theo:

$$T_3 = T_2*\left(1+r\right)^3 = 57.694.945,55 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{57.694.945,55}{T_2}} - 1 \approx 0,004 = 0,4\%.$$

Câu 191: Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

A. 46794000 đồng. **B.** 44163000 đồng. **C.** 42465000 đồng. **D.** 41600000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Tổng số tiền bạn Nam vay (gốc và lãi) sau 4 năm là:

$$A = 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04)$$

$$= 10^6(1+0,04)[1+(1+0,04)+(1+0,04)^2+(1+0,04)^3] = 10^6(1+0,04).\frac{1-(1+0,04)^4}{1-(1+0,04)} = 44163256$$

Nên $A = 44163000$ đồng

Câu 192: Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là $8.000.000$ đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền T (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc.

A. $633.600.000$. **B.** $635.520.000$. **C.** $696.960.000$. **D.** $766.656.000$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Lương 2 năm đầu tiên của công nhân đó nhận được là $T_1 = 8.10^6.24 = 192.10^6$ (đồng)

Theo công thức tính lãi kép, lương 2 năm tiếp theo công nhân đó nhận được:

$T_2 = 24.8.10^6.\left(1+10\%\right)^1 = 212,2.10^6$ (đồng)

Lương 2 năm cuối cùng công nhân đó nhận được:

$T_3 = 24.8.10^6.\left(1+10\%\right)^2 = 232,32.10^6$ (đồng)

Tổng số tiền T (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc:

$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635,520,000$ (đồng).

Câu 193: Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm $4.000.000$ đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm $7\%/1$ tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

A. $1.287.968.000$ đồng **B.** $1.931.953.000$ đồng.
C. $2.575.937.000$ đồng. **D.** $3.219.921.000$ đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi a là số tiền lương khởi điểm, r là lương được tăng thêm.

+ Số tiền lương trong ba năm đầu tiên: $36a$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36\left[a+a.r\right]=36a\left(1+r\right)^1$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36a\left(1+r\right)^2$ …

+ Số tiền lương trong ba năm cuối: $36a\left(1+r\right)^{11}$.

Vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được:

$\left[1+\left(1+r\right)^1+\left(1+r\right)^2+\left(1+r\right)^3+...+\left(1+r\right)^{11}\right].a.36=2.575.936983\simeq 2.575.937.000$ đồng.

Câu 194: Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi a là số tiền người đó gửi ban đầu

Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau N năm là $T=a(1+0,03)^{\frac{N}{4}}$

$\frac{T}{a}=3\Leftrightarrow(1+0,03)^{4N}=3\Leftrightarrow 4N.\ln 1,03=\ln 3\Rightarrow N=\frac{\ln 3}{4\ln 1,03}\approx 9,29$

Câu 195: Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,65\%$ mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

A. 29 tháng. **B.** 27 tháng. **C.** 26 tháng. **D.** 28 tháng.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi A là số tiền vay, a là số tiền gửi hàng tháng r là lãi suất mỗi tháng.

Đến cuối tháng thứ n thì số tiền còn nợ là:

$$T=A\left(1+r\right)^n-a\left[\left(1+r\right)^{n-1}+\left(1+r\right)^{n-2}+...+1\right]=A\left(1+r\right)^n-\frac{a\left[\left(1+r\right)^n-1\right]}{r}$$

Hết nợ đồng nghĩa $T=0$

$$\Leftrightarrow A\left(1+r\right)^n-\frac{a\left[\left(1+r\right)^n-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow\frac{a-Ar}{r}\left(1+r\right)^n=\frac{a}{r}\Leftrightarrow n=\log_{1+r}\frac{a}{a-Ar}$$

Áp dụng với $A=1$ (tỷ), $a=0,04$ (tỷ), $r=0,0065$ ta được $n\approx 27,37$. Vậy cần trả 28 tháng

Câu 196: Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,5\%$ một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

A. 46 tháng. **B.** 45 tháng. **C.** 44 tháng. **D.** 47 tháng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Sau 1 tháng, người đó nhận được $100+100.0,5\%$ (triệu đồng)$=100.1,005^1$ triệu đồng.

Sau 2 tháng, người đó nhận được:

$100.1,005+100.1,005.0,005=100.1,005\left(1+0,005\right)=100.\left(1,005\right)^2$ triệu đồng

Sau n tháng, người đó nhận được: $100.\left(1,005\right)^n$ triệu đồng.

Theo đề: $100.\left(1,005\right)^n>125\Leftrightarrow n>\log_{1,005}1,25=44,7$ tháng.

Vậy sau 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Câu 197: Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1,55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là $6,9\%$ / năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

A. Năm 2019. **B.** Năm 2020. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2022.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Số tiền người gửi tiết kiệm sau n năm là $x\left(1+6,9\%\right)^n$

Ta cần tìm n để $x\left(1+6,9\%\right)^n=1,55x \Leftrightarrow \left(1+6,9\%\right)^n=1,55 \Leftrightarrow n\approx 6,56...$

Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi trọn 7 kỳ hạn, tức là 7 năm.

Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết.

Câu 198: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất $0,5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

A. 47 tháng. **B.** 46 tháng. **C.** 45 tháng. **D.** 44 tháng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. - Số tiền cả vốn lẫn lãi người gởi có sau n tháng là

$S=100(1+0,005)^n=100.1,005^n$ (triệu đồng) $\Rightarrow 1,005^n=\dfrac{S}{100}\Rightarrow n=\log_{1,005}\dfrac{S}{100}$.

- Để có số tiền $S=125$ (triệu đồng) thì phải sau thời gian

$n=\log_{1,005}\dfrac{S}{100}=\log_{1,005}\dfrac{125}{100}\approx 44,74$ (tháng)

- Vậy sau ít nhất 45 tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Câu 199: Ông Nam gởi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

Tháng 1 $\left(t=1\right)$: $T_1=a\left(1+r\right)$

Tháng 2 $\left(t=2\right)$: $T_2=a\left(1+r\right)^2$

……………….

Tháng $n\left(t=n\right)$: $T_n=a\left(1+r\right)^t$

$$T_n=a\left(1+r\right)^t\Rightarrow t=\frac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln\left(1+r\right)}=\frac{\ln\frac{140}{100}}{\ln\left(1+1\%\right)}\approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n>\dfrac{t}{12}\approx 2,818$. Vậy $n=3$.

Câu 200: Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay $3.000.000$ đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng. **B.** 309604 đồng. **C.** 215456 đồng. **D.** 232289 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$s = 3000000\left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)\right] = 12927407,43$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là $12.927.407,43$ đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức $\Rightarrow \mathrm{T} = \dfrac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} = \dfrac{12927407,4(1+0,0025)^{60}.0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289$

Câu 201: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất $6,5\%$ / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 11 năm. **B.** 9 năm. **C.** 8 năm. **D.** 12 năm.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi là x số tiền gởi ban đầu.

Giả sử sau n năm số tiền vốn và lãi là $2x$.

Ta có $2x \approx x.(1,065)^n \Leftrightarrow (1,065)^n \approx 2 \Leftrightarrow n \approx \log_2 1,065 \Leftrightarrow n \approx 11$.

Câu 202: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

A. 45 tháng. **B.** 47 tháng. **C.** 44 tháng. **D.** 46 tháng.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần: $N = A(1+r)^n$, Với $A = 100.10^6$ và $r = 0,5\%$

Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho: $10^8(1+0,5\%)^n > 125.10^6$

$\Leftrightarrow (1+0,5\%)^n > \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow n > \log_{\frac{201}{200}} \dfrac{5}{4} \approx 44,74$

Câu 203: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lại suất $\dfrac{5}{12}\%$ tháng ?

A. Nhiều hơn. **B.** Ít hơn. **C.** Không thay đổi. **D.** Không tính được.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau một tháng sẽ là: a(1 + r)

Sau n tháng số tiền cả gốc lãi là: $T = a(1 + r)^n$

Số tiền sau 10 năm với lãi suất 5% một năm :

$$10\ 000\ 000(1+5\%)^{10} = 16\ 288\ 946,27 \text{ đ}$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất $\dfrac{5}{12}\%$ tháng :

$$10\ 000\ 000\left(1+\frac{5}{12}\%\right)^{120} = 16470094,98 \text{ đ}$$

Vậy số tiền gửi theo lãi suất $\dfrac{5}{12}\%$ tháng nhiều hơn : 1 811 486,7069 đ.

Câu 204: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng A với số tiền là 100 triệu đồng với lãi suất mỗi quý (3 tháng) là $2,1\%$. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi quý. Sau 2 năm người đó vẫn tiếp tục gửi tiết kiệm số tiền thu được từ trên nhưng với lãi suất $1,1\%$ mỗi tháng. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi tháng. Hỏi sau 3 năm kể từ ngày gửi tiết kiệm vào ngân hàng A người đó thu được số tiền gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $134,65$ triệu đồng **B.** $130,1$ triệu đồng **C.** $156,25$ triệu đồng **D.** $140,2$ triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có 2 năm có 8 quý.

Tổng số tiền người đó thu được sau 3 năm: $100000000 \times (1,021)^8 \times (1,011)^{12} \approx 134654169$ đồng.

Câu 205: Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được tính cả gốc lẫn lãi là

A. $10^8.(1+0,07)^{10}$. **B.** $10^8.0,07^{10}$. **C.** $10^8.(1+0,7)^{10}$. **D.** $10^8.(1+0,007)^{10}$.

Chọn A. Theo công thức lãi kép $C=A(1+r)^N$ với giả thiết

$$A=100.000.000=10^8; r=7\%=0,07 \text{ và } N=10.$$

Vậy số tiền nhận được … $10^8.(1+0,07)^{10}$

Câu 206: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $C=100(1+0,12)^n$

Số tiền lãi thu được sau n năm là $L=100(1+0,12)^n-100$

$$L > 40 \Leftrightarrow 100(1+0,12)^n-100>40 \Leftrightarrow 1,12^n>\frac{7}{5} \Leftrightarrow n>\log_{1,12}\frac{7}{5}\approx 2,97.$$

Câu 207: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A. 726,74 triệu. **B.** 71674 triệu. **C.** 858,72 triệu. **D.** 768,37 triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu	Tổng lương 3 năm đầu: 36. 1
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$
Mức lương 2 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$	Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$

Tổng lương sau tròn 20 năm là $S=36\left[1+\left(1+\frac{2}{5}\right)+\left(1+\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(1+\frac{2}{5}\right)^5\right]+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$

$$=36.\frac{1\left[1-\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\right]}{1-\left(1+\frac{2}{5}\right)}+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\approx 768,37$$

Câu 208: Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16 **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $x\left(x>0\right)$ là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài thì sau 1 năm, giá trị tiền tệ sẽ còn $0,9x$.

Cuối năm 1 còn $0,9x$

Cuối năm 2 còn $0,9.0,9x=0,9^2x$

…

Cuối năm n còn $0,9^nx$

Ycbt $\Leftrightarrow 0,9^nx=0,1x\Rightarrow n\approx 21,58$. Vì n nguyên dương nên $n=22$.

Câu 209: Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x\in\mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 140 triệu đồng. **B.** 154 triệu đồng. **C.** 145 triệu đồng. **D.** 150 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Áp dụng công thức lãi kép: $P_n=x\left(1+r\right)^n$, trong đó

P_n là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

x là vốn gốc.

r là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được số tiền lãi thu được sau n kì là :

$$\boxed{P_n-x=x\left(1+r\right)^n-x=x\left[\left(1+r\right)^n-1\right]}\ (*)$$

Áp dụng công thức (*) với $n=3,r=6,5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng.

Ta được $30=x\left[\left(1+6,5\%\right)^3-1\right]\Rightarrow x\approx 144,27$. Số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

Câu 210: Ngày 01 tháng 6 năm 2016 ông An đem một tỉ đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất 0.5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 6 năm 2017, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

A. $200.\left(1.005\right)^{12}+800$ (triệu đồng). **B.** $1000.\left(1.005\right)^{12}-48$ (triệu đồng).

C. $200.\left(1.005\right)^{11}+800$ (triệu đồng). **D.** $1000.\left(1.005\right)^{11}-48$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Số tiền gửi ban đầu là 1000 (triệu đồng)

Số tiền tiết kiệm của ông An sau tháng thứ n là: $1000.\left(1+0.005\right)^n$ (triệu đồng).

Kể từ ngày gửi cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu, vậy số tiền của ông An sau 12 tháng là $1000.\left(1.005\right)^{12}-48$ (triệu đồng).

Câu 211: Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 3% của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

A. 232 triệu. **B.** 262 triệu. **C.** 313 triệu. **D.** 219 triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Công thức tính lãi suất kép là $A=a\left(1+r\right)^n$.

Trong đó a là số tiền gửi vào ban đầu, r là lãi suất của một kì hạn (có thể là tháng; quý; năm), n là kì hạn.

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần đầu được gửi là 18 tháng, tương ứng với 6 quý.

Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần đầu là

$A_1 = 100\left(1+\frac{3}{100}\right)^6$ (triệu).

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần hai được gửi là 12 tháng, tương ứng với 4 quý. Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần hai là

$A_2 = 100\left(1+\frac{3}{100}\right)^4$ (triệu).

Vậy tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai là

$A = A_1 + A_2 = 100\left(1+\frac{3}{100}\right)^6 + 100\left(1+\frac{3}{100}\right)^4 \approx 232$ triệu.

Câu 212: Một người gửi tiền tiết kiệm 200 triệu đồng vào một ngân hàng với kỳ hạn một năm và lãi suất 8,25% một năm, theo thể thức lãi kép. Sau 3 năm tổng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được là *(làm tròn đến hàng nghìn)*

A. 124,750 triệu đồng. **B.** 253,696 triệu đồng.
C. 250,236 triệu đồng. **D.** 224,750 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Số tiền người gửi nhận được sau 3 năm cả gốc lẫn lãi là

$S_3 = 200(1+8,25\%)^3 = 253,696$ triệu đồng.

Câu 213: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi)

A. 4 năm 1 quý **B.** 4 năm 2 quý **C.** 4 năm 3 quý **D.** 5 năm

Hướng dẫn giải

Chọn A. Số tiền của người ấy sau n kỳ hạn là $T = 15\left(1+\frac{1,65}{100}\right)^n$.

Theo đề bài, ta có $15\left(1+\frac{1,65}{100}\right)^n > 20 \Leftrightarrow n > \log_{1+\frac{1,65}{100}} \frac{4}{3} \approx 17,56$

Câu 214: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\% / năm$, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

A. $13\% / năm$. **B.** $14\% / năm$. **C.** $12\% / năm$. **D.** $15\% / năm$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Công thức tính tiền vay lãi kép $T_n = a(1+x)^n$.

Trong đó a: số tiền vay ban đầu, x: lãi suất $x\% / năm$, n: số năm $\Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$

Vậy $x = \sqrt{\frac{1\,058}{800}} - 1 = 0,15$ tức là $15\% / năm$

Câu 215: Một người có số tiền là 20.000.000 đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8,5% / năm. Vậy sau thời gian 5 năm 8 tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến 100 đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0,01% một ngày. (1 tháng tính 30 ngày).

A. 31.802.700 đồng **B.** 30.802.700 đồng **C.** 32.802.700 đồng **D.** 33.802.700 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn A. Lãi suất 8,5% / năm tương ứng với $\frac{8,5}{2}\% / 6$ tháng.

Đổi 5 năm 8 tháng bằng 11x6 tháng +2 tháng. Áp dụng công thức tính lãi suất $P_n = P(1+r)^n$

Số tiền được lĩnh sau 5 năm 6 tháng là $P_{11} = 20.000.000\left(1+\frac{8.5}{200}\right)^{11} = 31.613.071.66$ đồng.

Do hai tháng còn lại rút trước hạn nên lãi suất là 0,01% một ngày.

Suy ra số tiền được lĩnh là $T = P_{11} + P_{11}.\frac{0.01}{100}.60 \approx 31.802.700$ đồng.

VẬN DỤNG CAO

Câu 216: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn $2015-2021$ (6 năm) là $10,6\%$ so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức "ra 2 vào 1" (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến $0,01\%$).

A. $1,13\%$. **B.** $1,72\%$. **C.** $2,02\%$. **D.** $1,85\%$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi x $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$ là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2015.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là: $x \cdot r$.

Số người còn lại sau năm thứ nhất là: $x - x \cdot r = x(1-r)$.

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là: $x(1-r)r$.

Số người còn lại sau năm thứ hai là: $x(1-r) - x(1-r)\cdot r = x(1-r)^2$.

$\Rightarrow$ Số người mất việc sau năm thứ sáu là: $x(1-r)^5 \cdot r$.

Tổng số người mất việc là: $x \cdot r + x\cdot(1-r)\cdot r + x\cdot(1-r)^2\cdot r + ... + x\cdot(1-r)^5\cdot r = 10,6\%x$

$\Leftrightarrow r + (1-r)r + (1-r)^2 r + ... + (1-r)^5 r = 0,106 \Leftrightarrow \frac{r\left[1-(1-r)^6\right]}{1-(1-r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185$.

Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là $1,85\%$.

Câu 217: Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

A. $252.436.000$. **B.** $272.631.000$. **C.** $252.435.000$. **D.** $272.630.000$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi T_n là số tiền vỗn lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền hàng tháng gửi vào ngân hàng và $r(\%)$ là lãi suất kép. Ta có

$T_1 = a.(1+r)$,

$T_2 = (a+T_1)(1+r) = (a + a(r+1))(1+r) = a(1+r) + a(1+r)^2$

$T_3 = (a+T_2)(1+r) = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3$

....

$T_6 = a\left((1+r) + (1+r)^2 + ...(1+r)^6\right) = a.S_6$

S_6 là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với dãy $(u_n) = 1+r = 1,08; q = 1,08$.

$S_6 = \dfrac{u_1\left(1-q^6\right)}{1-q} = \dfrac{1,08\left(1-1,08^6\right)}{1-1,08}$

Theo đề ra $a = \dfrac{T_6}{S_6} = \dfrac{2.10^9}{\dfrac{1,08\left(1-1,08^6\right)}{1-1,08}} = 252435900,4$. Quy tròn đến phần nghìn

Câu 218: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

A. 35 tháng. **B.** 36 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 38 tháng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi a là số tiền vay, r là lãi, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là: $$N_2 = \left[a(1+r)-m\right] + \left[a(1-r)-m\right]r - m$$
$$= a(1+r)^2 - m\left[(1+r)+1\right]$$

….

Số tiền nợ sau n tháng là: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n-1}{r} = 0$.

$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 30\dfrac{(1+0,005)^n-1}{0,0005} = 0 \Leftrightarrow t = 36,55$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

Câu 219: Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định $0,8\%$/ tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

A. 38.400.000 đồng **B.** 10.451.777 đồng **C.** 76.800.000 đồng **D.** 39.200.000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để thuận tiện trong trình bày, tất cả các số tiền dưới đây được tính theo đơn vị triệu đồng.

Số tiền phải trả tháng thứ 1: $\dfrac{200}{48} + 200.0,8\%$.

Số tiền phải trả tháng thứ 2: $\dfrac{200}{48} + \left(200 - \dfrac{200}{48}\right).0,8\% = \dfrac{200}{48} + 47.\dfrac{200}{48}.0,8\%$.

Số tiền phải trả tháng thứ 3: $\dfrac{200}{48} + \left(200 - 2.\dfrac{200}{48}\right).0,8\% = \dfrac{200}{48} + 46.\dfrac{200}{48}.0,8\%$.

Số tiền phải trả tháng thứ 48: $\dfrac{200}{48} + \left(200 - 47.\dfrac{200}{48}\right).0,8\% = \dfrac{200}{48} + 1.\dfrac{200}{48}.0,8\%$.

Suy ra tổng số tiền lãi phải trả là: $1.\dfrac{200}{48}.0,8\% + 2.\dfrac{200}{48}.0,8\% + ... + 47.\dfrac{200}{48}.0,8\% + 200.0,8\%$

$$= \frac{200}{48}.0,8\%(1+2+...+48) = \frac{200}{48}.0,8\%.\frac{48(1+48)}{2} = 39,2$$

Câu 220: Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất $1,15\%$ mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $\dfrac{220.(1,0115)^{12}.0,0115}{(1,0115)^{12}-1}$ (triệu đồng). **B.** $\dfrac{220.(1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12}-1}$ (triệu đồng).

C. $\dfrac{55.(1,0115)^{12}.0,0115}{3}$ (triệu đồng). **D.** $\dfrac{220.(1,0115)^{12}}{3}$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải

Chọn A. Mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng

$$x = \frac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1} = \frac{220(1+1,15\%)^{12}.1,15\%}{(1+1,15\%)^{12}-1} = \frac{220.(1,0115)^{12}.0,0115}{(1,0115)^{12}-1}$$

với $a = 200, r = 1,15\%, n = 12$

Chứng minh công thức tổng quát: Trả góp ngân hàng hoặc mua đồ trả góp

Ta xét bài toán tổng quát sau: Một người vay số tiền là a đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là $r\%$ một tháng *(hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại)*, số tháng vay là n tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người này bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau, số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là x đồng. Tìm công thức tính x? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.

Chứng minh

Gọi P_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n.

Sau tháng thứ nhất số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1+r) = ad$ với $d = 1+r$

Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ nhất*** là: $P_1 = ad - x = ad - x\dfrac{d-1}{d-1}$

Sau tháng thứ hai số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad-x)r = (ad-x)(1+r) = (ad-x)d$

Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** 2 là:

$$P_2 = (ad-x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x\frac{d^2-1}{d-1}$$

Sau tháng thứ ba số tiền gốc và lãi là:

$$ad^2 - x(d+1) + \left[ad^2 - x(d+1)\right]r = \left[ad^2 - x(d+1)\right](1+r) = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d$$

Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** 3 là:

$$P_3 = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2+d+1) = ad^3 - x\frac{d^3-1}{d-1}$$

…………………………………………

Số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** n là: $P_n = ad^n - x\dfrac{d^n-1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$ (5a)

với $d = 1+r$

Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có

$$P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x\frac{d^n-1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ad^n(d-1)}{d^n-1} \Leftrightarrow x = \frac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}$$

Câu 221: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là

A. $101.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng. **B.** $101.\left[(1,01)^{26}-1\right]$ triệu đồng.

C. $100.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng. **D.** $100.\left[(1,01)6-1\right]$ triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân:

Dãy $U_1;U_2;U_3;...;U_n$ được gọi là 1 CSN có công bội q nếu: $U_k=U_{k-1}q$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $s_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là $a=1$ triệu.

+ Đầu tháng 1: người đó có a.

Cuối tháng 1: người đó có $a.(1+0,01)=a.1,01$.

+ Đầu tháng 2 người đó có: $a+a.1,01$.

Cuối tháng 2 người đó có: $1,01(a+a.1,01)=a(1,01+1,01^2)$.

+ Đầu tháng 3 người đó có: $a(1+1,01+1,01^2)$.

Cuối tháng 3 người đó có: $a(1+1,01+1,01^2).1,01=a(1+1,01^2+1,01^3)$.

….

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có: $a(1+1,01+1,01^2+...+1,01^{27})$.

Ta cần tính tổng: $a(1+1,01+1,01^2+...+1,01^{27})$.

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là 1,01 ta được $\dfrac{1-1,01^{27}}{1-0,01}=100.(1,01^{27}-1)$ triệu đồng.

Câu 222: Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhung vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%$/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 232518 đồng. **B.** 309604 đồng. **C.** 215456 đồng. **D.** 232289 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D. + Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:

Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: $3+3r=3(1+r)$

Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: $3(1+r)^2+3(1+r)$

Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:

$$3(1+r)^4+3(1+r)^3+3(1+r)^2+3(1+r)=12927407,43=A$$

+ Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: $A+Ar-T=A(1+r)-T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)-T+\left(A(1+r)-T\right).r-T=A(1+r)^2-T(1+r)-T$

Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là:

$A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\ldots-T(1+r)-T$. Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi

$$A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\ldots-T(1+r)-T=0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\left[(1+r)^{59}+(1+r)^{58}+\ldots+(1+r)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\frac{(1+r)^{60}-1}{1+r-1}=0\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\frac{(1+r)^{60}-1}{r}=0\Leftrightarrow T=\frac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60}-1}\Leftrightarrow T\approx 232.289$$

Câu 223: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 200 triệu đồng, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau một tháng bắt đầu từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 10 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi m mà ông A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{20.(1,01)^{10}}{(1,01)^{10}-1}$ (triệu đồng). **B.** $m=\dfrac{200.(1,12)^{10}}{10}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{20.(1,01)^{10}}{(1,01)^{10}-1}-200$ (triệu đồng). **D.** $m=\dfrac{10.(1.12)^{10}}{(1.12)^{10}-1}-200$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $T=200$ triệu, M là số tiền phải trả hàng tháng mà ông A trả cho ngân hàng

Lãi suất 12% trên năm tương ứng 1% trên tháng, tức là $r=0,01$.

Số tiền gốc sau 1 tháng là: $T+T.r-M=T(1+r)-M$

Số tiền gốc sau 2 tháng là: $T(1+r)^2-M\left[(1+r)+1\right]$

….

Số tiền gốc sau 10 tháng là: $T(1+r)^{10}-M\left[(1+r)^9+(1+r)^8+...+(1+r)+1\right]=0$

Do đó $M=\dfrac{T(1+r)^{10}}{(1+r)^9+(1+r)^8+...+(1+r)+1}$

$=\dfrac{T.(1+r)^{10}.r}{(1+r)^{10}-1}=\dfrac{200.(1+0,01)^{10}.0,01}{(1+0,01)^{10}-1}=\dfrac{2.(1,01)^{10}}{(1,01)^{10}-1}$ (triệu đồng)

$\Rightarrow$ Tổng số tiền lại phải trả cho ngân hàng là: $m=10M=\dfrac{20.(1,01)^{10}}{(1,01)^{10}-1}-200$ (triệu đồng)

Câu 224: Thầy X gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,7\%$/tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành $1,15\%$/tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn $0,9\%$/tháng. Thầy X tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vỗn lẫn lãi được $5787710,707$ đồng. Hỏi thầy X đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

A. 18 tháng. **B.** 17 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 15 tháng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. ☑ Gọi a là số tháng mà thầy X gởi tiền với lãi suất 0,7%.

Gọi b là số tháng mà thầy X gởi tiền với lãi suất 0,9%.

☑ Theo đề bài, ta có phương trình:

$5000000(1+0,7\%)^a.(1+1,15\%)^6.(1+0,9\%)^b=5787710,707 \quad (*)$

$\Leftrightarrow (1+0,7\%)^a.(1+0,9\%)^b=1,080790424 \Rightarrow \begin{cases}0<a<\log_{1,007}1,080790424\\0<b<\log_{1,009}1,080790424\\a,b\in N\end{cases}$

$\Rightarrow \log_{1,009}1,080790424<a+b<\log_{1,007}1,080790424 \Rightarrow 9\le a+b\le 11$

☑ Với $a+b=9$, thử $a,b\in N$ ta thấy (*) không thoả mãn.

Với $a+b=10$, thử $a,b\in N$ ta được $a=6;b=4$ thoả mãn (*).

Với $a+b=11$, thử $a,b\in N$ ta thấy (*) không thoả mãn.

☑ Vậy thầy X gởi tổng thời gian là 16 tháng.

Câu 225: Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất $0,5\%$ một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

A. $800.(1,005)^{11}-72$ (triệu đồng). **B.** $1200-400.(1,005)^{12}$ (triệu đồng).

C. $800.(1,005)^{12}-72$ (triệu đồng). **D.** $1200-400.(1,005)^{11}$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ ngày 01 tháng 01 năm 2017 đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, ông An gửi được tròn 12 tháng.

Gọi a là số tiền ban đầu, r là lãi suất hàng tháng, n là số tháng gửi, x là số tiền rút ra hàng tháng, P_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Khi gửi được tròn 1 tháng, sau khi rút số tiền là x, số tiền còn lại là:

$P_1=a+ar-x=a(r+1)-x=ad-x, d=r+1$

Khi gửi được tròn 2 tháng, sau khi rút số tiền là x, số tiền còn lại là:

$P_2=P_1+P_1.r-x=ad^2-x(d+1)=ad^2-x\cdot\dfrac{d^2-1}{d-1}$.

Khi gửi được tròn 3 tháng, sau khi rút số tiền là x, số tiền còn lại là:

$P_3=P_2+P_2.r-x=ad^3-x(d^2+d+1)=ad^3-x\cdot\dfrac{d^3-1}{d-1}$

Tương tự, khi gửi được tròn n tháng, sau khi rút số tiền là x, số tiền còn lại là:

$P_n=ad^n-x\cdot\dfrac{d^n-1}{d-1}$.

Áp dụng với $a=800$ triệu, $r=0,5\%$, $n=12$, $x=6$ triệu, số tiền còn lại ciủa ông An là:

$P_{12}=800.(1,005)^{12}-6\cdot\dfrac{1,005^{12}-1}{0,005}=800.(1,005)^{12}-1200.(1,005^{12}-1)=1200-400.1,005^{12}$

(triệu đồng).

Câu 226: Thầy M gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền Thầy M gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu. **B.** 120 triệu và 200 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu. **D.** 180 triệu và 140 triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi số tiền Thầy M gửi ở hai ngân hàng X và Y lần lượt là x, y (triệu)

Theo giả thiết $x+y=320.10^6$ (1)

□ Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng X sau 15 tháng (5 quý) là

$A=x(1+0,021)^5=x(1,021)^5$

$\Rightarrow$ Số lãi sau 15 tháng là $r_A=x(1,021)^5-x=x\left[(1,021)^5-1\right]$

□ Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng Y sau 9 tháng là

$B=y(1+0,0073)^9=y(1,0073)^9$

$\Rightarrow$ Số lãi sau 9 tháng là $r_B=y(1,0073)^9-y=y\left[(1,0073)^9-1\right]$

Theo giả thiết $x\left[(1,021)^5-1\right]+y\left[(1,0073)^9-1\right]=27\ 507\ 768,13$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases}x\simeq 140\\ y\simeq 180\end{cases}$.

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN MÔN

VẬN DỤNG:

Câu 227: Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t)=Q_0.e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

A. 20. **B.** 24. **C.** $15,36$. **D.** $3,55$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ giả thiết ta suy ra $Q(t)=5000.e^{0.195t}$. Để số lượng vi khuẩn là 100.000 con thì

$Q(t)=5000.e^{0.195t}=100.000 \Leftrightarrow e^{0.195t}=2 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{0.195}\ln 20 \approx 15.36(h)$.

Câu 228: Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính khoảng $94.444.200$ người. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức $1,07\%$. Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức $S=A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

A. 2040. **B.** 2037. **C.** 2038. **D.** 2039.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Gọi n là số năm để dân số đạt mức 120 triệu người tính mốc từ năm 2016

Ta có: $120.000.000=94.444.200e^{n.0,0107} \Rightarrow n \approx \dfrac{\ln 1,27}{0,0107} \approx 22.34$.

Vậy trong năm thứ 23 (tức là năm $2016+23=2039$) thì dân số đạt mức 120 triệu người

Câu 229: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A.e^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2026. **D.** 2025.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $S=A.e^{Nr} \Leftrightarrow N=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{S}{A}$.

Để dân số nước ta ở mức 120 triệu người thì cần số năm

$N=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{S}{A}=\dfrac{100}{1,7}.\ln\dfrac{120000000}{78685800}\approx 25$ (năm).

Vậy thì đến năm 2026 dân số nước ta ở mức 120 triệu người

Câu 230: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t là thời gian tăng trưởng (tính theo đơn vị là giờ). Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây.

A. 3 giờ 20 phút. **B.** 3 giờ 9 phút. **C.** 3 giờ 40 phút. **D.** 3 giờ 2 phút.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $300=100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r}=3 \Leftrightarrow 5r=\ln 3 \Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 3}{5}$

Gọi thời gian cần tìm là t.

Theo yêu cầu bài toán, ta có: $200=100.e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt}=2 \Leftrightarrow rt=\ln 2 \Leftrightarrow t=\dfrac{5.\ln 2}{\ln 3}\approx 3,15(h)$

Vậy $t=$ 3 giờ 9 phút

Câu 231: Thang đo Richte được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richte. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_o$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richte, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một chận động đất 7 độ Richte sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richte?

A. 2. **B.** 20. **C.** 100. **D.** $10^{\frac{5}{7}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Với trận động đất 7 độ Richte ta có biểu thức

$7 = M_L = \log A - \log A_0 = \log \dfrac{A}{A_0} \Rightarrow \dfrac{A}{A_0} = 10^7 \Rightarrow A = A_0.10^7$.

Tương tự ta suy ra được $A' = A_0.10^5$.

Từ đó ta tính được tỉ lệ $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{A_0.10^7}{A_0.10^5} = 100$.

Câu 232: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng $91,7$ triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là $1,2\%$ và tỉ lệ này ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

A. $104,3$ triệu người. **B.** $105,3$ triệu người. **C.** $103,3$ triệu người. **D.** $106,3$ triệu người.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Theo công thức $S = A.e^{ni} = 91,7.e^{10.0,012} = 103,3$ triệu người.

Chú ý: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$: Trong đó

A : Dân số của năm lấy làm mốc tính.

S: Dân số sau n năm.

i : Tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

Câu 233: Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\%$. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là $65,21\%$. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 (năm). **B.** 3754 (năm). **C.** 3475 (năm). **D.** 3547 (năm).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow \dfrac{t}{5750} = \log_{0,5} \dfrac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 5750.\log_{0,5} \dfrac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 3547$.

Câu 234: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \dfrac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?

A. 322542 con. **B.** 332542 con. **C.** 302542 con. **D.** 312542 con.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $N(t) = \int N'(t)\mathrm{d}t = \int \dfrac{7000}{t+2}\mathrm{d}t = 7000.\ln|t+2| + C$.

$N(0) = 7000\ln 2 + C \Rightarrow 7000\ln 2 + C = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000\ln 2$.

$N(10) = 7000\ln(10+2) + C = 7000\ln(10+2) + 300000 - 7000\ln 2 \approx 312542,3163$.

Câu 235: Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, …) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x, theo công thức $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, trong đó

I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu $\mu = 1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm $l.10^{10}$ lần. Số nguyên nào sau đây gần với l nhất?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 90.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: Ở độ sâu 2 m: $I(2) = I_0 e^{-2,8}$. Ở độ sâu 20 m: $I(20) = I_0 e^{-28}$

Theo giả thiết $I(20) = l.10^{10}.I(2) \Leftrightarrow e^{-28} = l.10^{10}.e^{-2,8} \Leftrightarrow l = 10^{-10}.e^{25,2} \approx 8,79$.

Câu 236: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

A. Sau khoảng 24 tháng. **B.** Sau khoảng 22 tháng.

C. Sau khoảng 23 tháng. **D.** Sau khoảng 25 tháng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Ta có $75 - 20\ln(t+1) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq 24,79$. Khoảng 25 tháng.

Câu 237: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $t \approx 1,65$ giờ. **B.** $t \approx 1,61$ giờ. **C.** $t \approx 1,63$ giờ. **D.** $t \approx 1,50$ giờ.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Theo bài ta có: $Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right) = 0,9.Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63$.

Câu 238: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \dfrac{s(3)}{2^3} = 78125;\ s(t) = s(0).2^t \Rightarrow 2^t = \dfrac{s(t)}{s(0)} = 128 \Rightarrow t = 7.$

Câu 239: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là $1.038.229$ người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là $1.153.600$ người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.424.300;1.424.400)$. **B.** $(1.424.000;1.424.100)$.

C. $(1.424.200;1.424.300)$. **D.** $(1.424.100;1.424.200)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi S_1 là dân số năm 2015, ta có $S_1 = 1.153.600, N = 5, A = 1.038.229$

Ta có: $S_1 = A.e^{N.r} \Rightarrow e^{N.r} = \dfrac{S_1}{A} \Rightarrow r = \dfrac{\ln\dfrac{S_1}{A}}{5}$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2 = A.e^{15.r} = 1.038.229.e^{15.\frac{\ln\frac{S}{A}}{5}} \approx 1.424.227,71$

Câu 240: Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V\left(m^3\right)$. 10 năm tiếp theo, thể tích CO_2 tăng $a\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 năm 2016 là

A. $V_{2016}=V.\dfrac{(100+a)^{10}.(100+n)^{8}}{10^{36}}\left(m^3\right)$. **B.** $V_{2016}=V.(1+a+n)^{18}\left(m^3\right)$.

C. $V_{2016}=V.\dfrac{((100+a)(100+n))^{10}}{10^{20}}\left(m^3\right)$. **D.** $V_{2016}=V+V.(1+a+n)^{18}\left(m^3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

Sau 10 năm thể tích khí CO_2 là $V_{2008}=V\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{10}=V\dfrac{(100+a)^{10}}{10^{20}}$

Do đó, 8 năm tiếp theo thể tích khí CO_2 là

$$V_{2016}=V_{2008}\left(1+\frac{n}{100}\right)^{8}=V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\left(1+\frac{n}{100}\right)^{8}$$

$$=V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\frac{(100+n)^{8}}{10^{16}}=V\frac{(100+a)^{10}.(100+n)^{8}}{10^{36}}$$

Câu 41: Tại Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=Ae^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94,970,597 người và có tỉ lệ tăng dân số là 1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

A. 98 triệu người. **B.** 100 triệu người. **C.** 102 triệu người. **D.** 104 triệu người.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng công thức với $A=94,970,597$, $n=3$, $i=1,03\%$ ta được $S\approx 98$ triệu người.

Câu 242: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sao bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ). **B.** 45 (giờ). **C.** 25 (giờ). **D.** 15 (giờ).

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $A=1500$, 5 giờ $=300$ phút.

Sau 5 giờ, số vi khuẩn là $S(300)=500\cdot e^{300r}=1500\Rightarrow r=\dfrac{\ln 300}{3}$

Gọi t_0 (phút) là khoảng thời gian, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con.

Ta có $121500=500\cdot e^{rt_0}\Rightarrow t_0=\dfrac{\ln 243}{r}=\dfrac{300\ln 243}{\ln 3}=1500$ (phút)= 25 (giờ).

Câu 243: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao x (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức $P=P_0e^{xl}$, trong đó $P_0=760$ mmHg là áp suất không khí ở mức nước biển, l là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là $672,71$ mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fanxipan cao mét là bao nhiêu?

A. $22,24$ mmHg. **B.** $y'=-6x+2(2m-1)x-\left(m^2-1\right)$mmHg.

C. $517,94$ mmHg. **D.** $530,23$ mmHg.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ở độ cao 1000 mét áp suất không khí là $672,71$ mmHg

Nên $672,71=760e^{1000l}$

$\Leftrightarrow e^{1000l}=\dfrac{672,71}{760}\Leftrightarrow l=\dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{672,71}{760}$

Áp suất ở đỉnh Fanxipan $P=760e^{3143l}=760e^{3143.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx 717,94$

Câu 244: Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu lần diện tích hiện nay?

A. $1-\dfrac{4x}{100}$. **B.** $1-\dfrac{x^4}{100}$. **C.** $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4$. **D.** $1-\left(\dfrac{x}{100}\right)^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi S_0 là diện tích rừng hiện tại.

Sau n năm, diện tích rừng sẽ là $S=S_0\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^n$.

Do đó, sau 4 năm diện tích rừng sẽ là $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4$ lần diện tích rừng hiện tại.

Câu 245: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định trong 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

A. 106,3 triệu người **B.** 104,3 triệu người **C.** 105,3 triệu người **D.** 103,3 triệu người

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng $A.e^{r.t}=91,7.e^{1,2.10}=103,39$.

Câu 246: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

A. 1000. **B.** 850. **C.** 800. **D.** 900.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300=100.e^{5r}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 300-\ln 100}{5}=\dfrac{\ln 3}{5}$

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r=\dfrac{\ln 3}{5}$ mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}}=900$ con.

Câu 247: Số nguyên tố dạng $M_p=2^p-1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M.Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp). Số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

A. 6972592 chữ số. **B.** 2098961 chữ số. **C.** 6972593 chữ số. **D.** 2098960 chữ số.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $M_{6973593}$ có số chữ số bằng số $2^{26972593}$ và là

$[6973593.\log 2]+1=[6972593.0,3010]+1=2098960$ số.

Câu 248: Một lon nước soda $80°F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32°F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t)=32+48.(0.9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $50°F$?

A. $1,56$. **B.** $9,3$. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Gọi t_o là thời điểm nhiệt độ lon nước $80°F\Rightarrow T(t_o)=32+48.(0,9)^{t_o}=80$ (1)

Gọi t_1 là thời điểm nhiệt độ lon nước $50°F\Rightarrow T(t_1)=32+48.(0,9)^{t_o}=50$ (2)

(1) $\Leftrightarrow (0,9)^{t_o}=1\Leftrightarrow t_o=0$ (2) $\Leftrightarrow (0,9)^{t_1}=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow t_1=\log_{0,9}\dfrac{3}{8}\approx 9,3$

Câu 249: Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter. Độ Richter được tính bằng công thức $M = \log A - \log A_0$, trong đó A là biên độ rung tối đa đo được bằng địa chấn kế và là biên độ chuẩn (hằng số). Vào ngày $3-12-2016$, một trận động đất cường độ $2,4$ độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn ngày $16-10-2016$ xảy ra một trận động đất cường độ $3,1$ độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn được dùng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất Phước Sơn ngày $16-10$ gấp khoảng mấy lần biên độ tối đa của trận động đất Bắc Trà My ngày $3-12$?

A. 7 lần. **B.** 5 lần. **C.** 4 lần. **D.** 3 lần.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A_1 là biên độ rung tối đa ở Phước Sơn. Gọi A_2 là biên độ rung tối đa ở Trà My.

$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 3,1 \quad (1)$. $M_2 = \log A_2 - \log A_0 = 2,4 \quad (2)$.

Lấy $(1)-(2)$: $\log A_1 - \log A_2 = 0,7 \Leftrightarrow \log\dfrac{A_2}{A_1} = 0,7 \Leftrightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = 10^{0,7}$

Câu 250: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là $78.685.800$ người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

A. 2035. **B.** 2030. **C.** 2038. **D.** 2042.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Theo giả thiết ta có phương trình $150.000.000 = 78.685.800.e^{0.017N} \Leftrightarrow N \approx 37.95$ (năm)

Tức là đến năm 2038 dân số nước ta ở mức 150 triệu người.

Câu 251: Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân $1,2\%$/năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 8 năm. **B.** 9 năm. **C.** 7 năm. **D.** 10 năm.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Số dân của huyện A sau n năm là $x = 300.000(1+0,012)^n$.

$x > 330.000 \Leftrightarrow 300.000(1+0,012)^n > 330.000 \Leftrightarrow n > \log_{1,012}\dfrac{33}{30} \Leftrightarrow n > 7,99$.

Câu 252: Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Po^{210} là 138 ngày đêm. Hỏi $0,168$ gam Po^{210} sau 414 ngày đêm sẽ còn lại bao nhiêu gam?

A. $0,021$. **B.** $0,056$. **C.** $0,045$. **D.** $0,102$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Với $t = 414, T = 138$, $m_0 = 0,168\ g$.

Áp dụng công thức ta được $m(414) = 0,168.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{414}{138}} = 0,021$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 253: Biết chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ plutôni Pu^{239} là 24360 năm(tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau khoảng bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

A. 82230 (năm). **B.** 82232 (năm). **C.** 82238 (năm). **D.** 82235 (năm).

Hướng dẫn giải.

Chọn D. - Pu^{239} có chu kỳ bán hủy là 24360 năm, do đó ta có:

$5 = 10.e^{r.24360} \Rightarrow r = \dfrac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -0,000028$.

- Vậy sự phân hủy của Pu^{239} được tính theo công thức $S = A.e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t}$.

- Theo đề: $1 = 10.e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t} \Rightarrow t = \dfrac{-\ln 10}{\dfrac{\ln 5 - \ln 10}{24360}} \approx \dfrac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235$ (năm).

Chú ý: Theo đáp án gốc là D (SGK). ***Tuy nhiên:*** nếu không làm tròn r thì kết quả

$1 = 10.e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t} \Rightarrow t = \dfrac{-\ln 10}{\dfrac{\ln 5 - \ln 10}{24360}} \approx 80922 \Rightarrow$ Kết quả gần A nhất.

Câu 254: Một bể nước có dung tích 1000 lít.Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A. 3,14 giờ. **B.** 4,64 giờ. **C.** 4,14 giờ. **D.** 3,64 giờ.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Trong giờ đầu tiên, vòi nước chảy được $60.1 = 60$ lít nước.

Giờ thứ 2 vòi chảy với vận tốc 2 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 2 = 120$ lít nước.

Giờ thứ 3 vòi chảy với vận tốc 4 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 4 = 240$ lít nước.

Giờ thứ 4 vòi chảy với vận tốc 8 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 8 = 480$ lít nước.

Trong 4 giờ đầu tiên,vòi chảy được: $60 + 120 + 240 + 480 = 900$ lít nước.

Vậy trong giờ thứ 5 vòi phải chảy lượng nước là $1000 - 900 = 100$ lít nước.

Số phút chảy trong giờ thứ 5 là $100 : 16 = 6,25$ phút

Đổi $6,25 : 60 \approx 0,1$ giờ

Vậy thời gian chảy đầy bể là khoảng 4,1 giờ.

Câu 255: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7 \times \log_3 25$. **B.** $3^{\frac{25}{7}}$. **C.** $7 \times \dfrac{24}{3}$. **D.** $7 \times \log_3 24$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo đề bài số lượng bèo ban đầu chiếm 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^1$ diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

…

Sau $7 \times n$ ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì $0,04 \times 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 25 \Leftrightarrow n = \log_3 25$.

Vậy sau $7 \times \log_3 25$ ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ

Câu 256: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: "Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì lại gấp đôi ô thứ 2, … ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước". Giá trị nhỏ nhất của *n* để tổng số hạt thóc mà vị quan từ *n* ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ *n*) lớn hơn 1 triệu là

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Bài toán dùng tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

Ta có: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + 1.2 + 1.2^2 + ... + 1.2^{n-1} = 1.\dfrac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$

$S_n = 2^n - 1 > 10^6 \Leftrightarrow n > \log_2\left(10^6 + 1\right) \cong 19.93$. Vậy n nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài là 20.

Câu 257: Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

A. $12 - \log 5$ (giờ). **B.** $\dfrac{12}{5}$ (giờ). **C.** $12 - \log 2$ (giờ). **D.** $12 + \ln 5$ (giờ).

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta gọi u_i là số lá bèo ở giờ thứ i. Có $u_0 = 1 = 10^0, u_1 = 10, u_2 = 10^2, ..., u_{12} = 10^{12}$.

Ta có số lá bèo để phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $\frac{1}{5}.10^{12}$ $\Rightarrow$ thời gian mà số lá bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $12 - \log 5$.

Câu 258: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\dfrac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

A. $3,59$ (Ben). **B.** $3,06$ (Ben). **C.** $3,69$ (Ben). **D.** 4 (Ben).

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $L_A < L_B \Rightarrow OA > OB$. Gọi I là trung điểm AB. Ta có:

$L_A = \log\dfrac{k}{OA^2} \Rightarrow \dfrac{k}{OA^2} = 10^{L_A} \Rightarrow OA = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$ $\quad L_B = \log\dfrac{k}{OB^2} \Rightarrow \dfrac{k}{OB^2} = 10^{L_B} \Rightarrow OB = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$

$L_I = \log\dfrac{k}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{k}{OI^2} = 10^{L_I} \Rightarrow OI = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$

Ta có: $OI = \dfrac{1}{2}(OA - OB) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}} - \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_I}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)$

$\Rightarrow L_I = -2\log\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\right] \Rightarrow L_I \approx 3,69$.

Câu 259: Trung tâm luyện thi Đại học Diệu Hiền muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi và tiền gốc) để trao 10 suất học bổng hằng tháng cho học sinh nghèo ở TP. Cần Thơ, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi suất ngân hàng là 1% */tháng*, và Trung tâm Diệu Hiền bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, trung tâm cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là:

A. 108500000 đồng **B.** 119100000 đồng **C.** 94800000 đồng **D.** 120000000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C. Gọi M (triệu). Lãi suất là a

Số tiền sau tháng thứ nhất và đã phát học bổng là $M(1+a) - 10$

Số tiền sau tháng thứ hai và đã phát học bổng là

$\left(M\left(1+a\right)-10\right)\left(1+a\right)-10=M\left(1+a\right)^2-10\left(1+a\right)-10$

Số tiền sau tháng thứ ba và đã phát học bổng là

$\left(M\left(1+a\right)^2-10\left(1+a\right)-10\right)\left(1+a\right)-10=M\left(1+a\right)^3-10\left[\left(1+a\right)^2+\left(1+a\right)+1\right]$

…………………………………………

Số tiền sau tháng thứ 10 và đã phát học bổng là

$$M\left(1+a\right)^{10}-10\left[\left(1+a\right)^9+.....+\left(1+a\right)+1\right]=M\left(1+a\right)^{10}-10.\frac{\left(1+a\right)^{10}-1}{a}$$

Theo yêu cầu đề bài: $M\left(1+a\right)^{10}-10.\dfrac{\left(1+a\right)^{10}-1}{a}=0\Leftrightarrow M=\dfrac{10\left[\left(1+a\right)^{10}-1\right]}{a\left(1+a\right)^{10}}$

Thay $a=1\%$. Ta tìm được $M=94713045\approx 94800000$

Câu 260: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $2°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $5°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%.

Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t°C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f\left(t\right)\%$ thì $f(t)=k.a^t$ (trong đó a,k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

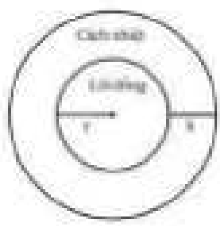
A. $9,3°C$. **B.** $7,6°C$. **C.** $6,7°C$. **D.** $8,4°C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Theo đề bài ta có: $\begin{cases}k.a^2=3\%\\ \text{k.a}^5=10\%\end{cases}\left(1\right)$. Cần tìm t thỏa mãn $k.a^t=20\%$.

Từ $\left(1\right)\Rightarrow k=\dfrac{3\%}{a^2}$ và $a=\sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}$, $k.a^t=20\%\Rightarrow\dfrac{3\%}{a^2}.a^t=20\%\Rightarrow a^{t-2}=\dfrac{20}{3}\Rightarrow t=2+\log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}}\dfrac{20}{3}\Rightarrow t\approx 6,7$

Câu 261: Cáp tròn truyền dưới nước bao gồm một lõi đồng và bao quanh lõi đồng là một lõi cách nhiệt như hình vẽ. Nếu $x=\dfrac{r}{h}$ là tỉ lệ bán kính lõi và độ dày của vật liệu cách nhiệt thì bằng đo đạc thực nghiệm người ta thấy rằng vận tốc truyền tải tín hiệu được cho bởi phương trình $v=x^2\ln\dfrac{1}{x}$ với $0<x<1$. Nếu bán kính lõi là $2\ cm$ thì vật liệu cách nhiệt có bề dày $h\ \left(cm\right)$ bằng bao nhiêu để tốc độ truyền tải tín hiệu lớn nhất ?



A. $h=2e\left(cm\right)$. **B.** $h=\dfrac{2}{e}\left(cm\right)$. **C.** $h=2\sqrt{e}\left(cm\right)$. **D.** $h=\dfrac{2}{\sqrt{e}}\left(cm\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $v=x^2\ln\dfrac{1}{x}=-x^2\ln x\Rightarrow v'=-\left(2x\ln x+x^2.\dfrac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\left(loai\right)\\ \ln x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 0}v=\lim\limits_{x\to 1}v=0;f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{2e}\Rightarrow\underset{(0;1)}{Max}\,v=\dfrac{1}{2e}\ khi\ x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\dfrac{r}{h}=\dfrac{2}{h}\Rightarrow h=2\sqrt{e}.$

CHUYÊN ĐỀ 5: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b\ \left(a > 0,\ a \neq 1\right)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

3. Đặt ẩn phụ

Biến đổi quy về dạng:

$$f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \quad \left(0 < a \neq 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)},\ \ t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình tích:

- $u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0$ với đặt $u = a^{f(x)}, v = b^{g(x)}\ \ u > 0, v > 0$
- $Au + Bv = Av + Bu \Leftrightarrow (A-B)(u-v) = 0$ với đặt $u = a^{f(x)}, v = b^{g(x)}\ \ u > 0, v > 0$

Đặt ẩn phụ đưa không hoàn toàn: là việc dùng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một một phương trình với một ẩn phụ mà hệ số vẫn còn ẩn x rồi đưa về tích.

Đặt nhiều ẩn phụ đưa về hệ phương trình

4. Lôgarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

5. Giải bằng phương pháp đồ thị

- Giải phương trình: $a^x = f(x)\ \left(0 < a \neq 1\right)$. $\quad (*)$
- Xem phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = a^x\ \left(0 < a \neq 1\right)$ và $y = f(x)$. Khi đó ta thực hiện hai bước:

➢ **Bước 1**. Vẽ đồ thị các hàm số $y = a^x\ \left(0 < a \neq 1\right)$ và $y = f(x)$.

➢ **Bước 2**. Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị.

6. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì số nghiệm của phương trình $f(x) = k$ trên $(a;b)$ không nhiều hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$, $\forall u, v \in (a;b)$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

- **Tính chất 3.** Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì bất phương trình $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$ $(\text{hoac } u<v)$, $\forall u,v\in D$.

7. Sử dụng đánh giá

- Giải phương trình $f(x)=g(x)$.
- Nếu ta đánh giá được $\begin{cases} f(x)\ge m \\ g(x)\le m \end{cases}$ thì $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU

Câu 1. Phương trình $3^{\frac{1}{x}}=4$ có nghiệm là

A. $x=\log_2 3$. **B.** $x=\log_3 2$. **C.** $x=\log_4 3$. **D.** $x=\log_3 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3^{\frac{1}{x}}=4\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\log_3 4\Leftrightarrow x=\log_4 3$.

Câu 2. Phương trình $8^x=4$ có nghiệm là

A. $x=\frac{2}{3}$. **B.** $x=-\frac{1}{2}$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $8^x=4\Leftrightarrow x=\log_8 4\Leftrightarrow x=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}$ là:

A. $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=\log_{\frac{4}{3}}\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}\Leftrightarrow 3.2^x=4.3^x\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$

Câu 4. Tích các nghiệm của phương trình $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$ là:

A. 6. **B.** 32. **C.** 12. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0\Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+32=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=8 \\ 2^x=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Câu 5. Nghiệm của phương trình $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20$ là:

A. $x=\log_3 5-1$. **B.** $x=\log_3 5$. **C.** $x=\log_3 5+1$. **D.** $x=\log_5 3-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20\Leftrightarrow 3.3^x(5^x+4)-5(5^x+4)=0\Leftrightarrow (5^x+4)(3^{x+1}-5)=0$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}=5\Leftrightarrow x=\log_3 5-1$

Câu 6. Phương trình $3^{x-2}=\frac{3}{9^x}$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3^{x-2}=3^{1-2x}\Leftrightarrow x-2=1-2x\Leftrightarrow x=1$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x-4}=\frac{1}{16}$ là

A. $\{-2;\,2\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{2;4\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $2^{x^2-x-4}=2^{-4}\Leftrightarrow x^2-x-4=-4\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Câu 8. Giải phương trình $3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$.

A. $x=\frac{6}{7}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{1}{3}$. **D.** $x=\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}\Leftrightarrow 3^{x-4}=3^{-6x+2}\Leftrightarrow x-4=-6x+2\Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$.

Câu 9. Phương trình $3^x.5^{x-1}=7$ có nghiệm là

A. $\log_{15}35$. **B.** $\log_{21}5$. **C.** $\log_{21}35$. **D.** $\log_{15}21$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. PT $\Leftrightarrow 15^x=35\Leftrightarrow x=\log_{15}35$

Câu 10. Tìm các nghiệm của phương trình $2^{x-2}=8^{100}$.

A. $x=204$. **B.** $x=102$. **C.** $x=302$. **D.** $x=202$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $2^{x-2}=8^{100}\Leftrightarrow 2^{x-2}=2^{300}\Leftrightarrow x-2=300\Leftrightarrow x=302$

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $2^x=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $2^x=\left(\sqrt{3}\right)^x\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0.$

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương pháp: + Giải phương trình tìm tất cả các nghiệm của phương trình.
+ Áp dụng công thức lũy thừa ta được phương trình tương đương với: $2x^2-7x+5=0$.

Câu 13. Cho phương trình: $3^x=m+1$. Chọn phát biểu đúng

A. Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

B. Phương trình có nghiệm với $m\ge -1$.

C. Phương trình có nghiệm dương nếu $m>0$.

D. Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x=\log_3(m+1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. + **A** sai vì với $m=-2$ phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3^x=-1$ (Vô lý).
+ **B** sai vì với $m=-1$ phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3^x=0$ (Vô lý).
+ **C đúng.** Vì với $m>0$ phương trình đã cho $\Leftrightarrow x=\log_3(m+1)>0$ do $3>1$ *và* $m+1>1$.
+ **D** sai vì với $m=-2$ thì $\log_3(m+1)$ không tồn tại.

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU

Câu 14. Kí hiệu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $3^{x^2-4} = \pi^{\log_\pi 243}$. Tính giá trị của biểu thức $M = x_1 x_2$.

A. $M = 9$. **B.** $M = -25$. **C.** $M = -3$. **D.** $M = -9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $3^{x^2-4} = \pi^{\log_\pi 243} \Leftrightarrow 3^{x^2-4} = 3^5 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Rightarrow M = -9$.

Câu 15. Tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x+2}$.

A. $\left\{-\frac{2}{11}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{2}{11}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{11}{2}\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(2^{-2}\right)^{2x-1} = \left(2.2^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{-4x+2} = 2^{\frac{3(x+2)}{2}} \Leftrightarrow -4x+2 = \frac{3(x+2)}{2}$

Vậy $x = -\frac{2}{11}$.

Câu 16. Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{(x-1)^2} = 4^x$.

A. $\left\{4+\sqrt{3}, 4-\sqrt{3}\right\}$ **B.** $\left\{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\right\}$ **C.** $\left\{-4+\sqrt{3}, -4-\sqrt{3}\right\}$ **D.** $\left\{-2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}\right\}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $2^{(x-1)^2} = 4^x \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} = 2^{2x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$ là

A. $-\frac{2}{5}$. **B.** 4. **C.** $-\frac{1}{8}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = 5^{3x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

Câu 18. Phương trình $(0.2)^{x+2} = \left(\sqrt{5}\right)^{4x-4}$ tương đương với phương trình:

A. $5^{-x+2} = 5^{2x-2}$. **B.** $5^{-x-2} = 5^{2x-2}$. **C.** $5^{-x-2} = 5^{2x-4}$. **D.** $5^{-x+2} = 5^{2x-4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $(0.2)^{x+2} = \left(\sqrt{5}\right)^{4x-4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 5^{2x-2} \Leftrightarrow 5^{-x-2} = 5^{2x-2}$.

Câu 19. Phương trình $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$ có nghiệm là

A. $x = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -1$

Câu 20. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\left(3^x\right)^{x-1}=64$ thì giá trị của S là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** -6. **C.** -3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\left(2^x\right)^{x-1}=64 \Leftrightarrow 2^{x(x-1)}=64 \Leftrightarrow x^2-x=6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow S=1$

Câu 21. Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\{0;2\}$. **D.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương trình tương đương $2x^2-x=1 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{1}{2}$

Câu 22. Nghiệm của phương trình $4^{2x-m}=8^x$ là

A. $x=-m$. **B.** $x=-2m$. **C.** $x=2m$. **D.** $x=m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $4^{2x-m}=8^x \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{2x-m}=\left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{4x-2m}=2^{3x} \Leftrightarrow 4x-2m=3x \Leftrightarrow x=2m$

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}$ là

A. $\left\{\frac{8}{5}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{8}{3}\right\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2-2x=-3(x-2) \Leftrightarrow x=4$

Câu 24. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-5x+6}=1$ là

A. $\{1;2\}$. **B.** $\{1;6\}$. **C.** $\{-6;-1\}$. **D.** $\{2;3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $2^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6}=2^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$.

Câu 25. Phương trình $2^{x^2-9x+16}=4$ có nghiệm là

A. $x=2$, $x=7$. **B.** $x=4$, $x=5$. **C.** $x=1$, $x=8$. **D.** $x=3$, $x=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $2^{x^2-9x+16}=4 \Leftrightarrow x^2-9x+16=2 \Leftrightarrow x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Câu 26. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có

$$3^{x^4-3x^2}=81 \Leftrightarrow x^4-3x^2=4 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$ bằng 0.

Câu 27. Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^{x+1}=8$.

A. $S=\{1\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $4^{x+1}=8\Leftrightarrow 2^{2(x+1)}=2^3\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)=3\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $2^{3x-1}=32$ là:

A. $x=11$ **B.** $x=2$ **C.** $x=\frac{31}{3}$ **D.** $x=\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $2^{3x-1}=32\Leftrightarrow 2^{3x-1}=2^5\Leftrightarrow 3x-1=5\Leftrightarrow x=2$.

Câu 29. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{3^{2x-6}}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=5$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\frac{3^{2x-6}}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^x\Leftrightarrow\frac{3^{2x}}{3^6.27}=\left(\frac{1}{3}\right)^x\Leftrightarrow\frac{3^{2x}}{3^9}=3^{-x}\Leftrightarrow 3^{2x-9}=3^{-x}\Leftrightarrow 2x-9=-x\Leftrightarrow x=3$.

Câu 30. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$.

A. $x=9$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3^{x-1}=27\Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3\Leftrightarrow x-1=3\Leftrightarrow x=4$

Câu 31. Tìm nghiệm của phương trình $4^{2x+5}=2^{2-x}$.

A. $-\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $4^{2x+5}=2^{2-x}\Leftrightarrow 2^{4x+10}=2^{2-x}\Leftrightarrow 4x+10=2-x\Leftrightarrow x=-\frac{8}{5}$.

Câu 32. Phương trình $\begin{cases}\log_3\left|t\right|=u\\ \log_5\left(t+2\right)=u\end{cases}\Rightarrow$ có nghiệm là

A. $\begin{cases}\left|t\right|=3^u\\ t+2=5^u\end{cases}$. **B.** $\Rightarrow\left|5^u-2\right|=3^u$. **C.** $\Rightarrow$. **D.** $\left[\begin{array}{l}5^u-2=3^u\\ 5^u-2=-3^u\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5^u+3^u=2\\ 3^u+2=5^u\end{array}\right.$.

Câu 33. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng:

A. 0. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}\Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^{x^2}\Leftrightarrow 3x-2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương hai nghiệm bằng 5.

Câu 34. Tìm các giá trị của m để phương trình $2^{x+1}=m.2^{x+2}-2^{x+3}$ luôn thỏa mãn $\forall x\in\mathbb{R}$

A. $m=3$ **B.** $m=\frac{3}{2}$ **C.** $m=\frac{5}{2}$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=2^x>0$. Phương trình tương đương với $2t=4mt-8t\Leftrightarrow 4mt=10t\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$

Câu 35. Cho phương trình: $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.
B. Tổng các nghiệm của phương tình là một số nguyên.
C. Nghiệm của phương trình là các số vô tỉ.
D. Phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

$$2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1} \Leftrightarrow \left|\frac{28}{3}x+4\right|=4\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} 7x+3=3x^2-3 \\ 7x+3=-3x^2+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \vee x=-\frac{2}{3} \\ x=0 \vee x=-\frac{7}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

.

Nghiệm của phương trình là : $S=\left\{-\frac{7}{3};3\right\}$. **Chọn A.** Vì $-\frac{7}{3}.3=-7<0$.

Câu 36. Phương trình $2^{8-x^2}.5^{8-x^2}=0,001.\left(10^5\right)^{1-x}$ có tổng các nghiệm là:

A. 5. **B.** 7. **C.** -7. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $(2.5)^{8-x^2}=10^{-3}.10^{5-5x} \Leftrightarrow 10^{8-x^2}=10^{2-5x} \Leftrightarrow 8-x^2=2-5x \Leftrightarrow \boxed{x=-1;x=6}$

Ta có : $-1+6=5$.

Câu 37. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $3^{x^4-3x^2}=81 \Leftrightarrow x^4-3x^2=4 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$ bằng 0.

Câu 38. Cho phương trình: $2.3^{x+1}-15^x+2.5^x=12$, giá trị nào gần với tổng 2 nghiệm của phương trình trên nhất?

A. 1.75 **B.** 1.74 **C.** 1.73 **D.** 1.72

Hướng dẫn giải

Chọn B.

* Cách 1:

$$2.3^{x+1}-15^x+2.5^x=12 \Leftrightarrow 6.3^x-12-5^x.3^x+2.5^x=0$$

$$\Leftrightarrow 6(3^x-2)-5^x(3^x-2)=0 \Leftrightarrow (3^x-2)(6-5^x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 2 \\ x=\log_5 6 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm là: $\log_3 2+\log_5 6 \simeq 1.74$

* Cách 2:

Nhập vào máy tính biểu thức: $2.3^{x+1}-15^x+2.5^x-12$

$\boxed{\text{SOLVE}}$ được 2 nghiệm vô tỉ lưu vào biến A, B và tính tổng $\boxed{\text{A+B}}$ giống câu 50

VẬN DỤNG

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình: $2^{mx^2-4x-2m}=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^{-4}}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $0\le m<1$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $2^{mx^2-4x-2m}=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^{-4}}\Leftrightarrow 2^{mx^2-4x-2m}=4\Leftrightarrow mx^2-4x-2m-2=0$, (1)

Với $m=0$ từ (1) ta có $-4x-2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Với $m\ne 0$ khi đó (1) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases}\Delta'=0\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2+2m+4=0\\ m\ne 0\end{cases}$ (vô lý)

Vậy $m=0$ thỏa mãn ycbt.

Câu 40. Số nghiệm của phương trình $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^{12}$ là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét PT $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^{12}$

Th1: $x=3$ (t/m).

Th2: $|x-3|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2\end{array}\right.$ (t/m).

Th3: Với $x\ne 3;\ x\ne 4;\ x\ne 2\Rightarrow x^2-x=12\Leftrightarrow x^2-x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=4\end{array}\right.$.

Tóm lại phương trình có 4 nghiệm $x=4;\ x=-3;\ x=3;\ x=2$

Câu 41. Với giá trị nào của a thì phương trình $2^{ax^2-4x-2a}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $a\ne 0$ **B.** $\forall a\in\mathbb{R}$ **C.** $a\ge 0$ **D.** $a>0$

Hướng dẫn giải

Ta có $2^{ax^2-4x-2a}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}}$ $(*)\Leftrightarrow 2^{ax^2-4x-2a}=2^2\Leftrightarrow ax^2-4x-2a=2\Leftrightarrow ax^2-4x-2(a+1)=0$

PT (*) có hai nghiệm phân biệt $ax^2-4x-2(a+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 0\\ 2a^2+2a+4>o\end{cases}\Leftrightarrow a\ne 0$

Vậy đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 42. Với m nào đây thì phương trình $5^{x^2-(m+2)x+2m+1}=1$ có 2 nghiệm?

A. $m>0$ **B.** $m<4$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>4\end{array}\right.$ **D.** Không tìm được m

Hướng dẫn giải

Chọn C. $5^{x^2-(m+2)x+2m+1}=1\Rightarrow x^2-(m+2)x+2m+1=0$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Delta=m^2-4m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<0\end{array}\right.$

* Cách 2: Dùng máy tính Casio

Tất nhiên ở dạng có tham số việc dùng Casio khó hơn ở dạng số.

Đầu tiên ta sẽ chọn khoảng thỏa mãn đáp án. Chẳng hạn câu a cho $m>0$ ta chọn $m=2$.

Nhập vào máy biểu thức: $5^{x^2-4x+5}-1$

$\boxed{\text{SOLVE}}$ với $m=2$, quan sát thấy máy đơ ra (không biết máy có báo $\boxed{\text{Can't Solve}}$ không vì tác giả không đợi lâu) nên ta thoát ra.

Chuyển hướng $\boxed{\text{SOLVE}}$ với 1 giá trị $m<0$ ví dụ $m=-1$

Nhập vào máy biểu thức: $5^{x^2-x-1}-1$

$\boxed{\text{SOLVE}}$ với 1 giá trị dương ví dụ $X=1$ ta được nghiệm $\boxed{1.61803\ldots}$

Tiếp tục $\boxed{\text{SOLVE}}$ với 1 giá trị âm $X=-1$ ta được nghiệm $\boxed{-0.61803\ldots}$

Tới đây ta nhận xét $m<0$ làm phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Tiếp tục trường hợp với $m>4$ ta chọn được đáp án.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 43. Cho phương trình $4^x-4^{1-x}=3$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Phương trình vô nghiệm.
B. Phương trình có một nghiệm.
C. Nghiệm của phương trình là luôn lớn hơn 0.
D. Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $4^{2x}-3.4^x-4=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=4^x$ $(t>0)$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-1(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Câu 44. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4^{x^2}-5.2^{x^2}+4=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $4^{x^2}-5.2^{x^2}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}=1 \\ 2^{x^2}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 45. Một học sinh giải phương trình $3.4^x+(3x-10).2^x+3-x=0$ $(*)$ như sau:

Bước 1: Đặt $t=2^x>0$. Phương trình $(*)$ được viết lại là: $3t^2+(3x-10)\cdot t+3-x=0$ (1).

Biệt số $\Delta=(3x-10)^2-12(3-x)=9x^2-48x+64=(3x-8)^2$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm $t=\frac{1}{3}$ hoặc $t=3-x$.

Bước 2:

+ Với $t=\frac{1}{3}$ ta có $2^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\log_2\frac{1}{3}$

+ Với $t=3-x$ ta có $2^x=3-x \Leftrightarrow x=1$ (Do VT đồng biến, VP nghịch biến nên PT có tối đa 1 nghiệm)

Bước 3: Vậy $(*)$ có hai nghiệm là $x=\log_2\frac{1}{3}$ và $x=1$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bước 2. **B.** Bước 3. **C.** Đúng. **D.** Bước 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Bài giải trên hoàn toàn đúng.

Câu 46. Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2=0(1)$. Nếu đặt $t=3^{x+5}(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2-6t-2=0$. **B.** $t^2-2t-2=0$. **C.** $t^2-18t-2=0$. **D.** $9t^2-2t-2=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2=0 \Leftrightarrow 3^{2(x+5)}-2.3^{x+5}-2=0$

Vậy khi đặt $t=3^{x+5}(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2t-2=0$.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $3^x-3^{1-x}=2$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3^x-3^{1-x}=2 \Leftrightarrow 3^x-\frac{3}{3^x}=2 \Leftrightarrow 3^{2x}-2.3^x-3=0$. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=3\\3^x=-1(l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$

Câu 48. Phương trình $9^x-5.3^x+6=0$ có tổng các nghiệm là:

A. $\log_3 6$. **B.** $\log_3\frac{2}{3}$. **C.** $\log_3\frac{3}{2}$. **D.** $-\log_3 6$.

Hướng dẫn giải

$9^x-5.3^x+6=0\ (1)$, $(1)\Leftrightarrow (3^2)^x-5.3^x+6=0 \Leftrightarrow (3^x)^2-5.3^x+6=0 \quad (1')$

Đặt $t=3^x>0$. Khi đó: $(1')\Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\ (N)\\t=3\ (N)\end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow 3^x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=\log_3 2}$. Với $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow \boxed{x=\log_3 3=1}$.

Suy ra $1+\log_3 2=\log_3 3+\log_3 2=\log_3 6$

Câu 49. Phương trình $2.4^x-7.2^x+3=0$ có tất cả các nghiệm thực là:

A. $x=-1, x=\log_2 3$. **B.** $x=\log_2 3$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1, x=\log_2 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $2.(2^x)^2-7.2^x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=\frac{1}{2}\\2^x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\log_2 3\end{array}\right.$.

Câu 50. Cho phương trình $2^{1+2x}+15.2^x-8=0$, khẳng định nào sau dây đúng?

A. Có một nghiệm **B.** Vô nghiệm **C.** Có hai nghiệm dương **D.** Có hai nghiệm âm

Hướng dẫn giải

$2^{1+2x}+15.2^x-8=0\ (2)$, $(2)\Leftrightarrow 2.2^{2x}+15.2^x-8=0 \Leftrightarrow 2.(2^x)^2+15.2^x-8=0 \quad (2')$

Đặt $t=2^x>0$. Khi đó: $(2')\Leftrightarrow 2t^2+15t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\quad (N)\\t=-8\quad (L)\end{array}\right.$

Với $t=\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\log_2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 51. Giải phương trình $4^x - 6.2^x + 8 = 0$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 0; x = 2$. **C.** $x = 1; x = 2$. **D.** $x = 2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Đặt $t = 2^x, (t > 0)$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Câu 52. Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272$.

A. $S = \{1\}$. **B.** $S = \{3\}$. **C.** $S = \{2\}$. **D.** $S = \{5\}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B. Ta có: $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272 \Leftrightarrow 4^x = 64 = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 53. Số nghiệm của phương trình $9^{\frac{x}{2}} + 9.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 = 0$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với $3^x + 9.\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3^x + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 3.\frac{1}{3^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0.$$

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

● Với $t = 1$, ta được $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. ● Với $t = 3$, ta được $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

Câu 54. Cho phương trình $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 3^{x^2+x-1}$ ($t > 0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2+x-1} = 3 \\ 3^{x^2+x-1} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -2.

Câu 55. Tìm tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x + \left(\sqrt{2} + 1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = 1$. Đặt $t = \left(\sqrt{2} + 1\right)^x$, điều kiện $t > 0$. Suy ra $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x = \frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy tích của hai nghiệm $x_1 x_2 = 1.(-1) = -1$

Câu 56. Tổng các nghiệm của phương trình $2^{2x-3} - 3.2^{x-2} + 1 = 0$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$2^{2x-3}-3.2^{x-2}+1=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}\left(2^x\right)^2-\frac{3}{4}2^x+1=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-6.2^x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 3.

Câu 57. Phương trình $9^{x+1}-13.6^x+4^{x+1}=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2. Phát biểu nào sao đây đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên. **B.** Phương trình có 2 nghiệm dương.
C. Phương trình có 1 nghiệm dương. **D.** Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có: $9^{x+1}-13.6^x+4^{x+1}=0\Leftrightarrow 9.9^x-13.6^x+4.4^x=0\Leftrightarrow 9.\frac{9^x}{4^x}-13.\frac{6^x}{4^x}+4=0$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.,$$ phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Câu 58. Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị $A=2x_1+3x_2$ là

A. $2\log_2 3$. **B.** 1. **C.** $3\log_3 2$. **D.** $4\log_3 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$9^x-3.3^x+2=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3.3^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_3 2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=\log_3 2\end{array}\right.\Rightarrow A=3\log_3 2$$

Câu 59. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3\Leftrightarrow 2^{x^2-x}-\frac{4}{2^{x^2-x}}=3$. Đặt $t=2^{x^2-x}$, $t>0$

Khi đó phương trình trở thành $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (loai)\\t=4\end{array}\right.$

Với $t=4\Rightarrow 2^{x^2-x}=2^2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Câu 60. Phương trình $5^x+25^{1-x}=6$ có tích các nghiệm là:

A. $\log_5\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. **B.** $\log_5\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$. **C.** 5. **D.** $5\log_5\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$5^x+25^{1-x}=6\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow 5^x+\frac{25}{25^x}-6=0\Leftrightarrow 5^x+\frac{25}{\left(5^2\right)^x}-6=0\Leftrightarrow 5^x+\frac{25}{\left(5^x\right)^2}-6=0\quad(6')$. Đặt $t=5^x>0$.

Khi đó:

$$(6')\Leftrightarrow t+\frac{25}{t^2}-6=0\Leftrightarrow t^3-6t+25=0\Leftrightarrow (t-5)(t^2-t-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=5 & (N)\\ t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} & (N)\\ t=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} & (L)\end{array}\right.$$

Với $t=5\Rightarrow 5^x=5\Leftrightarrow\boxed{x=1}$. Với $t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow 5^x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow\boxed{x=\log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)}$.

Suy ra: $1.\log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)=\log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

Câu 61. Phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x$ có tổng các nghiệm là

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=3.$$

Nhận thấy $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=1\Rightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x>0\Rightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1}{t}$

Phương trình trên trở thành $t+\dfrac{1}{t}=3\Leftrightarrow t^2-3t+1=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

Câu 62. Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}$.

A. 100. **B.** 10. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. ĐK: $x>0$.

PT $\Leftrightarrow 4.3^{2.\log(10x)}+9.2^{2.\log(10x)}=13.6^{\log(10x)}\Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\log(10x)}-13.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}+9=0$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}>0$ thì phương trình trở thành:

$$4t^2-13t+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{9}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=1\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=\dfrac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log(10x)=0\\ \log(10x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{10}\\ x=10\end{array}\right..$$

Suy ra tích các nghiệm bằng 1.

Câu 63. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $3^{2+x}+3^{2-x}=30$.

A. 3. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Ta có $3^{2+x}+3^{2-x}=30 \Leftrightarrow 9.3^x+\frac{9}{3^x}=30$. Đặt $t=3^x, t>0$

Khi đó phương trình trở thành $9t^2-30t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$. Với $t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 64. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$.

A. -3 **B.** -2 **C.** -7 **D.** 7

Hướng dẫn giải

$$4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{x^2-3x+2}.4^{x^2+6x+5}+1$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)-\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0 \Leftrightarrow \left(4^{x^2-3x+2}-1\right)\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2}-1=0 \\ 1-4^{x^2+6x+5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \vee x=-5 \\ x=1 \vee x=2 \end{array}\right.$$

Câu 65. Phương trình $5^{x-1}+5.(0,2)^{x-2}=26$ có tổng các nghiệm là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

$5^{x-1}+5.(0,2)^{x-2}=26 \Leftrightarrow 5^{x-1}+5.5^{2-x}=26 \Leftrightarrow 5^{x-1}+25.5^{1-x}=26$.

Đặt $t=5^{x-1}\,(t>0)$, phương trình trở thành: $t+\frac{25}{t}=26 \Leftrightarrow t^2-26t+25=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x-1}=1 \\ 5^{x-1}=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Vậy tổng các nghiệm là 4.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào máy tính $5^{x-1}+5.(0,2)^{x-2}-26$. Nhấn dấu = để lưu phương trình.

Shift→ Solve →0→=. Ra nghiệm $x=1$. Shift→ Solve →4→=. Ra nghiệm $x=3$.

Câu 66. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $4^{x-1}-3.2^x+7=0$. Tính S.

A. $S=\log_2 7$. **B.** $S=12$. **C.** $S=28$. **D.** $S=\log_2 28$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $4^{x-1}-3.2^x+7=0 \Leftrightarrow \frac{4^x}{4}-3.2^x+7=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+28=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=6+2\sqrt{2} \\ 2^x=6-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2\left(6+2\sqrt{2}\right) \\ x=\log_2\left(6-2\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$.

Vậy $S=\log_2\left(6+2\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-2\sqrt{2}\right)=\log_2\left[\left(6+2\sqrt{2}\right)\left(6-2\sqrt{2}\right)\right]=\log_2 28$.

Chú ý: $2^S=2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=28 \Leftrightarrow S=\log_2 28$

Câu 67. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{x-1}+5.0,2^{x-2}=26$. Tính $S=x_1+x_2$.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=3$. **D.** $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $5^{x-1}+5.0,2^{x-2}=26 \Leftrightarrow 5^{x-1}+5.\dfrac{1}{5^{x-2}}=26 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\left(5^x\right)^2-26.5^x+125=0$.

$S=x_1+x_2 \Rightarrow 5^S=5^{x_1+x_2}=5^{x_1}.5^{x_2}=\dfrac{125}{\frac{1}{5}}=625 \Rightarrow S=\log_5 625=4$.

Câu 68. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4^x-8.2^x+4=0$.

A. $T=1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $4^x-8.2^x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4+2\sqrt{3} \\ 2^x=4-2\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2(4+2\sqrt{3}) \\ x=\log_2(4-2\sqrt{3}) \end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là:

$T=\log_2(4+2\sqrt{3})+\log_2(4-2\sqrt{3})=\log_2(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=\log_2 4=2$.

Câu 69. Bất phương trình $25^{-x^2+2x+1}+9^{-x^2+2x+1}\ge 34.15^{-x^2+2x}$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup[0;2]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $S=(0;+\infty)$.

C. $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=\left(1-\sqrt{3};0\right)$.

Hướng dẫn giải

$$25^{-x^2+2x+1}+9^{-x^2+2x+1}\ge 34.15^{-x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2\left(-x^2+2x+1\right)}+1\ge\frac{34}{15}.\left(\frac{5}{3}\right)^{\left(-x^2+2x+1\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 2 \\ x\le 1-\sqrt{3} \\ x\ge 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Câu 70. Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có một nghiệm vô tỉ. **B.** Phương trình có một nghiệm hữu tỉ.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu. **D.** Tích của hai nghiệm bằng -6.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6 \ (8)$

$(8)\Leftrightarrow\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right]^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0\Leftrightarrow\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0 \quad (8')$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$.

Khi đó: $(8')\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=2 & (N) \\ t=-3 & (L) \end{array}\right.$. Với $t=2\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2\Leftrightarrow \boxed{x=\log_{(2+\sqrt{3})}2}$

VẬN DỤNG

Câu 71. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x+(1-3m)2^x+2m^2-m=0$ có nghiệm.

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét phương trình $4^x+(1-3m)2^x+2m^2-m=0(1)$

Đặt $t=2^x, t>0.$ Phương trình (1) trở thành $t^2+(1-3m)t+2m^2-m=0(2)$

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm $x=m; x=2m-1, \forall m.$

Phương trình (1) có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t>0.$

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ 2m-1>0 \end{array}\right. \Rightarrow m\in(0;+\infty).$

Câu 72. Gọi $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x$. Tính giá trị $P=3x_1+4x_2.$

A. 1 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x \Leftrightarrow 8\left(8^x+\dfrac{1}{8^x}\right)+24\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-125=0$

$\Leftrightarrow 8\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)^3=125 \Leftrightarrow 2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \left(2^x-\dfrac{1}{2}\right).(2^x-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$

Câu 73. Tìm m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $m>3$. **B.** $m=3$. **C.** $2<m<3$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m \Leftrightarrow 4^{x^2}-4.2^{x^2}+6=m$

Đặt $t=2^{x^2}\ge 2^0=1, t\ge1$, ta có phương trình $t^2-4t+6=m$

Ứng với $t>1$, ta có $x^2=\log_2 t$.

Thấy rằng nếu $\log_2 t>0 \Leftrightarrow t>1$ ta có 2 giá trị phân biệt của x.

Vậy để phương trình có đúng 3 nghiệm thì điều kiện cần là

$x^2=\log_2 t=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m=3$. Thử lại với $m=3$ ta thấy thỏa mãn.

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt. $\begin{cases} 3^{x^2-3x+2}=u \\ 3^{4-x^2}=v \end{cases} \Rightarrow u.v=3^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$mu+v=uv+m \Leftrightarrow m(u-1)-v(u-1)=0 \Leftrightarrow (u-1)(m-v)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ v=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2-3x+2}=1 \\ 3^{2-x^2}=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ 4-x^2=\log_3 m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x^2=4-\log_3 m \end{array}\right.$$

Để phương trình có ba nghiệm thì $x^2=4-\log_3 m$ có một nghiệm khác $1; 2$.

Tức $4-\log_3 m=0 \Leftrightarrow m=81$.

Câu 75. Cho phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$. Tìm tất cả giá trị m để phương trình có đúng 3 nghiệm.

A. $m=3$. **B.** $2<m<3$.

C. $m=2$. **D.** Không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Do đề bài có 2^{x^2} và phương trình có đúng 3 nghiệm nên phải có 1 nghiệm $x=0$.

Xét $x=0 \Rightarrow 4^0-2^{0+2}+6=m \Leftrightarrow m=3$.

Với $m=3 \Rightarrow 4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=3 \Leftrightarrow 2^{2x^2}-4.2^{x^2}+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{x^2}=1\\2^{x^2}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{\log_2 3}\end{array}\right.$.

Vậy $m=3$ thì phương trình có đúng 3 nghiệm.

Câu 76. Hỏi phương trình $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $pt \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{5}\right)^x+4.\left(\frac{3}{5}\right)^x+5.\left(\frac{4}{5}\right)^x-6=0$

Xét hàm số $f(x)=3.\left(\frac{2}{5}\right)^x+4.\left(\frac{3}{5}\right)^x+5.\left(\frac{4}{5}\right)^x-6$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{5}+4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{3}{5}+5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{4}{5}<0, \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(0)=6>0$, $f(2)=-22<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Câu 77. Phương trình $4^{x+1}-2.6^x+m.9^x=0$ có hai nghiệm thực phân biệt khi giá trị của tham số m là:

A. $m<0$. **B.** $0<m<\frac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $m<\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $4^{x+1}-2.6^x+m.9^x=0 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-2\left(\frac{2}{3}\right)^x+m=0$ (1)

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t>0$. Phương trình (1) trở thành $4t^2-2t+m=0$ (2)

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt, điều đó tương đương với $\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4m>0\\\frac{m}{4}>0\\\frac{2}{4}>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}$.

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm thực phân biệt $9^{x^2}-2.3^{x^2+1}+3m-1=0$.

A. $m=\frac{10}{3}$. **B.** $2<m<\frac{10}{3}$. **C.** $m=2$. **D.** $m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=3^{x^2}\geq 3^0=1$.

Phương trình trở thành $t^2-6t-1=-3m$.

Nhận xét nếu phương trình có 1 nghiệm $t>1 \Rightarrow$ có hai nghiệm $x^2=\log_3 t \Rightarrow x=\pm\sqrt{\log_3 t}$.

Nên phương trình muốn có ba nghiệm thì phải có nghiệm $x=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow m=2$.

Thử lại: $m=2\Rightarrow t^2-6t+5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=5\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2}=1\\3^{x^2}=5\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{\log_3 5}\end{array}\right.$.

Câu 79. Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3\quad(7)$

$(7)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\dfrac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\dfrac{81}{3^x}=10^3\Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)=10^3\quad(7')$

Đặt $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{3^x.\dfrac{1}{3^x}}=2$

$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\dfrac{1}{3^x}+3.3^x.\dfrac{1}{3^{2x}}+\dfrac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow 3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$

Khi đó: $(7')\Leftrightarrow 27(t^3-3t)+81t=10^3\Leftrightarrow t^3=\dfrac{10^3}{27}\Leftrightarrow t=\dfrac{10}{3}>2\ (N)$

Với $t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{10}{3}\quad(7")$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7")\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3\ (N)\\y=\dfrac{1}{3}\ (N)\end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow\boxed{x=1}$ Với $y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\boxed{x=-1}$

Câu 80. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}\Leftrightarrow 8.2^{x^2+1}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{4.2^{2(x^2+1)}-4.2^{x^2+1}+1}$

Đặt $t=2^{x^2+1}\ (t\geq 2)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\geq 2$). Từ đó suy ra

$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}}\\x_2=-\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}}\end{array}\right.$. Vậy tổng hai nghiệm bằng 0.

Câu 81. Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. $-4<m<-1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $-1<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $-1<m<-\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $4^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5}_{f(t)}=0.\quad(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1\neq 0 \\ (m+1)f(1)<0 \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1\neq 0 \\ (m+1)(3m+12)<0 \Leftrightarrow -4<m<-1. \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases}$$

Câu 82. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m>2$. **B.** $m<2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\leq 2$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\dfrac{1}{t}, \forall t\in(0,+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=m \Leftrightarrow f(t)=t+\dfrac{1}{t}=m \quad (1'), \forall t\in(0,+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ xác định và liên tục trên $(0,+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	0 1 $+\infty$
$f'(t)$		$-$ 0 $+$
$f(t)$		$+\infty$ $+\infty$ 2

Dựa vào bảng biến thiên: Nếu $m>2$ thì phương trình $(1')$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow pt(1)$ có hai nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

Câu 83. Tìm m để phương trình $\left(2\sqrt{2}+7\right)^x+\left(2\sqrt{2}-7\right)^x-m=0$ vô nghiệm:

A. $m\in(-\infty;-2]$ **B.** $m\in(-2;2)$ **C.** $m\in[2;+\infty)$ **D.** $m=1$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\left(2\sqrt{2}+7\right)^x+\left(2\sqrt{2}-7\right)^x-m=0 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}+7\right)^x+\dfrac{1}{\left(2\sqrt{2}+7\right)^x}-m=0$

$$\Leftrightarrow \left[\left(2\sqrt{2}+7\right)^x\right]^2-m\left(2\sqrt{2}+7\right)^x+1=0$$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=m^2-4<0 \Leftrightarrow m\in(-2;2)$

Câu 84. Với giá trị nào của m, phương trình $4^x-2^x+m=0$ có nghiệm?

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ **B.** $m\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ **C.** $m\in\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = 2^x, t > 0$, Phương trình trở thành: $t^2 - t + m = 0$ (*)

Để phương trình ban đầu có nghiệm thì (*) phải có ít nhất 1 nghiệm dương

Thông thường để định điều kiện cho (*) ta phải hợp các trường hợp: phương trình có 2 ngiệm dương, phương trình có nghiệm kép dương và phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

$\left[\begin{array}{l}\Delta > 0; S > 0; P > 0\\ \Delta = 0; S > 0\\ P < 0\end{array}\right.$. Ở đây vì đã có điều kiện $t > 0$ ta có thể làm như sau: $m = t - t^2 = f(t)$

t	0		$\frac{1}{2}$		∞
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình (*) là giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị hàm f(t)

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (*) có ít nhất 1 ngiệm dương khi và chỉ khi $0 \le m < \frac{1}{4}$

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực:

A. $0 < m \le \frac{2}{e}$. **B.** $\frac{1}{e} \le m < 1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $-1 < m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Biến đổi phương trình về dạng $m = \sqrt[4]{\left(e^x\right)^2 + 1} - \sqrt{e^x}$. Đặt $t = e^x; (t > 0)$

Ta xét hàm số $y = \sqrt[4]{t^2 + 1} - \sqrt{t}$ trên $(0; +\infty)$.

$$y' = \frac{t}{2.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t^3} - \sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}{2.\sqrt{t}.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}} = \frac{\sqrt[4]{\left(t^2\right)^3} - \sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}{2.\sqrt{t}.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}} < 0 \ (\forall t > 0)$$

Lập bảng biến thiên, có điều kiện cần tìm là $0 < m < 1$

Câu 86. Tìm m để phương trình: $e^{2x} - me^x + 3 - m = 0$, có nghiệm:

A. $m \ge 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m < 3$. **D.** $m > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t = e^x, t > 0$. Biến đổi phương trình về dạng: $\frac{t^2 + 3}{t + 1} = m$

Khảo sát hàm $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}, t > 0$ ta có $f(t) \ge 2$ suy ra $m \ge 2$

Câu 87. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\left(\frac{1}{3}\right)^x+m-1=0$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$?

A. $\left(\frac{14}{9};2\right)$. **B.** $\left[\frac{14}{9};2\right]$. **C.** $\left[\frac{14}{9};2\right)$. **D.** $\left(\frac{14}{9};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\left(\frac{1}{3}\right)^x+m-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-2\left(\frac{1}{3}\right)^x+m-1=0\,(*)$. Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x\geq 0$.

Phương trình $t^2-2t+m-1=0\,(**)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $0<x\leq 1\Leftrightarrow(**)$ có nghiệm $\frac{1}{3}\leq t<1$

$(**)\Leftrightarrow -t^2+2t+1=m\,(***)$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1$ với $\frac{1}{3}\leq t<1$, $f'(t)=-2t+2$, cho $f'(t)=0\Rightarrow t=1$

Lập BBT, dựa vào BBT ta suy ra $\frac{14}{9}\leq m<2$.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x-2m=0$ có nghiệm.

A. $m\in(-\infty;1)$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in[1;+\infty)$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x>0$ thì phương trình trở thành: $\frac{1}{t}+t-2m=0\Leftrightarrow 2m=t+\frac{1}{t}$.

Xét $f(t)=t+\frac{1}{t}\Rightarrow f'(t)=1-\frac{1}{t^2}=0$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$ (do $t>0$).

BBT:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó pt có nghiệm $\Leftrightarrow 2m\geq 2\Leftrightarrow m\geq 1$

Câu 89. Phương trình $9^x-2.6^x+m^2 4^x=0$ có hai nghiệm trái dấu khi:

A. $m\leq 1$. **B.** $m<-1$ hoặc $m>1$. **C.** $m\in(-1;0)\cup(0;1)$. **D.** $m\geq -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **Phương pháp:** + Chia cả phương trình cho 4^x rồi đặt ẩn phụ $\left(\frac{3}{2}\right)^x=a$.

Với $x\geq 0$ thì $a\geq 1; x<0$ thì $a<1$.

Cách giải: + Đặt ẩn phụ như trên ta được phương trình: $-a^2+2a=m^2$.

Đặt $a=b+1$ ta được phương trình: $b^2=1-m^2$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình trên cũng cần có 2 nghiệm trái dấu $\left(1-m^2\right)>0 \Leftrightarrow m>-1 \cup m<1$.

Câu 90. Giá trị của tham số m để phương trình $4^x-2m.2^x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $x_1+x_2=3$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **Phương pháp:** +Biến đổi phương trình thành: $2^{2x}-2m2^x+2m=0$.

+ Đặt $2^x=t>0$ với mọi x.

+ Rồi tìm điều kiện của m.

Cách giải: Đặt ẩn phụ như trên ta được phương trùnh: $t^2-2mt+2m=0=f(t)$.

Lần lượt thử với giá trị của m ở 4 đáp án ta được nghiệm $m=4$ thỏa mãn bài toán.

Chú ý: *Nhưng bài như này đôi khi dùng phương pháp thử đáp án sẽ ra nhanh hơn.*

Câu 91. Cho phương trình $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(0,2)\backslash\{-3;-8\}$ **B.** $m\in(0;2)$ **C.** $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$ **D.** $m\in(0,2)\backslash\{2;3\}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m \Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6}-2^{7-5x}+2^{1-x^2}-m=0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6}(m-2^{1-x^2})+2^{1-x^2}-m=0 \Leftrightarrow (m-2^{1-x^2})\left(2^{x^2-5x+6}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ 2^{x^2-5x+6}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ x^2-5x+6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ x=2;x=3\end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình $2^{1-x^2}=m$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x\neq 2;x\neq 3$ hay $\begin{cases}m>0\\ 1-x^2=\log_2 m\\ x\neq 2;x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ x^2=1-\log_2 m=\log_2\frac{2}{m}>0\\ x\neq 2;x\neq 3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ \frac{2}{m}>1\\ \frac{2}{m}\neq 2^4;\frac{2}{m}\neq 2^9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ 0<m<2\\ m\neq\frac{1}{8};m\neq\frac{1}{256}\end{cases}.$$ Vậy $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $4^x-m.2^x+2m-5=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-m.2^x+2m-5=0\,(1)$.

Đặt $t=2^x, t>0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-mt+2m-5=0\,(2)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương t_1,t_2 thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\-\dfrac{b}{a}>0\\\dfrac{c}{a}>0\\(t_2-1)(1-t_1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4(2m-5)>0\\m>0\\2m-5>0\\t_2-t_1t_2+t_1-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{5}{2}\\m-(2m-5)-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{5}{2}\\-m+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{2}<m<4.$$

Câu 93. Tập tất cả các giá trị m để phương trình $4^x+m.2^{x+1}+m^2-1=0$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+\ x_2>3$ là

A. $m<0$. **B.** $m>3$. **C.** $m<-3$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $4^x+m.2^{x+1}+m^2-1=0\Leftrightarrow4^x+2m.2^x+m^2-1=0\Leftrightarrow(2^x+m)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=-m+1\\2^x=-m-1\end{array}\right.$

Để pt có 2 nghiệm: $\begin{cases}-m+1>0\\-m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m<-1$ (1). Khi đó giả sử $2^{x_1}=-m+1$ và $2^{x_2}=-m-1$

Có: $x_1+x_2>3\Leftrightarrow2^{x_1+x_2}>8\Leftrightarrow2^{x_1}.2^{x_2}>8\Leftrightarrow(-m+1)(-m-1)>8\Leftrightarrow m^2-1>8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-3\end{array}\right.$

Kết hợp đk (1), suy ra $m<-3$ là giá trị cần tìm.

Câu 94. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $m.9^{x^2-2x}-(2m+1)6^{x^2-2x}+m.4^{x^2-2x}=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

A. $[6;+\infty)$. **B.** $(-\infty;6]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $m.9^{x^2-2x}-(2m+1).6^{x^2-2x}+m.4^{x^2-2x}=0\Leftrightarrow m.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2(x^2-2x)}-(2m+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2-2x}+m=0$.

Với $m=0$ phương trình vô nghiệm.

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x\Rightarrow f'(x)=2x-2\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

$x\in(0;2)\Rightarrow f(x)\in(-1;0)\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$. Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2-2x}=u$ ta có phương trình

$m.u^2-(2m+1)u+m=0\Leftrightarrow m(u^2-2u+1)-u=0\Leftrightarrow m=\dfrac{u}{(u-1)^2}$.

Bài toán chuyển về bài toán tìm m để hai đồ thị hàm số $y=m$ và $f(u)=\dfrac{u}{(u-1)^2}$ cắt nhau với $u\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{u}{(u-1)^2}$ với $u\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ thì $f(u)$ là hàm đồng biến và $f(u)>f\left(\dfrac{2}{3}\right)=6$.

Vậy để phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m>6\Leftrightarrow m\in(6;+\infty)$.

Câu 95. Phương trình $(m-2).2^{2(x^2+1)}-(m+1).2^{x^2+2}+2m=6$ có nghiệm khi

A. $2<m\le9$ **B.** $2<m<9$. **C.** $2\le m<9$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<2\\m\ge9\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Viết lại phương trình $\dfrac{2.2^{2(x^2+1)}+2.2^{x^2+1}+6}{2^{2(x^2+1)}-2.2^{x^2+1}+2}=m$.

Đặt $t=2^{x^2+1}$. Vì $x^2+1\ge 1\Leftrightarrow 2^{x^2+1}\ge 2\Rightarrow t\ge 2$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2}$ với $t\ge 2$. Ta có $f'(t)=\dfrac{-6t^2-4t+16}{(t^2-2t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}-14.2^{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}+8=m$ có nghiệm.

A. $m\le -32$. **B.** $-41\le m\le 32$. **C.** $m\ge -41$. **D.** $-41\le m\le -32$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$ trên $[-1;3]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}; f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;3]$:

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	

Từ đó suy ra $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Khi đó ta có phương trình: $4^t-14.2^t+8=m$.

Đặt $a=2^t$, do $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ nên $a\in\left[4;4^{\sqrt{2}}\right]$. Ta có phương trình $a^2-14a+8=m$.

Xét hàm số $g(a)=a^2-14a+8; g'(a)=2a-14; g'(a)=0\Leftrightarrow a=7$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ trên $\left[4;4^{\sqrt{2}}\right]$.

a	4		7		$4^{\sqrt{2}}$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	-32	$\searrow$		$\nearrow$	$4^{2\sqrt{2}}-14.4^{\sqrt{2}}+8$

Từ bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm thì $-41\le m\le -32$.

Câu 97. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$

Hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0<x<1\Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow 2<f(x)<4$ vì $f(0)=2, f(1)=4$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 98. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m<\dfrac{1}{16}$. **B.** $0\le m<\dfrac{1}{16}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}<m\le\dfrac{1}{16}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<m\le 0\\ m=\dfrac{1}{16}\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. T $\Leftrightarrow\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}+m\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}\in(0;1]$. Khi đó PT $\Rightarrow 2t^2-t+2m=0\Leftrightarrow 2m=t-2t^2=g(t)$ (1).

Ta có $g'(t)=1-4t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}$. Suy ra bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(t)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m=\dfrac{1}{8}\\ -1<2m\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{16}\\ -\dfrac{1}{2}<m\le 0\end{array}\right..$$

Câu 99. Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0\ (1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m\ge-\dfrac{3}{2}$. **B.** $m>-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m>3+2\sqrt{2}$. **D.** $m\ge 3+2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3^x$. Vì $x>1\Rightarrow t>3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3$ $\Leftrightarrow\dfrac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$.

Xét hàm số $g(t)=t-2+\dfrac{2}{t+1},\forall t>3, g'(t)=1-\dfrac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$.

Hàm số đồng biến trên $\left[3;+\infty\right)$ và $g\left(3\right)=\dfrac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{2}$.

Câu 100. Cho phương trình $8^x-m2^{2x+1}+\left(2m^2-1\right)2^x+m-m^3=0$. Biết tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình có ba nghiệm phân biệt là $\left(a;b\right)$. Tính $S=ab$?

A. $S=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $S=\dfrac{4}{3}$ **C.** $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $S=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta đặt $t=2^x$ khi đó phương trình có dạng $\left(t-m\right)\left(t^2-mt+m^2-1\right)=0$. Do đó điều kiện cần và đủ là 3 nghiệm $t>0$ cho nên: $\begin{cases}m>0;S=m>0\\P=m^2-1>0\\\Delta=m^2-4\left(m^2-1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{1<m<\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$.

Câu 101. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt: $3^{2x^2+2mx+m+3}-3^{3x^2+4mx+3m+3}=x^2+2mx+2m$

A. $m\in\left[0;2\right]$ **B.** $m\in\left(0;2\right)$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le0\\m\ge2\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn C. $3^{2x^2+2mx+m+3}-3^{3x^2+4mx+3m+3}=x^2+2mx+2m\ \left(1\right)$

Đặt $u=2x^2+2mx+m+3;v=3x^2+4mx+3m+3$

Phương trình đã cho trở thành: $3^u-3^v=v-u\Leftrightarrow3^u+u=3^v+v$

Đây là 1 dạng rất đặc trưng của phương pháp dùng hàm số giải phương trình

Đặt $f(t)=3^t+t$, $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $u=v\Rightarrow x^2+2mx+2m=0\ \left(2\right)$

Để phương trình 1 có 2 nghiệm phân biệtsuy ra phương trình 2 có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow\Delta=m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<2\end{array}\right.$$

Câu 102. Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left[2;+\infty\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đặt $t=2^{(x-1)^2}$ $\left(t\ge1\right)$. Phương trình có dạng: $t^2-2mt+3m-2=0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-3m+2}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\\sqrt{m^2-3m+2}<m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\m-1\ge0\\m^2-3m+2<m^2-2m+1\end{cases}\Leftrightarrow m>2$$

Câu 103. Cho phương trình: $m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m\ \ \left(1\right)$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$. **B.** $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{7};\frac{1}{256}\right\}$.

C. $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{6};\frac{1}{256}\right\}$. **D.** $m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{256}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Viết phương trình lại dưới dạng: $m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$

$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2^{x^2-5x+6+1-x^2}+m \Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2^{x^2-5x+6}.2^{1-x^2}+m$

Đặt $\begin{cases}u=2^{x^2-5x+6}\\ v=2^{1-x^2}\end{cases}$ $;u,v>0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$mu+v=uv+m\Leftrightarrow(u-1)(v-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\ v=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-5x+6}=0\\ 2^{1-x^2}=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\\ 2^{1-x^2}=m(*)\end{array}\right.$$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1-x^2=\log_2 m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ x^2=1-\log_2 m\end{cases}$$

Khi đó ĐK là: $\begin{cases}m>0\\ 1-\log_2 m>0\\ 1-\log_2 m\neq 0\\ 1-\log_2 m\neq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ m<2\\ m\neq\frac{1}{8}\\ m\neq\frac{1}{256}\end{cases}\Leftrightarrow m\in(0;2)\backslash\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$

Câu 104. Tìm giá trị nguyên của m đề phương trình $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m\Leftrightarrow 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)=4(m+1)\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)+16-8m$$

Đặt $t=2^x-\frac{1}{2^x}$ với $x\in[0;1]\Rightarrow 4^x+\frac{1}{4^x}=t^2+2$ $\quad t'=\ln 2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)>0\Rightarrow 0\le t\le\frac{3}{2}$

PT trở thành: $t^2=(m+1)t+2-2m\Leftrightarrow(t+1)(t-2)=m(t-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=2 & (L)\\ t=m-1\end{array}\right.$

Yêu cầu đề $\Rightarrow 0\le m-1\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1\le m\le\frac{5}{2}$.

Câu 105. Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

A. $4\le m\le\frac{64}{7}$ **B.** $4\le m\le 8$ **C.** $3\le m\le\frac{64}{7}$ **D.** $m\ge\frac{64}{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}} \to t\in[3;9]$

Phương trình có dạng $t^2-(m+2)t+2m+1=0 \leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$ (do $t\in[3;9]$).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$ trên $t\in[3;9]$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}>0, \forall t\in[3;9]$, nên hàm số đồng biến trên $[3;9]$. Vậy để phương trình có nghiệm thì $\min\limits_{[3;9]} f(t)\le m\le \max\limits_{[3;9]} f(t) \leftrightarrow f(3)\le m\le f(9) \leftrightarrow 4\le m\le \dfrac{64}{7}$.

Câu 106. Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x+3=m.\sqrt{9^x+1}$ (1) có đúng 1 nghiệm.

A. $(1,3]$ **B.** $(3;\sqrt{10})$ **C.** $\{\sqrt{10}\}$ **D.** $(1;3)\cup\{\sqrt{10}\}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình (1) tương đương: $\dfrac{3^x+3}{\sqrt{9^x+1}}=m$ đặt $t=3^x$ $(t>0)$

Phương trình (1) trở thành: $\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}=m$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với $(t>0)$

Ta có: $y'=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=0 \leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		||	$+$	0	$-$	
y		3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Dựa vào đồ thì ta có: $m\in(1,3]$

Câu 107. Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $\left(\sqrt{5}+1\right)^{x+y}-4\left(\sqrt{5}-1\right)^{x+y-1}=\left(\sqrt{5}-3\right)2^{x+y-1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+2y$.

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ điều kiện của đề bài ta có: $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x+y}=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y}$ ta có $t-\dfrac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)t}=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \Leftrightarrow t=-2(l) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2(l) \\ t=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Leftrightarrow x+y=1$. Khi đó $P=x(1-x)+2(1-x)=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4}$

Câu 108. Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. 49 **B.** 51 **C.** 78 **D.** 81

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\begin{cases}\Delta_1>0;S_1>0;P_1>0\\\Delta_2>0;S_2>0;P_2>0\end{cases}\Leftrightarrow b^2-200a>0$.

Khi đó $\begin{cases}2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=\frac{50}{a}\Leftrightarrow x_1+x_2=\log_2\frac{50}{a}\\3^{x_3+x_4}=2^{x_3}.2^{x_4}=50a\Leftrightarrow x_3+x_4=\log_3(50a)\end{cases}$. Vì vậy

$$x_3+x_4>x_1+x_2\Leftrightarrow\log_3(50a)>\log_2\left(\frac{50}{a}\right)\Rightarrow a\ge3\Rightarrow b^2>200a>600\Rightarrow b\ge25\Rightarrow S=2a+3b\ge81.$$

PHƯƠNG PHÁP LÔGARÍT HÓA, MŨ HÓA

VẬN DỤNG

Câu 109. Cho hàm số $f(x)=2^{2x}.3^{\sin^2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln4+\sin^2x\ln3<0$.

B. $f(x)<1\Leftrightarrow 2x+2\sin x\log_2 3<0$.

C. $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_3 2+\sin^2x<0$.

D. $f(x)<1\Leftrightarrow 2+x^2\log_2 3<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $f(x)<1\Leftrightarrow\ln\left(2^{2x}.3^{\sin^2x}\right)<\ln1\Leftrightarrow x\ln4+\sin^2x\ln3<0$

$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}\Leftrightarrow4.3^{2x-1}=3.2^{x+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow3^{2x-2}=2^{x-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow(2x-2)\log_2 3=\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow2x(2\log_2 3-1)=4\log_2 3-3\Leftrightarrow2x=\frac{4\log_2 3-2-1}{2\log_2 3-1}\Leftrightarrow2x=2-\frac{1}{\log_2\frac{9}{2}}\Leftrightarrow x=1-\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}2.$

Câu 110. Cho số thực $a>1,b>1$. Biết phương trình $a^xb^{x^2-1}=1$ có hai nghiệm phân biện x_1,x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4(x_1+x_2)$.

A. 4 **B.** $3\sqrt[3]{2}$ **C.** $3\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[3]{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $x^2-1+x\log_b a=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\log_b a\\x_1x_2=-1\end{cases}$. Thay vào S và áp dụng BĐT.

Câu 111. Cho hai số thực dương a,b lớn hơn 1 và biết phương trình $a^{x^2}b^{x+1}=1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(ab)+\frac{4}{\log_a b}$.

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 10

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình tương đương với: $x^2+(x+1)\log_a b=0 \Leftrightarrow x^2+x\log_a b+\log_a b=0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta=(\log_a b)^2-4\log_a b\geq 0 \Leftrightarrow \log_a b\geq 4\left(\log_a b>0\right)$

Khi đó $P=\log_a b+\dfrac{4}{\log_a b}+1=f(t)=t+\dfrac{4}{t}+1\geq \min_{[4;+\infty)} f(t)=f(4)=6$

Với $t=\log_a b\geq 4$.

Câu 112. Phương trình $2^{x-3}=3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1,x_2 trong đó $x_1<x_2$, hãy chọn phát biểu đúng ?

A. $3x_1-2x_2=\log_3 8$. **B.** $2x_1-3x_2=\log_3 8$.

C. $2x_1+3x_2=\log_3 54$. **D.** $3x_1+2x_2=\log_3 54$.

Hướng dẫn giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3)\Leftrightarrow \log_2 2^{x-3}=\log_2 3^{x^2-5x+6}$

$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2=(x^2-5x+6)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow (x-3).\left[1-(x-2)\log_2 3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\1-(x-2)\log_2 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\(x-2)\log_2 3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x-2=\dfrac{1}{\log_2 3}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=\log_3 2+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=\log_3 2+\log_3 9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=\log_3 18\end{array}\right.$

Câu 113. Biết phương trình $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}$ có nghiệm là a. Tính giá trị biểu thức $P=a+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=1-\log_{\frac{9}{2}} 2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=1-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 114. Biết rằng phương trình $2^{x^2-1}=3^{x+1}$ có 2 nghiệm là a,b. Khi đó $a+b+ab$ có giá trị bằng

A. $-1+2\log_2 3$. **B.** $1+\log_2 3$. **C.** -1. **D.** $1+2\log_2 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. Ta có $2^{x^2+1}=3^{x+1}\Leftrightarrow \log_2\left(2^{x^2+1}\right)=\log_2\left(3^{x+1}\right) \Leftrightarrow x^2-1=(x+1)\log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2-x.\log_2 3-1-\log_2 3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1+\log_2 3\end{array}\right.$

Vậy ta có $a+b+ab=-1+1+\log_2 3-1-\log_2 3=-1$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 115. Cho các số nguyên dương a,b lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1}=b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $b^{x^2-1}=(9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $(x_1+x_2)(x_3+x_4)<3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+2b$.

A. 12 **B.** 46 **C.** 44 **D.** 22

Hướng dẫn giải

Chọn B. Với $a^{x^2+1}=b^x$, lấy logarit cơ số a hai vế: $x^2+1=x\log_a b \Leftrightarrow x^2-x\log_a b+1=0$.
Phương trình này có hai nghiệm phân biệt: $\Delta=\left(\log_a b\right)^2-4>0 \Leftrightarrow \log_a b>2 \Leftrightarrow b>a^2$

Tương tự $b^{x^2-1}=(9a)^x \Leftrightarrow x^2-1=x\log_b(9a) \Rightarrow \Delta=\left(\log_b(9a)\right)^2+4>0$.

Theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=\log_a b \\ x_3+x_4=\log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b\log_b(9a)<3 \Leftrightarrow \log_a(9a)<3 \Leftrightarrow 9a<a^3 \Rightarrow a\geq 4$.

Vì vậy $b>16 \Rightarrow S>3.4+2.17=46$.

Câu 116. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}$. Gọi $S=xy+yz+zx$. Khẳng định nào đúng?

A. $S\in(1;2016)$ **B.** $S\in(0;2017)$ **C.** $S\in(0;2018)$ **D.** $S\in(2016;2017)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}=k$ và $\frac{2017}{x+y}-z=t$ suy ra $\begin{cases} 3=k^{\frac{1}{x}} \\ 5=k^{\frac{1}{y}} \end{cases}$ và $15=k^{\frac{1}{t}}$

Khi đó $3.5=k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow t(x+y)=xy \Leftrightarrow 2017-(x+y)z=(xy)$
Vậy $xy+yz+xz=2017 \to S\in(0;2018)$

Câu 117. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{\sqrt{x+2}-x}-5m=0$ có nghiệm thực

A. $\left(0;5\sqrt[4]{5}\right]$. **B.** $\left[5\sqrt[4]{5};+\infty\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left[0;5\sqrt[4]{5}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $m>0$. $5^{\sqrt{x+2}-x}-5m=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}-x=1+\log_5 m$ (1) $(x\geq -2)$.

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}-x$ $(x\geq -2)$ với đường thẳng $y=1+\log_5 m$. Hàm số $y=\sqrt{x+2}-x$ $(x\geq -2)$ có $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-1; y'=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{4}$.

Bảng biến thiên

x	-2		$-\frac{7}{4}$		$+\infty$
y'	||	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

Để phương trình ban đầu có nghiệm thực thì $1+\log_5 m\leq\frac{9}{4} \Rightarrow 0<m\leq 5\sqrt[4]{5}$.

VẬN DỤNG

Câu 118. Phương trình $(x-1).2^x = x+1$ có bao nhiêu nghiệm thực

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên ta có $(x-1).2^x = x+1 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{x+1}{x-1}$

Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên R, hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 119. Phương trình: $-2x+1-2^x=0$ có:

A. 1 nghiệm duy nhất thuộc vào $(0;+\infty)$ **B.** 1 nghiệm duy nhất.

C. Vô nghiệm. **D.** Có 2 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Chọn B. * Cách 1: $-2x+1-2^x=0 \Leftrightarrow 2^x = 1-2x$

* Cách 2: Dùng Casio: Nhập vào máy phương trình: $-2x+1-2^x$

SOLVE với giá trị bất kì ta được $x=0$,vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét: $x=0 \notin (0;+\infty)$

Câu 120. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x} \ge m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. $m \le 4$. **B.** $m \ge 4$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{\sin^2 x}>0$, ta được $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \ge m$

Xét hàm số $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ là hàm số nghịch biến.

Ta có: $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le y \le 4$. Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \le 4$.

Câu 121. Số nghiệm của phương trình $2x^2+2x-9=(x^2-x-3).8^{x^2+3x-6}+(x^2+3x-6).8^{x^2-x-3}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương trình $\Leftrightarrow x^2+3x-6+x^2-x-3=(x^2-x-3).8^{x^2+3x-6}+(x^2+3x-6).8^{x^2-x-3}$

$\Rightarrow u+v=u.8^v+v.8^u$ **(với** $u=x^2+3x-6; v=x^2-x-3$**)** $\Leftrightarrow (8^u-1)v+(8^v-1)u=0$ $(*)$.

TH1. Nếu $u=0$, khi đó $(*) \Leftrightarrow v=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-6=0 \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right.$

TH2. Nếu $v=0$, tương tự **TH1**.

TH3. Nếu $\boxed{u>0; v>0}$, khi đó $(8^u-1)v+(8^v-1)u>0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH4. Nếu $\boxed{u<0; v<0}$, tương tự **TH3**.

TH5. Nếu $\boxed{u>0; v<0}$, khi đó $(8^u-1)v+(8^v-1)u<0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH6. Nếu $\boxed{u<0; v>0}$, tương tự **TH5**.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Hoặc biến đổi $(*) \Leftrightarrow \dfrac{8^u-1}{u}+\dfrac{8^v-1}{v}=0$, dễ thấy $\dfrac{8^u-1}{u}>0; \forall u \neq 0$ **(Table = Mode 7)**.

Câu 122. Phương trình $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x$ có tổng các nghiệm gần nhất với số nào dưới đây

A. $0,35$. **B.** $0,40$. **C.** $0,50$. **D.** $0,45$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x \Leftrightarrow 2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2$

Hàm số $f(t)=2^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2 \Leftrightarrow 23x^3+x=10x^2 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=\frac{5\pm\sqrt{2}}{23}$$

Tổng các nghiệm bằng $\dfrac{10}{23}\approx 0,4347$

Mẹo: Khi làm trắc nghiệm có thể dùng "*Định lí Vi-ét cho phương trình bậc ba*"

Nếu phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a};\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a};\ x_1x_xx_3=-\frac{d}{a}$$

Câu 123. Tính tổng các nghiệm phương trình $x^2.5^{x-1}-\left(3^x-3.5^{x-1}\right)x+2.5^{x-1}-3^x=0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Sử dụng chức năng CALC của MTCT ta thay các đáp án vào thấy $x=\pm 1$ thỏa mãn.

Cách 2: Biến đổi phương trình thành:

$\left(x^2+3x+2\right).5^{x-1}-(x+1).3^x=0 \Leftrightarrow (x+1)\left[(x+2).5^{x-2}-3^x\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x+2).5^{x-1}=3^x \Leftrightarrow x+2=5.\left(\dfrac{3}{5}\right)^x \quad (1)\end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (1) có vế phải là hàm nghịch biến, vế trái là hàm đồng biến nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pm 1$.

Câu 124. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2.2^x=2x\left(x^2-1\right)+4\left(2^{x-1}-x^2\right)$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $(x-1)^2.2^x=2x^3-2x+2.2^x-4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+1-2\right).2^x=2x\left(x^2-2x-1\right)$.

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left(2^x-2x\right)=0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-1=0 & (1) \\ 2^x=2x & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có tổng 2 nghiệm bằng 2.

Xét $f(x)=2^x-2x$. Có $f'(x)=2^x\ln 2-2$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{2}{\ln 2}$.

Vì phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm nên phương trình (2) có tối đa 2 nghiệm.

Vì $f(1)=f(2)=0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm $x=1$ và $x=2$.

Các nghiệm của phương trình (1) và (2) không trùng nhau.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho $2+1+2=5$.

Câu 125. Phương trình $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x=1$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x$

Ta có: $f\left(2\right)=1$. Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do các cơ số $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1;\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Câu 126. Phương trình $3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0 \Leftrightarrow \left(3^{2x}-1\right)+2x\left(3^x+1\right)-\left(4.3^x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x+1\right)+\left(2x-4\right)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^x+2x-5\right)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow 3^x+2x-5=0$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=3^x+2x-5$, ta có : $f\left(1\right)=0$.

$f'\left(x\right)=3^x\ln 3+2>0;\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$

BÌNH LUẬN : Có thể đặt $t=3^x>0$ sau đó tính delta theo x

VẬN DỤNG CAO

Câu 127. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=2016-x$.

A. 1. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Xét phương trình $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=2016-x$ (*) có:

Vế trái (*): $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=f(x)$ là hàm số đồng biến trên R.

Vế phải (*): $2016-x=g(x)$ là hàm số nghịch biến trên R.

Khi đó phương trình (*) có không quá 1 nghiệm.

Mà $f(0)=2016=g(0)$ nên suy ra (*) có 1 nghiệm duy nhất là $x=0$.

Câu 128. Cho các phương trình: $x^{2017}+x^{2016}+...+x-1=0\left(1\right)$ $\quad x^{2018}+x^{2017}+...+x-1=0\left(2\right)$

Biết rằng phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất lần lượt là a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $a.e^b=b.e^a$. **B.** $a.e^b>b.e^a$. **C.** $a.e^b<b.e^a$. **D.** $a.e^a<b.e^b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét hàm số $f\left(x\right)=x^{2017}+x^{2016}+...+x-1$ trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ ta có:

$f\left(x\right)=2017x^{2016}+2016x^{2015}+...+1>0,\forall x\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$

Mặt khác $f(0).f(1)=-2016<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $a\in(0;1)$.

Chứng minh tương tự với hàm số $g(x)=x^{2018}+x^{2017}+...+x-1$ thì $g(x)=0$ có nghiệm dương duy nhất $b\in(0;1)$.

Ta có $g(a)=a^{2018}+f(a)=a^{2018}>0=g(b) \Rightarrow a>b \Rightarrow a.e^a>b.e^b$.

Để so sánh $a.e^b$ và $b.e^a$ ta xét hiệu $a.e^b-b.e^a=ab\left(\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}\right)=ab\big(h(b)-h(a)\big)>0$.

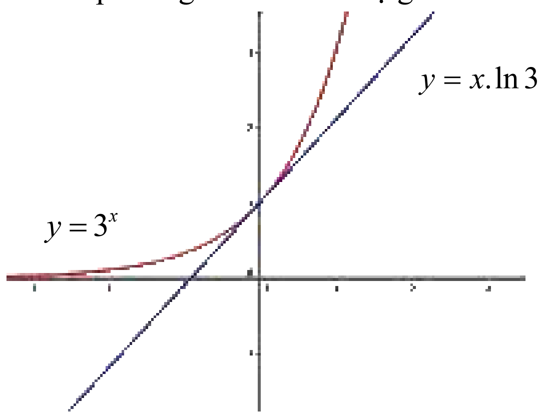
Trong đó $h(x)=\dfrac{e^x}{x}, 0<x<1$, ta có $h'(x)=\dfrac{e^x.x-e^x}{x^2}<0 \Rightarrow h(a)<h(b)$. Vậy $a.e^b>b.e^a$

Câu 129. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $3^x=mx+1$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. $m>0$. **B.** $\begin{cases} m>0 \\ m\neq \ln 3 \end{cases}$. **C.** $m\geq 2$. **D.** Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $3^x=mx+1$ là phương trình hoành độ giao điểm của $y=3^x$ và $y=mx+1$.



Ta thấy $y=mx+1$ luôn đi qua điểm cố định $(0;\,1)$ nên

+ Nếu $m<0$ thì $y=mx+1$ là hàm nghịch biến nên có đồ thị cắt đồ thị hàm số $y=3^x$ tại một điểm duy nhất.

+ Nếu $m>0$ thì để đồ thị hàm số $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=3^x$ tại hai điểm phân biệt thì phải khác tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=3^x$ tại điểm $(0;\,1)$, tức là $m\neq \ln 3$.

Vậy $\begin{cases} m>0 \\ m\neq \ln 3 \end{cases}$.

Câu 130. Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}=m$ có 2 nghiệm phân biệt:

A. $\sqrt{3}+\sqrt{5}<m<4$. **B.** $2\sqrt{2}<m<4$. **C.** $2\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$. **D.** $m>2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ĐK: $x\leq \log_3 5$ Đặt: $f(x)=\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}$ với $x\leq \log_3 5$.

$$f'(x)=\frac{3^x\ln 3}{2\sqrt{3^x+3}}-\frac{3^x\ln 3}{2\sqrt{5-3^x}}=\frac{3^x\ln 3\left(\sqrt{5-3^x}-\sqrt{3^x+3}\right)}{2\left(\sqrt{3^x+3}\right)\left(\sqrt{5-3^x}\right)}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{5-3^x}=\sqrt{3^x+3} \Leftrightarrow x=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\sqrt{3}+\sqrt{5}$

BBT

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Câu 131. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}=4$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Điều kiện $x\neq 0$

- Nếu $x>0\Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}\geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}\geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$ suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}>4,\forall x>0,(1)$

- Nếu $x<0\Rightarrow -x-\dfrac{1}{4x}\geq 1\Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}\leq -1\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{4x}}\leq\dfrac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=-\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{x}\geq 1\Rightarrow\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}\leq -1\Rightarrow 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}\leq\dfrac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$

Suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}<1,\forall x<0,\ (2)$. Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 132. Phương trình $4^{x^2}-2^{(x+1)^2}=2x+1-x^2$ có bao nhiêu nghiệm dương.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $4^{x^2}-2^{(x+1)^2}=2x+1-x^2\Leftrightarrow 2^{2x^2}-2^{(x+1)^2}=(x+1)^2-2x^2\Leftrightarrow 2^{2x^2}+2x^2=2^{(x+1)^2}+(x+1)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall x\in\mathrm{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên **R**.

Phương trình tương đương với $f\left(2x^2\right)=f(x+1)\Leftrightarrow 2x^2=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 133. Cho phương trình $5^{x^2+2mx+2}-5^{2x^2+4mx+2}-x^2-2mx=0$. Tìm m để phương trình vô nghiệm ?

A. $m>0$. **B.** $m<1$. **C.** Không có m. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phương trình tương đương $5^{x^2+2mx+2}+\left(x^2+2mx+2\right)=5^{2x^2+4mx+2}+\left(2x^2+4mx+2\right)$

Do hàm $f(t)=5^t+t$. Đồng biến trên **R** nên ta có: $x^2+2mx+2=2x^2+4mx+2$, từ đó có kq

Câu 134. Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình

$4^{x-1}+2^x.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<x_0<7$. **B.** $x_0>7$. **C.** $-2<x_0<4$. **D.** $-5<x_0<-2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Phương trình $\leftrightarrow\left[\left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$

Phương trình $(2)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=1\xrightarrow{(1)}2^x=0\ (\text{loại}).\\\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=-1\xrightarrow{(1)}2^x=4\leftrightarrow x=2.\end{array}\right.$

CHUYÊN ĐỀ 6: PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa

- Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

2. Phương trình và bất phương trình lôgarit cơ bản: cho $a, b > 0, a \neq 1$

- Phương trình lôgarit cơ bản có dạng: $\log_a f(x) = b$

3. Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit

- **Đưa về cùng cơ số**

➢ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$, với mọi $0 < a \neq 1$

- **Đặt ẩn phụ**
- **Mũ hóa**
- **Phương pháp hàm số và đánh giá**

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \log_3(x^2 - 2x)$. Tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$ là:

A. $S = \varnothing$. **B.** $S = \left\{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right\}$. **C.** $S = \{0; 2\}$. **D.** $S = \{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$. Ta có $f'(x) = \left(\log_3(x^2 - 2x)\right)' = \dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 3}$

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại). Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(x - 2) = 2$.

A. $S = \{16\}$. **B.** $S = \{18\}$. **C.** $S = \{10\}$. **D.** $S = \{14\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$$\log_4(x - 2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ \log_4(x - 2) = \log_4 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x - 2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18.$$

Câu 3: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = 3$.

A. $x = 9$. **B.** $x = 7$. **C.** $x = 8$. **D.** $x = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $x > 1$. Phương trình tương đương với $x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 9$

Câu 4: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Ta có phương trình tương đương

$$2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2.$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $x=3$.

Câu 5: Phương trình $\log_{\sqrt[4]{2}}\left(x^2-2\right)^2=8$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_{\sqrt[4]{2}}\left(x^2-2\right)^2=8\ (1)\ \Rightarrow$ ĐK: $x^2-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$

$(1)\Rightarrow\left(x^2-2\right)^2=\left(\sqrt[4]{2}\right)^8\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\vee x=2\\x=0.\end{array}\right.$

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\log(x-1)^2=2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** một số khác.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\log(x-1)^2=2=\log 10^2\Leftrightarrow(x-1)^2=100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\\x=-9\end{array}\right.$.

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(2^x-1\right)=-2$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\log_2\left(2^x-1\right)=-2\Leftrightarrow\begin{cases}2^x-1>0\\2^x-1=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x=\log_2\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{5}{4}$.

Câu 8: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left[x(x-1)\right]=1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $pt\Leftrightarrow x(x-1)=2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.

Câu 9: Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\log_2\left[x(x+3)\right]=1$. Khi đó x_1+x_2 bằng:

A. -3. **B.** -2. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>0\end{array}\right.$ $\log_2\left[x(x+3)\right]=1\Leftrightarrow x(x+3)=2\Leftrightarrow x^2+3x-2=0$ Vậy $x_1+x_2=-3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng chức năng SOLVE trên máy tính bỏ túi tìm được 2 nghiệm và lưu 2 nghiệm vào A và B. Tính A + B = – 3.

Câu 10: Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $\log_2\left[x(x-1)\right]=1$. Khi đó tích $x_1.x_2$ bằng:

A. -2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x<0$ hoặc $x>1$ $\log_2\left[x(x-1)\right]=1\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x_1.x_2=-2$

Câu 11: Điều kiện xác định của phương trình $\log_9\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ là:

A. $x\in(-1;+\infty)$. **B.** $x\in\mathbb{R}\setminus[-1;0]$. **C.** $x\in(-1;0)$. **D.** $x\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $\log_9\dfrac{2x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow\dfrac{2x}{x+1}>0\Leftrightarrow x<-1\vee x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$

Câu 12: Điều kiện xác định của phương trình $\log_{2x-3}16=2$ là:

A. $x\in\mathbb{R}\backslash\left[\frac{3}{2};2\right]$. **B.** $x\neq 2$. **C.** $\frac{3}{2}<x\neq 2$. **D.** $x>\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $\log_{2x-3}16$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\2x-3\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<x\neq 2$

Câu 13: Phương trình $\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=\log_3 x-1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn B. Giải phương trình: $\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=\log_3 x-1$. Điều kiện xác định: $x\geq 1$

$\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=\log_3 x-1\Leftrightarrow\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=2\log_9 x-1$

$\Leftrightarrow 1-2\log_9 x=(2\log_9 x-1)\left(\sqrt{1+\log_9 x}+3\sqrt{\log_9 x}\right)$

$\Leftrightarrow (2\log_9 x-1)\left(\sqrt{1+\log_9 x}+3\sqrt{\log_9 x}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\log_9 x=1$ vì: $\sqrt{1+\log_9 x}+\sqrt{3\log_9 x}+1>0\Leftrightarrow x=3$.

Vậy nghiệm phương trình đã cho: $x=3$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\log_3(x^2-2x)$. Tập nghiệm S của phương trình $f''(x)=0$ là

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\left\{1\pm\sqrt{2}\right\}$. **C.** $S=\{0;2\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x^2-2x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$. $f'(x)=\frac{2x-2}{(x^2-2x).\ln 3}$, $f''(x)=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{-2x^2+4x-4}{(x^2-2x)^2}\right)$.

Pt: $f''(x)=0\Leftrightarrow -2x^2+4x-4=0$ vô nghiệm.

Câu 15: Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16}x=\frac{81}{24}$ là :

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16}x=\frac{81}{24}\Leftrightarrow(\log_2 x)\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{4}\log_2 x\right)=\frac{81}{24}$

$\Leftrightarrow\log_2^4=81\Leftrightarrow\log_2 x=\pm 3\Leftrightarrow x=8$ hoặc $x=\frac{1}{8}$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1}{8};8\right\}\Rightarrow x_1.x_2=1$.

Câu 16: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_3(2x-1)=2\log_2 x$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2x-1>0\\\log_2 x.\log_3(2x-1)=2\log_2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\\log_2 x\left[\log_3(2x-1)-2\right]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_3(2x-1) = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Câu 17: Điều kiện xác định của phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$ là:

A. $x \le -1$. **B.** $x \ge 1$. **C.** $x > 0, x \ne 1$. **D.** $x \le -1$ hoặc $x \ge 1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Phương trình xác định khi và chỉ khi : $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1} > 0 \\ x+\sqrt{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $x=-1$ (thuộc A, D) vào biểu thức $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ được $\log_2(-1)$ không xác định,

Thay $x=\frac{1}{2}$ (thuộc C) vào biểu thức $\sqrt{x^2-1}$ được $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ không xác định

Vậy loại A, C, D chọn đáp án **B.**

Câu 18: Điều kiện xác định của phương trình $\log_x(2x^2-7x-12)=2$ là:

A. $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. **B.** $x \in (-\infty;0)$. **C.** $x \in (0;1)$. **D.** $x \in (0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $\log_x(2x^2-7x-12)$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 2x^2-7x+12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 2\left[(x-\frac{7}{4})^2+\frac{47}{16}\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$$

VẬN DỤNG

Câu 19: Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right)\right)=0$. Giá trị lớn nhất của ab là:

A. 500. **B.** 375. **C.** 250. **D.** 125.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có biến đổi mũ và loagarit

$$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right)\right)=0 \Leftrightarrow \log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right)=1 \Leftrightarrow \log_{2^b} 2^{1000}=2^a \Leftrightarrow 2^{1000}=2^{b.2^a} \Leftrightarrow b.2^a=1000$$

Do a,b là các số nguyên dương nên $1000 \vdots 2^a \Rightarrow a < 3$.

+) Nếu $a=3 \Rightarrow b=125 \Rightarrow ab=375$.

+) Nếu $a=2 \Rightarrow b=250 \Rightarrow ab=500$.

+) Nếu $a=1 \Rightarrow b=500 \Rightarrow ab=500$. Vậy giá trị lớn nhất của ab là 500.

Câu 20: Định điều kiện của m để: $\log_3 5; \log_m 2; \log_5 3$ tạo thành cấp số cộng (theo thứ tự).

A. $m=\frac{\log_3 5+\log_5 3}{2}$ **B.** $m=2.\frac{1}{\log_3 5+\log_5 3}$ **C.** $m=4^{\frac{1}{\log_3 5+\log_5 3}}$ **D.** $m=4^{\log_3 5+\log_5 3}$

Hướng dẫn giải

Nhắc lại công thức A, B, C được gọi là cấp số cộng khi $2.B = A + C$ (theo thứ tự)

Điều kiện $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ Để $\log_3 5; \log_m 2; \log_5 3$ tạo thành 1 cấp số cộng thì:

$$2.\log_m 2 = \log_3 5 + \log_5 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 m} = \frac{(\log_3 5 + \log_5 3)}{2} \Leftrightarrow \log_2 m = \frac{2}{\log_3 5 + \log_5 3}$$

$\Leftrightarrow m = 2^{\frac{2}{\log_3 5 + \log_5 3}} = 4^{\frac{1}{\log_3 5 + \log_5 3}}$ **Chọn C**

Câu 21: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx - \ln x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;3)$.

A. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 3}{3}\right)$. **B.** $\left(-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right) \cup \left(\frac{\ln 3}{3}; +\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{1}{e}\right)$. **D.** $\left(\frac{\ln 3}{3}; \frac{1}{e}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Với $x \in (2;3)$ ta có $mx - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = m$

Xét hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên:

x	2		e		3
y'		+	0	−	
y	$\frac{\ln 2}{2}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 3}{3}$

Dựa vào BBT, phương trình $m = \frac{\ln x}{x}$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(2;3)$ khi và chỉ khi $\frac{\ln 3}{3} < m < \frac{1}{e}$.

VẬN DỤNG CAO:

Câu 22: Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

A. $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$ **B.** Không có m **C.** $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$ **D.** $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Phân tích: Đặt $\log_2 m = a \geq 0$ khi đó $m = 2^a$.

Xét hàm số $f(x) = |x^4 - 5x^2 + 4|$.ta sẽ xét như sau, vì đây là hàm số chẵn nên đối xứng trục Oy. Do vậy ta sẽ xét hàm $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ trên $\mathbb{R}$, sau đó lấy đối xứng để vẽ đồ thị hàm $y = f(x)$ thì ta giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành ta được (P_1), lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được (P_2), khi đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(P) = (P_1) \cup (P_2)$. Lúc làm thì quý độc giả có thể vẽ nhanh và suy diễn nhanh.

Nhìn vào đồ thị ta thấy để phương trình đã cho có 4 nghiệm thì $0 < a < \frac{9}{4} \Rightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}$

Câu 23: Tìm m để phương trình $m.\ln(1-x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0;1)$.

A. $m \in (0;+\infty)$. **B.** $m \in (1;e)$. **C.** $m \in (-\infty;0)$. **D.** $m \in (-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $0 < x < 1$.

Cách 1:

Chọn $m=1$ ta có $\ln(1-x)-\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{x} = \ln e \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} = e \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e+1}$ (thỏa mãn).

Vậy loại các phương án **B, C, D.**

Cách 2:

Thật vậy: $m.\ln(1-x)-\ln x = m \Leftrightarrow m = \dfrac{\ln x}{\ln(1-x)-1}\left(x \in (0;1)\right)$;

Xét hàm số $y = \dfrac{\ln x}{\ln(1-x)-1}\left(x \in (0;1)\right); y' = \dfrac{\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x}\ln(1-x)+\dfrac{\ln x}{1-x}}{\left(1-\ln(1-x)\right)^2} < 0\left(\forall x \in (0;1)\right)$

Ta có bảng biến thiên

x	0		1
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

Vậy $m \in (0;+\infty)$

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln\left(m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)\right) = \sin x$ có nghiệm ?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn giải

$\left[m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)\right]+\ln\left[m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)\right] = (m+3\sin x)+\ln(m+3\sin x)$

$\Leftrightarrow a+\ln a = b+\ln b \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow m+2\sin x+\ln(m+3\sin x) = m+3\sin x \Leftrightarrow \ln(m+3\sin x) = \sin x$

$\Leftrightarrow m+3\sin x = e^{\sin x} \Leftrightarrow m = e^{\sin x}-3\sin x$. Xét hàm số $f(t) = e^t-3t$ với $t \in [-1;1]$.

Vì $f'(t) = e^t-3 < 0 \ \forall t \in [-1;1]$ nên:

$\begin{cases} \max e^{\sin x}-3\sin x = f(-1) = \dfrac{1}{e}+3 \\ \min e^{\sin x}-3\sin x = f(1) = e-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{e-3 \le m \le \dfrac{1}{e}+3}$. **Chọn B.**

Câu 25: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính ab.

A. $a.b = 5$. **B.** $a.b = 1$. **C.** $a.b = 8$. **D.** $a.b = 4$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) \Rightarrow x = 9^t; y = 6^t; x+y = 4^t$

Ta có: $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}(\text{loai}) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\text{nhan}) \end{array}\right.$

Mà $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó: $a = 1; b = 5$ và $a.b = 5$.

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 26: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-3\right) - \log_2\left(6x-10\right) + 1 = 0$ là:

A. Vô nghiệm. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Điều kiện: $x > \sqrt{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2-3}{6x-10} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{6x-10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

So điều kiện nhận nghiệm $x = 2$ nên phương trình có 1 nghiệm.

Câu 27: Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(2^x+1\right) + \log_3\left(4^x+5\right) = 1$ có tập nghiệm là tập nào sau đây?

A. $\{1;2\}$. **B.** $\left\{3;\frac{1}{9}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{3};9\right\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. $\log_{\frac{1}{3}}\left(2^x+1\right) + \log_3\left(4^x+5\right) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left(4^x+5\right) = \log_3 3 + \log_3\left(2^x+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(4^x+5\right) = \log_3\left[3\left(2^x+1\right)\right] \Leftrightarrow 4^x + 5 = 3\left(2^x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 3.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-1\right) = \log_2\left(2x\right)$ là

A. $\left\{1+\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\{2;41\}$. **C.** $\left\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Khi đó PT $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

Câu 29: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2\left(x^2-4x+3\right) = \log_2\left(4x-4\right)$

A. $S = \{1;7\}$. **B.** $S = \{7\}$. **C.** $S = \{1\}$. **D.** $S = \{3;7\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_2\left(x^2-4x+3\right) = \log_2\left(4x-4\right)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-4x+3 = 4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-8x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2-x-6)+x=\log(x+2)+4$ là

A. $\{3\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$. Khi đó $\log(x^2-x-6)+x=\log(x+2)+4$

$\Leftrightarrow \log(x+2)+\log(x-3)+x=\log(x+2)+4 \Leftrightarrow \log(x-3)=4-x \Leftrightarrow x=4$.

Giải thích vế trái hàm đồng biến – Vế phải nghịch biến nên phương trình có nghiệm duy nhất!

Câu 31: Giải phương trình $2\log_2\left(x^2-x-1\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(x-1\right)$.

A. vô nghiệm. **B.** $x=2$. **C.** $x=0,\ x=2$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Phương trình tương đương với:

$\log_2\left(x^2-x-1\right)=\log_2\left(x-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-x-1=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Câu 32: Cho phương trình $\log_5\left(x^3+2\right)+\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-6\right)=0$ (1). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2>0 \\ x^2-6>0 \\ x^3-x^2+8=0 \end{cases}$. **B.** $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2>0 \\ x^3-x^2+8=0 \end{cases}$.

C. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6>0 \\ x^3-x^2+8=0 \end{cases}$. **D.** $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3+2\right)\left(x^2-6\right)>0 \\ x^3-x^2+8=0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} x^3+2>0 \\ x^2-6>0 \end{cases}$.

Do đó với $\left(x^3+2\right)\left(x^2-6\right)>0$ ta không thể suy ra điều kiện này.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_5\left(x^3+2\right)-\log_5\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \log_5\dfrac{x^3+2}{x^2-6}=0=\log_5 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+2}{x^2-6}=1$

$\Leftrightarrow x^3-x^2+8=0$.

Câu 33: Số nghiệm của phương trình $\log_5(5x)-\log_{25}(5x)-3=0$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_5(5x)-\log_{25}(5x)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_5(5x)-\frac{1}{2}\log_5(5x)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \frac{1}{2}\log_5(5x)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_5(5x)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 5x=5^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=5^5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5^5.$$

Câu 34: Số nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-6x+7\right)=\ln\left(x-3\right)$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\ln\left(x^2-6x+7\right)=\ln\left(x-3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x^2-6x+7=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\ln\left(X^2-6X+7\right)-\ln\left(X-3\right)=0$

Ấn SHIFT CALC nhập X=4 (chọn X thỏa điều kiện xác định của phương trình), ấn $\boxed{=}$. Máy hiện X=5.

Ấn Alpha X Shift STO A

Ấn AC. Viết lại phương trình: $\dfrac{\ln\left(X^2-6X+7\right)-\ln\left(X-3\right)}{X-A}=0$

Ấn SHIFT CALC. Máy hỏi A? ẤN = Máy hỏi X? Ấn 7 =.

Máy không giải ra nghiệm. Vậy đã hết nghiệm.

Câu 35: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2-x-5\right)=\log_3\left(2x+5\right)$. Khi đó $\left|x_1-x_2\right|$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\log_3\left(x^2-x-5\right)=\log_3\left(2x+5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5>0\\x^2-x-5=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{5}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-2\end{array}\right.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng chức năng SOLVE trên máy tính bỏ túi tìm được 2 nghiệm là 5 và –2.

Câu 36: Số nghiệm của phương trình $\log_4\left(x+12\right).\log_x 2=1$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện : $0<x\neq 1$

$$\log_4\left(x+12\right).\log_x 2=1\Leftrightarrow\log_2\left(x+12\right)=\log_2 x^2\Leftrightarrow -x^2+x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=4\end{array}\right.$$. Loại $x=-3$

Câu 37: Một bạn giải bất phương trình lôgarit $\log_5\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)\le\log_5\left(x-3\right)\left(x-5\right)$ (1) như sau:

Bước 1:

Điều kiện: $\begin{cases}\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)>0\\\left(x-3\right)\left(x-5\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;3\right)\cup\left(5;+\infty\right)\\x\in\left(-\infty;3\right)\cup\left(5;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;3\right)\cup\left(5;+\infty\right)$.

Bước 2: Tập xác định: $D=\left(1;3\right)\cup\left(5;+\infty\right)$.

Bước 3: $(1)\Leftrightarrow\log_5\left(x-1\right)+\log_5\left(x-3\right)+\log_5\left(x-5\right)\le\log_5\left(x-3\right)+\log_5\left(x-5\right)$

$\Leftrightarrow\log_5\left(x-1\right)\le 0\Leftrightarrow x-1\le 1\Leftrightarrow x\le 2$.

Bước 4: Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $T=\varnothing$.

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Hướng dẫn giải

Bước thứ 3 sai vì điều kiện xác định của bất phương trình (1) là $x\in\left(1;3\right)\cup\left(5;+\infty\right)$ nên khi $x=2$ thì $x-3=2-3=-1<0$ nên không tồn tại $\log_5\left(x-3\right)$, học sinh đã sai lầm ở bước này. Vậy đáp án chính xác là đáp án **C.**

Câu 38: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x+3\right)-1=\log_{\sqrt{2}} x$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Giải

Chọn A.

Điều kiện: $x>0$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x+3)=\log_2 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

So sánh điều kiện $\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 39: Trong giờ kiểm tra, một học sinh giải phương trình $2\log_2(x-1)+\log_2(x-2)^2=0$ bằng 3 bước như sau:

Bước 1: Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ (x-2)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Bước 2: Từ điều kiện trên phương trình trở thành

$2\log_2(x-1)+2\log_2(x-2)=0 \Leftrightarrow 2\log_2[(x-1).(x-2)]=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=1$

Bước 3: $\Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. So với điều kiện nhận $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Hỏi học sinh trên làm sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Không sai bước nào.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Dò từng bước của học sinh để tìm lỗi sai.

Bước 1: Đây là bước tìm điều kiện, không có lỗi gì.

Bước 2: Học sinh giải bài này đã sai ở việc đem mũ 2 ra ngoài mà không đặt $(x-2)$ trong dấu trị tuyệt đối.

Phương trình đúng phải là: $2\log_2(x-1)+2\log_2|x-2|=0$

$\log_a b^2=2\log_a|b|$

Rõ ràng với điều kiện đã giải:

$\begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$ ta không thể nào xác định được $(x-2)$ là dương hay âm nên phải đặt trong dấu trị tuyệt đối. Vậy bài giải trên sai ở bước 2.

Câu 40: Giải phương trình $\log_4(x+1)+\log_4(x-3)=3$.

A. $x=1\pm 2\sqrt{17}$. **B.** $x=1+2\sqrt{17}$. **C.** $x=33$. **D.** $x=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đk $x>3$

Ta có $\log_4(x+1)+\log_4(x-3)=3 \Leftrightarrow \log_4(x+1)(x-3)=3 \Leftrightarrow x^2-2x-67=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+2\sqrt{17} \\ x=1-2\sqrt{17} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x=1+2\sqrt{17}$ là nghiệm của phương trình.

Câu 41: Điều kiện xác định của phương trình $\log(x^2-6x+7)+x-5=\log(x-3)$ là:

A. $x>3+\sqrt{2}$. **B.** $x>3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x>3+\sqrt{2} \\ x<3-\sqrt{2} \end{array}\right.$. **D.** $x<3-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện pt: $\begin{cases} x^2-6x+7>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3+\sqrt{2} \\ x<3-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3+\sqrt{2}$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\log(X^2-6X+7)+X-5-\log(X-3)$

Nhấn CALC và cho $X=1$ máy tính không tính được. Vậy loại đáp án C và **D.**

Nhấn CALC và cho $X=4$ (thuộc đáp án B) máy tính không tính được. Vậy loại **B.**

Câu 42: Điều kiện xác định của phương trình $\log_2(x-5)+\log_3(x+2)=3$ là:

A. $x\ge 5$. **B.** $x>-2$. **C.** $-2<x<5$. **D.** $x>5$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] PT xác định khi và chỉ khi: $\begin{cases} x-5>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\log_2(X-5)+\log_3(X+2)-3$

Nhấn CALC và cho $X=1$ máy tính không tính đượ**C.** Vậy loại đáp án B và **C.**

Nhấn CALC và cho $X=5$ (thuộc đáp án D) máy tính không tính được **C.** Vậy loại **D.**

Câu 43: Điều kiện xác định của phương trình $\log_5(x-1)=\log_5\dfrac{x}{x+1}$ là:

A. $x\in(1;+\infty)$. **B.** $x\in(-1;0)$. **C.** $x\in\mathbb{R}\setminus[-1;0]$. **D.** $x\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ĐK xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Câu 44: Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x>0 \\ \log_4 x>0 \\ \log_{2^2}(\log_2 x)+\log_2(\log_{2^2} x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x)+\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x)+\log_2\dfrac{1}{2}+\log_2(\log_2 x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{3}{2}\log_2(\log_2 x)-1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2(\log_2 x)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2 x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=16 \end{cases} \Rightarrow x=16.$$

Câu 45: Cho phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+....+\log(\tan 89^\circ)$.

Giá trị x nào sau đây là nghiệm của phương trình trên?

A. $x>2$ **B.** $x=2+\sqrt{3}$ **C.** $x=5$ **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện $x>2$

$\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+....+\log(\tan 89^\circ)=\log[\tan 1^\circ.\tan 2^\circ.\tan 3^\circ....\tan 89^\circ]$

$=\log[\tan 1^\circ.\cot 1^\circ.\tan 2^\circ.\cot 2^\circ....\tan 45^\circ.\cot 45^\circ]=\log 1=0$

Vậy phương trình đã cho trở thành: $\log_{\sqrt{3}}(x-2)=0 \Rightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ (nhận)

Quan sát thấy A,B,C không phải giá trị nghiệm cần tìm.

Câu 46: Phương trình $\log_3(5x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trong đó $x_1<x_2$. Giá trị của $P=2x_1+3x_2$ là

A. 5. **B.** 14. **C.** 3. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3>0 \\ \log_3(5x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{5} \\ \log_3(5x-3)-\log_3(x^2+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{5} \\ \log_3(5x-3)=\log_3(x^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{5} \\ 5x-3=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{5} \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy $2x_1+3x_2=2.1+3.4=14$.

Câu 47: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^3+1)-\log_2(x^2-x+1)-2\log_2 x=0$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^3+1>0 \\ x^2-x+1>0 \\ \log_2(x^3+1)-\log_2(x^2-x+1)-2\log_2 x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^3+1}{x^2(x^2-x+1)}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2(x^2-x+1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$$

Câu 48: Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $-\log_{\sqrt{3}}(x-2).\log_5 x=2\log_3(x-2)$ là:

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện: $x>2$

$$-\log_{\sqrt{3}}(x-2).\log_5 x=2\log_3(x-2) \Leftrightarrow -2\log_3(x-2).\log_5 x=2\log_3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2)=0 \\ \log_5 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2)=0 \\ \log_5 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

So điều kiện suy ra phương trình có nghiệm $x=3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $-\log_{\sqrt{3}}(X-2).\log_5 X-2\log_3(X-2)$

Nhấn CALC và cho $X=\dfrac{1}{5}$ (số nhỏ nhất) ta thấy sai. Vậy loại đáp án **A.**

Nhấn CALC và cho $X=1$ ta thấy sai. Vậy loại đáp án **D.**

Nhấn CALC và cho $X=2$ ta thấy sai. Vậy loại đáp án **C.**

Câu 49: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Hướng dẫn giải

$\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ (2) Điều kiện: $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ 4-x>0 \\ 4+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<x<4 \\ x\neq -1 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2(4-x)+\log_2(4+x) \Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2(16-x^2)$$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2\left(16-x^2\right) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$

+ Với $-1<x<4$ ta có phương trình $x^2+4x-12=0$ (3); (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

+ Với $-4<x<-1$ ta có phương trình $x^2-4x-20=0$ (4); $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{24} \\ x=2+\sqrt{24}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ hoặc $x=2\left(1-\sqrt{6}\right)$, chọn B

Câu 50: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(2x-1\right)=2$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(2x-1\right)=2 \Leftrightarrow \log_3(x-1)^2+2\log_3\left(2x-1\right)=2$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2\left(2x-1\right)^2=2 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(2x-1\right)^2=3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-1\right)\left(2x-1\right)=3 \\ \left(x-1\right)\left(2x-1\right)=-3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=0 \\ 2x^2-3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Phương trình có một nghiệm.

VẬN DỤNG

Câu 51: Với giá trị m bằng bao nhiêu thì phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}(mx+3)+\log_{2-\sqrt{3}}(m^2+1)=0$ có nghiệm bằng -1?

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$ **C.** $m<3$ **D.** $m>3$

Hướng dẫn giải

Chọn B. * Cách 1: Dùng công thức:

Điều kiện $\begin{cases} mx+\sqrt{3}>0 \\ m^2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow mx+\sqrt{3}>0 \Rightarrow -m+\sqrt{3}>0 \Rightarrow m<\sqrt{3}$

Nhận xét: $\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ nên ta được kết quả sau:

$\log_{2+\sqrt{3}}(mx+\sqrt{3})-\log_{2+\sqrt{3}}\left(m^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}\left(mx+\sqrt{3}\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(m^2+1\right) \Leftrightarrow mx+\sqrt{3}=m^2+1$

Vì $x=-1$ ta được

$-m+3=m^2+1 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. So với đáp án nhận cả 2 nghiệm trên.

* Cách 2: Dùng Casio

Thay m bằng các đáp án ta sẽ $\boxed{\text{CALC}}$ xem phương trình có nghiệm $x=-1$ hay không?

Tác giả sẽ làm 1 đáp án, các đáp án còn lại bạn đọc tự giải:

Giả sử $m=1$

Nhập vào máy tính biểu thức: $\log_{2+\sqrt{3}}(x+3)+\log_{2-\sqrt{3}}2$

$\boxed{\text{CALC}}$ với giá trị $X=-1$ được giá trị 0 vậy $m=1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$. Giả sử $m=-1$

Nhập vào máy tính biểu thức: $\log_{2+\sqrt{3}}(-x+3)+\log_{2-\sqrt{3}}2$

$\boxed{\text{CALC}}$ với giá trị $X=-1$ được giá trị 0.5263244... vậy $m=-1$ thì phương trình đã cho không có nghiệm $x=-1$

Suy ra loại câu A, làm thêm trường hợp $m=-2$ nữa ta có thể kết luận đáp án đúng là B

Câu 52: Phương trình $\log_{a^3+2} 3-\log_{4-a} 3=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\mathbb{R}$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện $\begin{cases} a^3+2>0 \\ a^3+2\neq 1 \\ 4-a>0 \\ 4-a\neq 1 \end{cases}$

Những bài có điều kiện dài như thế này không nên giải ngay từ đầu, ta cứ để đó khi nào cần đến sẽ thay giá trị vào.

Bài này không có biến x nên hiểu a là nghiệm của phương trình.

$\log_{a^3+2} 3-\log_{4-a} 3=0 \Leftrightarrow \log_{a^3+2} =\log_{4-a} 3 \Rightarrow a^3+2=4-a \Leftrightarrow a=1$

So với điều kiện đầu đề bài ta thấy 1 là nghiệm của phương trình.

Sai lầm: Với thói quên đặt điều kiện $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ nên nhiều bạn không nhận $a=1$.

Các bạn cũng có thể dùng Casio giải như các bài ở trên nhé! Tuy nhiên với những bài hỏi “số nghiệm” thì phải $\boxed{\text{SOLVE}}$ với nhiều giá trị để đảm bảo không thiếu nghiệm.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m$ có nghiệm?

A. $m>1$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện $x>2; m>0$ $\quad \log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m \Leftrightarrow x=(x-2)m^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2m^2}{m^2-1}$

Phương trình có nghiệm $x>2$ khi $m>1$, chọn đáp án A

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $m=0$ (thuộc C, D) vào biểu thức $\log_{\sqrt{3}} m$ không xác định, vậy loại C, D,

Thay $m=1$ (thuộc B) ta được phương trình tương đương $x=x-2$ vô nghiệm. Chọn **A.**

Câu 54: Hai phương trình $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$ và $\log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ lần lượt có 2 nghiệm duy nhất là x_1,x_2. Tổng x_1+x_2 là?

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

PT1: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ 2x+1>0 \\ 2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ \log_5(3x-1)^2+\log_5 5=3\log_5(2x+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ \log_5 5(3x-1)^2=\log_5(2x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ 5(3x-1)^2=(2x+1)^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ 5(9x^2-6x+1)=8x^3+12x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ 8x^3-33x^2+36x-4=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=2$

PT2: $\log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-8>0 \\ x+2>0 \\ \log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \vee x>4 \\ x>-2 \\ \log_2(x^2-2x-8)=1+\log_2(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ \log_2(x^2-2x-8)=\log_2 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x^2-2x-8=2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x^2-4x-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x_2=6.$$ Vậy $x_1+x_2=2+6=8$.

Câu 55: Tổng các nghiệm của phương trình $1+\log_2\sqrt{(x+1)^3}=\log_2\left(-x^3+3x^2+3x\right)$ có dạng $\frac{a+\sqrt{c}}{b}-b\sqrt{b}\left(a,b,c\in\mathbb{N}\right)$. Giá trị $a+b+c$ là:

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Hướng dẫn giải

Chọn D. Phương trình biến đổi thành:

$$2\sqrt{(x+1)^3}=-x^3+3x^2+3x \Rightarrow 4\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=x^6+9x^4+9x^2-6x^5-6x^4+18x^3$$

$$\Leftrightarrow x^6-6x^5+3x^4+14x^3-3x^2-12x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{2}\right)\left(x-2+2\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-2\sqrt{2} \\ x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x=2+2\sqrt{2} \end{array}\right. \text{(thử lại)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-2\sqrt{2} \\ x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

VẬN DỤNG CAO

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2|-\log_{\frac{2}{3}}(x+1)=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m>3$. **B.** $m<2$. **C.** $m>0$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Điều kiện: $-1<x\neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_{\frac{3}{2}}|x-2|+\log_{\frac{3}{2}}(x+1)=m$

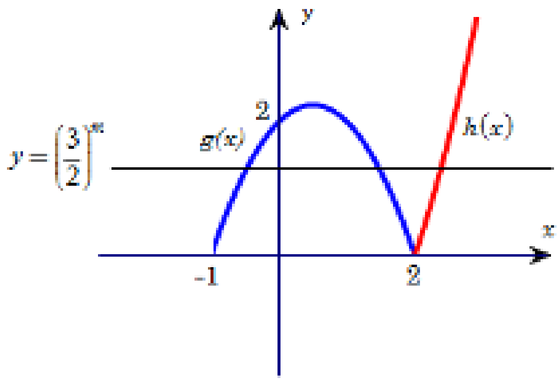
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}\left(|x-2|(x+1)\right)=m \Leftrightarrow |x-2|(x+1)=\left(\frac{3}{2}\right)^m. \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=|x-2|(x+1)$ và đường thẳng $y=\left(\frac{3}{2}\right)^m$ (cùng phương với trục hoành).

Xét hàm số $f(x)=|x-2|(x+1)$ xác định trên $(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $f(x)=|x-2|(x+1)=\begin{cases} h(x)=(x-2)(x+1)=x^2-x-2 & \text{khi } x>2 \\ g(x)=-(x-2)(x+1)=-x^2+x+2 & \text{khi } -1<x<2 \end{cases}$.

Đồ thị



Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khi

$$0<\left(\frac{3}{2}\right)^m<\max_{(-1;2)} g(x) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^m<\frac{9}{4}\Leftrightarrow m<2.$$

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x|+\log_2|x+3|=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in\{0;2\}$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in\{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện: $\begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$2\log_2|x|+\log_2|x+3|=m\Leftrightarrow \log_2 x^2|x+3|=m\Leftrightarrow x^2|x+3|=2^m$

Xét hàm số: $y=x^2|x+3|$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$ $\Rightarrow y'=\begin{cases} 3x^2+6x & x>-3 \\ -3x^2-6x & x<-3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm khi: $\begin{cases} 2^m=0 \\ 2^m>4 \end{cases}\Leftrightarrow m>2$

Câu 58: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

A. $m<19$ **B.** $m>39$ **C.** $19<m<\frac{39}{2}$ **D.** $19<m<39$

Hướng dẫn giải

$\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0\Leftrightarrow \log_2(mx-6x^3)-\log_2(-14x^2+29x-2)=0$

$\Leftrightarrow mx-6x^3=-14x^2+29x-2\Leftrightarrow m=\dfrac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}$

$$f(x)=\frac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}\Leftrightarrow f'(x)=12x-14+\frac{2}{x^2}\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow f(1)=19\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{39}{2}\\ x=-\frac{1}{3}\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{121}{3}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án **C.**

Câu 59: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$pt\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\ mx-8>0\\ \log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ mx-8>0\\ (x-1)^2=mx-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x^2-2x+9=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x-2+\frac{9}{x}=m\end{cases}$$

Xét hàm số $f(x)=x-2+\frac{9}{x}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 3$.

Bảng biến thiên

x		1		3		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Để Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên $(1;+\infty)$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $4<m<8$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 60: Tìm m để phương trình $\log_2\left(mx-6x^3\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2+29x-2\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt:

A. $19<m<\frac{39}{2}$ **B.** $m<\frac{39}{2}$ **C.** $\frac{3}{38}<m<\frac{39}{2}$ **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình $\Leftrightarrow\log_2(mx-6x^3)=\log_2(-14x^2+29x-2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-14x^2+29x-2>0\\ mx-6x^3=-14x^2+29x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}<x<2\\ m=6x^2-14x+29-\frac{2}{x}\ (*)\end{cases}$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $x\in\left(\frac{1}{14};2\right)$

Xét hàm số $f(x)=6x^2-14x+29-\frac{2}{x}$, $\frac{1}{14}<x<2$

Ta có $f'(x)=12x-14+\frac{2}{x^2}=\frac{12x^3-14x^2+3}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3-14x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.\ (\text{do } \frac{1}{14}<x<2)$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
y'		+	0	-	0	+	
y	$\frac{3}{98}$	↗	$\frac{39}{2}$	↘	19	↗	24

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (*)có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(\frac{1}{14};2\right) \Leftrightarrow 19 < m < \frac{39}{2}$.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$.

A. $\frac{-1}{4} < m < 0$. **B.** $5 \le m \le \frac{21}{4}$. **C.** $5 < m < \frac{21}{4}$. **D.** $\frac{-1}{4} \le m \le 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2>0\\ \log_3(1-x^2)=\log_3(x+m-4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-1;1)\\ 1-x^2=x+m-4\end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=x^2+x+m-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in(-1;1)$

Cách 1: Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

躲ể thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thỏa:

$$-1<x_1<x_2<1 \Leftrightarrow \begin{cases}a.f(-1)>0\\ a.f(1)>0\\ \Delta>0\\ -1<\frac{S}{2}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-5>0\\ m-3>0\\ 21-4m>0\end{cases} \Leftrightarrow 5<m<\frac{21}{4}.$$

Cách 2: Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Cách 3: Dùng đồ thị

Đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in(-1;1)$.

Cách 4: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x)=x^2+x-5 \Rightarrow f'(x)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

Có $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{21}{4}; f(1)=-3; f(-1)=-5$. Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↘	$-\frac{21}{4}$	↗	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi

$-\dfrac{21}{4} < -m < -5 \Rightarrow \dfrac{21}{4} > m > 5$.

Cách 5: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2 + x + m - 5 = 0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m = -0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại A, D.**

* Giải khi $m = 5$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại B.**

Câu 62: Cho các số thực dương x, y thay đổi thoả mãn $\log(x+2y) = \log x + \log y$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}$ là $e^{\frac{a}{b}}$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 13$. **D.** $S = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x + 2y = xy \Leftrightarrow x(y-1) = 2y > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y}{y-1} (x > 0, y > 1)$

Do đó: $P = \sqrt[4]{e^{\frac{\left(\frac{2y}{y-1}\right)^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+\frac{2y}{y-1}}} = e^{\frac{y^2}{(y-1)^2(2y+1)} + \frac{y^2(y-1)}{3y-1}} \geq e^{\frac{8}{5}}$. Đạt tại $x = 4; y = 2$.

Câu 63: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

A. $2\sqrt[3]{4}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt[3]{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x+y) \Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 \sqrt{x+y} \Leftrightarrow xy = \sqrt{x+y}$.

$S = x^2 + y^2 \geq 2xy$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2$.

Vậy ta có $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = \sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = \sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^4 - 2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 (L) \\ x = \sqrt[3]{2} (TM) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{2}$. Vậy $\min_S = 2\sqrt[3]{4}$.

Câu 64: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y) + \log(x-3y) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - |y|$.

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} x + 3y > 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ và $\log(x^2 - 9y^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 10$.

Khi đó $|y| = x - S \Rightarrow x^2 - 9(x-S)^2 = 10 \Leftrightarrow 8x^2 - 18Sx + 9S^2 + 10 = 0$.

Phương trình này phải có nghiệm dương, do đó $\begin{cases} \Delta'_x = 81S^2 - 8\left(9S^2 + 10\right) \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \geq \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 65: Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \dfrac{5}{2}$.

A. Có một nghiệm âm và một nghiệm dương. **B.** Vô nghiệm.
C. Có một nghiệm âm. **D.** Có hai nghiệm dương.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Câu 66: Nghiệm bé nhất của phương trình $\log_2{}^3 x - 2\log^2{}_2 x = \log_2 x - 2$ là:

A. $x = 4$. **B.** $x = \dfrac{1}{4}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $x > 0$

PT $\Leftrightarrow \log_2{}^3 x - 2\log_2{}^2 x = \log_2 x - 2 \Leftrightarrow \log_2{}^3 x - 2\log_2{}^2 x - \log_2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2{}^3 x - \log_2 x - 2\log_2{}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log^2{}_2 x - 1) - 2(\log^2{}_2 x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (\log^2{}_2 x - 1)(\log_2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log^2{}_2 x - 1 = 0 \\ \log_2 x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm nhỏ nhất.

Câu 67: Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình $\dfrac{1}{5 - \log_2 x} + \dfrac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ trở thành phương trình nào?

A. $t^2 - 5t + 6 = 0$. **B.** $t^2 + 5t + 6 = 0$. **C.** $t^2 - 6t + 5 = 0$. **D.** $t^2 + 6t + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \log_2 x$, PT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{5 - t} + \dfrac{2}{1 + t} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1 + t + 2(5 - t)}{(5 - t)(1 + t)} = 1 \Leftrightarrow 1 + t + 2(5 - t) = (5 - t)(1 + t)$

$\Leftrightarrow 11 - t = 5 + 4t - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$.

Câu 68: Nếu đặt $t = \log x$ thì phương trình $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$ trở thành phương trình nào?

A. $9t^2 - 20\sqrt{t} + 1 = 0$. **B.** $3t^2 - 20t + 1 = 0$. **C.** $9t^2 - 10t + 1 = 0$. **D.** $3t^2 - 10t + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

$\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 9\log^2 x - 10\log x + 1 = 0$

Câu 69: Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình $\log_2(4x) - \log_x 2 = 3$ trở thành phương trình nào?

A. $t^2 - t - 1 = 0$. **B.** $4t^2 - 3t - 1 = 0$. **C.** $t + \dfrac{1}{t} = 1$. **D.** $2t - \dfrac{1}{t} = 3$.

Hướng dẫn giải

$$\log_2(4x) - \log_x 2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0$$

Câu 70: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{4+\log_2 x}+\dfrac{2}{2-\log_2 x}=1$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 4 \\ x\neq \dfrac{1}{16} \end{cases}$. Đặt $t=\log_2 x$, điều kiện $\begin{cases} t\neq -4 \\ t\neq 2 \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$\dfrac{1}{4+t}+\dfrac{2}{2-t}=1 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$. Vậy $x_1.x_2=\dfrac{1}{8}$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng chức năng SOLVE trên máy tính bỏ túi tìm được 2 nghiệm là $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{1}{4}$.

Câu 71: Phương trình $\dfrac{1}{4-\ln x}+\dfrac{2}{2+\ln x}=1$ có tích các nghiệm là:

A. e^3. **B.** $\dfrac{1}{e}$. **C.** e. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0, x\neq e^{-2}; x\neq e^4$

$\dfrac{1}{4-\ln x}+\dfrac{2}{2+\ln x}=1 \Leftrightarrow \ln^2 x-3\ln x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x=1 \\ \ln x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=e \\ x=e^2 \end{array}\right.$ Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 72: Phương trình $\log_5^2(2x-1)-8\log_5\sqrt{2x-1}+3=0$ có tập nghiệm là:

A. $\{-1;-3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{3;63\}$. **D.** $\{1;2\}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện : $x>\dfrac{1}{2}$

$\log_5^2(2x-1)-8\log_5\sqrt{2x-1}+3=0 \Leftrightarrow \log_5^2(2x-1)-4\log_5(2x-1)+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5(2x-1)=1 \\ \log_5(2x-1)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=63 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $x=1$ (thuộc B, D) vào vế trái ta được $3=0$ vô lý, vậy loại B, D,

Thay $x=-1$ vào $\log_5(2x-1)$ ta được $\log_5(-3)$ không xác định, nên loại A. Vậy chọn **C.**

Câu 73: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$. Giá trị của biểu thức $P=x_1^2+x_2^2$ bằng bao nhiêu?

A. 20. **B.** 5. **C.** 36. **D.** 25.

Hướng dẫn giải.

Chọn A. Điều kiện $x>0$. Giải phương trình bậc hai với ẩn là $\log_2 x$ ta được:

$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$. Khi đó, $P={x_1}^2+{x_2}^2=2^2+4^2=20$.

Câu 74: Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ là

A. $\dfrac{1}{125}$. **B.** 630. **C.** $\dfrac{7}{25}$. **D.** $\dfrac{630}{625}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\log_x 125 + 1\right)\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_{25}^2 x}{\log_{125} x} + \log_{25}^2 x = 1$.

$\Leftrightarrow \log_5^2 x + 3\log_5 x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = \dfrac{1}{5^4} \end{array}\right.$. Suy ra tích 2 nghiệm: $x_1.x_2 = \dfrac{1}{125}$.

Câu 75: Giả sử phương trình: $\log_5^2 x - 2\log_{25} x^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$. Khi đó giá trị biểu thức $P = 15x_1 + \dfrac{1}{5}x_2$ bằng:

A. $\dfrac{1876}{625}$. **B.** 100. **C.** $\dfrac{28}{25}$. **D.** 28.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện $x > 0$

Pt $\Leftrightarrow \log_5^2 x - 2\log_5 x - 3 - 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = -1 \\ \log_5 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{5} \\ x = 125 \end{array}\right.$

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = \dfrac{1}{5}$ và $x_2 = 125$ suy ra $P = 15x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 = 28$

Câu 76: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)\log_3 x - \sqrt{3} = 0$. Khi đó tích $x_1.x_2$ bằng

A. $3^{\sqrt{3}+1}$. **B.** $3^{-\sqrt{3}}$. **C.** 3. **D.** $3^{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)\log_3 x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)\log_{\frac{1}{3}} x - \sqrt{3} = 0$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x_1x_2\right) = \log_{\frac{1}{3}} x_1 + \log_{\frac{1}{3}} x_2$, suy ra $\log_{\frac{1}{3}} x_1, \log_{\frac{1}{3}} x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^2 + (\sqrt{3}+1)a - \sqrt{3} = 0$.

Nên $\log_{\frac{1}{3}} x_1 + \log_{\frac{1}{3}} x_2 = -\left(\sqrt{3}+1\right)$. Suy ra $\log_{\frac{1}{3}}\left(x_1x_2\right) = \log_{\frac{1}{3}} x_1 + \log_{\frac{1}{3}} x_2 = -\left(\sqrt{3}+1\right)$

$\Rightarrow x_1x_2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\left(\sqrt{3}+1\right)} = 3^{\sqrt{3}+1}$

Câu 77: Phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$ có tổng các nghiệm là:

A. 18. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ \log^2{}_2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Câu 78: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1.x_2$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện: $0 < x \neq 1$

PT $\Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4}\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4\log_x 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(\log_x 2)^2 - 1}{4\log_x 2} = 0 \Leftrightarrow 4(\log_x 2)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\log_x 2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x 2 = \frac{1}{2} \\ \log_x 2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 = x^{\frac{1}{2}} \\ 2 = x^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$. Vậy $x_1.x_2 = 4.\frac{1}{4} = 1$.

[Phương pháp trắc nghiệm] Đáp án B,D có tích âm thì có thể $x_1 < 0$ hoặc $x_2 < 0$ thì không thỏa mãn điều kiện của x nên loại.

Câu 79: Nghiệm lớn nhất của phương trình $-\log^3 x + 2\log^2 x = 2 - \log x$ là :

A. 100. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 1000.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện: $x > 0$

$-\log^3 x + 2\log^2 x = 2 - \log x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = -1 \\ \log x = 2 \\ \log x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{10} \\ x = 100 \\ x = 10 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $-\log^3 X + 2\log^2 X - 2 + \log X$

Nhấn CALC và cho $X = 1000$ (số lớn nhất) ta thấy sai. Vậy loại đáp án **D.**

Nhấn CALC và cho $X = 100$ ta thấy đúng.

Câu 80: Nếu đặt $t = \log_2(5^x - 1)$ thì phương trình $\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = 1$ trở thành phương trình nào?

A. $t^2 + t - 2 = 0$. **B.** $2t^2 = 1$. **C.** $t^2 - t - 2 = 0$. **D.** $t^2 = 1$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

$\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = 1 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1).\left[1 + \log_2(5^x - 1)\right] - 2 = 0$. Vậy chọn **A.**

Câu 81: Biết phương trình $4^{\log_9 x} - 6.2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng :

A. 6642. **B.** $\frac{82}{6561}$. **C.** 20. **D.** 90.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$. Ta có phương trình tương đương $2^{2\log_9 x} - 6.2^{\log_9 x} + 2^3 = 0$. (1)

Đặt $t = 2^{\log_9 x}, t > 0$. $(1) \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2 \Leftrightarrow \log_9 x = 1 \Leftrightarrow x = 9$. Với $t = 4 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2^2 \Leftrightarrow \log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 81$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{9; 81\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 6642$.

Câu 82: Biết phương trình $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{7}{6} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $x_1^3+x_2^3=\frac{2049}{4}$. **B.** $x_1^3+x_2^3=-\frac{2047}{4}$. **C.** $x_1^3+x_2^3=-\frac{2049}{4}$. **D.** $x_1^3+x_2^3=\frac{2047}{4}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ \log_2 x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$.

Đặt $t=\log_2 x$. Phương trình đã cho trở thành $3t^2-7t-6=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\ \log_2 x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^3=9\\ x=2^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{8;\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\}\Rightarrow x_1^3+x_2^3=\frac{2049}{4}$

Câu 83: Nghiệm nguyên của phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$ là:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện: $x\geq 1$

$\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow\log_2 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$

Đặt $t=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ta được $\log_2 6.\log_3 6.t^2-t=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{1}{\log_2 6.\log_3 6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0\\ \log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{1}{\log_2 6.\log_3 6}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1\ (1)\\ \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6 3\ (2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}=1\\ x-\sqrt{x^2-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\in\mathbb{Z}$

$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}=2^{\log_6 3}\\ x-\sqrt{x^2-1}=2^{-\log_6 3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2^{\log_6 3}+2^{-\log_6 3}}{2}\notin\mathbb{Z}$

[Phương pháp trắc nghiệm] Thay $x=1$ vào phương trình ta được $VT=VP$ chọn **A.**

Câu 84: Nghiệm của phương trình $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}$ có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản, tính $a+b$

A. -1. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Ta có:

$4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}\Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x}-6^{\log_2 x}=2.3^{2+2\log_2 x}\Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x}-6^{\log_2 x}=19.9^{\log_2 x}$ (1)

Chia 2 vế cho $4^{\log_2 x}$.

$(1) \Leftrightarrow 18.\left(\frac{9}{4}\right)^{\log_2 x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}-4=0$. Đặt

$t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}>0.\ PT \Rightarrow 18t^2+t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{4}{9} \\ t=-\frac{1}{2}\ (l) \end{array}\right.$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}=\left(\frac{4}{9}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \log_2 x=-2 \Leftrightarrow x=2^{-2}=\frac{1}{4}$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Câu 85: Phương trình $9x^{\log_9 x}=x^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $x>0; x\neq 1$

$9x^{\log_9 x}=x^2 \Leftrightarrow \log_9\left(9x^{\log_9 x}\right)=\log_9\left(x^2\right) \Leftrightarrow 1+\log_9^2 x-2\log_9 x=0 \Leftrightarrow \log_9 x=1 \Leftrightarrow x=9$

VẬN DỤNG

Câu 86: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2{}^2 x+2\log_2 x-m=0$ có nghiệm $x>2$.

A. $m<-1$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $m<3$. **D.** $m>3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_2{}^2 x+2\log_2 x-m=0$ (1).

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình (1) trở thành: $t^2+2t-m=0 \Leftrightarrow t^2+2t=m$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm $x>2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t>1$

$\left(do\ \ t=\log_2 x>\log_2 2=1\right)$.

Xét hàm số $y=t^2+2t \Rightarrow y'=2t+2,\ y'=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại).

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
y'		$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ Bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm $t>1 \Leftrightarrow m>3$.

Câu 87: Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2^2 x-(m-1)\log_2 x+4-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;4]$ là

A. $3<m\leq 4$. **B.** $3\leq m\leq \frac{10}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}<m\leq 4$. **D.** $3<m\leq \frac{10}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t=\log_2 x$. Vì $x\in[1;4]$ nên $t\in[0;2]$.

Phương trình trở thành $t^2-(m-1)t+4-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+4}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-3	0		1		2	$+\infty$
$f'(t)$				$-$	0	$+$		
$f(t)$			4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;4]$ thì $3<m\le\dfrac{10}{3}$.

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-\log_3 x^2+2-m=0$ có nghiệm $x\in[1;9]$.

A. $0\le m\le 1$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $m\le 1$. **D.** $m\ge 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt: $t=\log_3 x$. Vì $x\in[1;9]$ nên $t\in[0;2]$

$pt \Leftrightarrow t^2-2t+2-m=0 \Leftrightarrow t^2-2t+2=m$

Đặt $h(t)=t^2-2t+2$ với $t\in[0;2]$

$h'(t)=2t-2$, $h'(t)=0\Leftrightarrow t=1$

$h(1)=1$, $h(0)=h(2)=2$ $\Rightarrow \max\limits_{[0,2]} h(t)=2$, $\min\limits_{[0,2]} h(t)=1$ Pt có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le 2$.

Câu 89: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.

A. $3\le m\le 6$.. **B.** $6\le m\le 9$.. **C.** $2\le m\le 6$.. **D.** $2\le m\le 3$..

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện $x>0$

$\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m \Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x+3=m$

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình trở thành $t^2-2t+3=m$ (1)

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in[1;8] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $x\in[0;3]$.

Đặt $g(t)=t^2-2t+3$, $g'(t)=2t-2$. $g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1$. BBT

x	0		1		3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Từ BBT ta suy ra để phương trình đã có nghiệm $x \in [1;8]$ thì $2 \le m \le 6$.

Câu 90: Định m để phương trình: $\log^2{}_2 x + \log_2 x + 3 + m = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$:

A. $m \le \frac{1}{4}$ **B.** $m \le \frac{-1}{2}$ **C.** $0 \le m \le \frac{1}{4}$ **D.** $m \le \frac{-1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Với $x \in (0;1)$ hàm số đã cho luôn xác định.

Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in (0;1)$ thì $t \in (-\infty;0)$

Phương trình ban đầu trở thành: $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad (*)$

Để phương trình đề cho có nghiệm thì (*) có nghiệm

Ngiệm của (*) là giao điểm của đường thẳng: $y = m$ và $f(t) = -t^2 - t$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$ (Bạn nào không nhớ có thể xem lại chương I)

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
f'(t)		+	0	-	0
f(t)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Để phương trình có nghiệm dựa vào bảng biến thiên $m \le \frac{1}{4}$

Câu 91: Với giá trị nào của m thì: $\log^2{}_3 x + \sqrt{\log^2{}_3 x + 1} = 3m$ có nghiệm trên $[1;3]$.

A. $m \in (1+\sqrt{2};1)$ **B.** $m \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right]$ **C.** $m \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$ **D.** $m \in \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};1\right]$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t = \sqrt{\log^2{}_3 x + 1} \Rightarrow \log^2{}_3 x = t^2 - 1$, với $x \in [1;3]$ thì $t \in [1;\sqrt{2}]$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t = 3m + 1 \Rightarrow 3m = t^2 + t - 1\ f(t)$, $f(t)$ luôn đồng biến $[1;\sqrt{2}]$ $\Rightarrow f(1) \le f(t) \le f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \le 3m \le 1 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{2}}{3} \le m \le \frac{1}{3}$

Câu 92: Định điều kiện cho tham số m để: $\log_x m + \log_{mx} m + \log_{m^2x} m = 0$ có nghiệm.

A. $m > 0$ **B.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \ne 1 \end{cases}$ **C.** $m \ne 1$ **D.** $m > 1$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_x m + \log_{mx} m + \log_{m^2x} m = 0$. Điều kiện $\begin{cases} x, m > 0 \\ mx, m^2x \ne 1 \end{cases}$

+) Khi $m = 1$ phương trình luôn đúng.

+) Khi $0 < m \ne 1$. Đặt $t = \log_m x$, do điều kiện ban đầu $\Rightarrow \begin{cases} t \ne -1 \\ t \ne -2 \end{cases}$

$$\log_x m + \log_{mx} m + \log_{m^2x} m = 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_m x} + \frac{1}{\log_m mx} + \frac{1}{\log_m m^2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_m x} + \frac{1}{\log_m x + 1} + \frac{1}{\log_m x + 2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Hợp 2 trường hợp lại ta được $m>0$ thì phương trình có nghiệm

Câu 93: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=27$?

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\log_3 x$. Khi đó phương trình có dạng: $t^2-(m+2)t+3m-1=0$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta=(m+2)^2-4(3m-1)=m^2-8m+8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<4-2\sqrt{2}\\m>4+2\sqrt{2}\end{array}\right.\quad(*)$$

Với điều kiện $(*)$ ta có: $t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3(x_1.x_2)=\log_3 27=3$.

Theo Vi-ét ta có: $t_1+t_2=m+2\Rightarrow m+2=3\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 94: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x+2\log_3 x+m-1=0$ có nghiệm ?

A. $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m>2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $x>0$ PT có nghiệm khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1-(m-1)\ge 0\Leftrightarrow 2-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 2$.

Câu 95: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_4^2 x+3\log_4 x+2m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. $m<\frac{13}{8}$. **B.** $m>\frac{13}{8}$. **C.** $m\le\frac{13}{8}$. **D.** $0<m<\frac{13}{8}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow 13-8m>0\Leftrightarrow m<\frac{13}{8}$

Câu 96: Giả sử m là số thực sao cho phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=9$. Khi đó m thỏa mãn tính chất nào sau đây?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(-1;1)$. **C.** $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-2=0\,(*)$

Đặt $\log_3 x=t\Rightarrow(*)\Rightarrow t^2-(m+2)t+3m-2=0\ (1)$

Vì $(*)$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=9\Rightarrow(1)$ có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $3^{t_1}.3^{t_2}=9\Leftrightarrow t_1+t_2=2$. Theo vi-ét ta có $t_1+t_2=m+2\Rightarrow m=0\in(-1;1)$.

Câu 97: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn B. ĐK: $x\ne 0;\ x\ne\sqrt{2}$. Đặt $t=x^2-\sqrt{2}x\Rightarrow x^2-\sqrt{2}x+2=t+2$

$\Rightarrow\log_3|t|=\log_5(t+2)$. Đặt $\log_3|t|=\log_5(t+2)=u$

$$\begin{cases}\log_3|t|=u\\\log_5(t+2)=u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|t|=3^u\\t+2=5^u\end{cases}\Rightarrow\left|5^u-2\right|=3^u$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5^u-2=3^u\\5^u-2=-3^u\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5^u+3^u=2\\3^u+2=5^u\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}5^u+3^u=2 & (1)\\\left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u=1 & (2)\end{array}\right..$$

Xét $(1): 5^u + 3^u = 2$

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Xét $(2): \left(\dfrac{3}{5}\right)^u + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^u = 1$

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

Câu 98: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 27$.

A. $m > 4 + 2\sqrt{2}$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = \dfrac{28}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$, (1) Điều kiện: $x > 0$ Đặt $t = \log_3 x$

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$, (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 27$ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $3^{t_1}.3^{t_2} = 27$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 3^{t_1}.3^{t_2} = 27 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0 \\ t_1 + t_2 = \log_3 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 - 2\sqrt{2}; m \geq 4 + 2\sqrt{2} \\ m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$ Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

Câu 99: Phương trình $\log_2 x.\log_4 x.\log_6 x = \log_2 x.\log_4 x + \log_4 x.\log_6 x + \log_2 x.\log_6 x$ có tổng các nghiệm là

A. 1. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 49.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Sử dụng máy tính để kiểm tra nghiệm. Ta nhận được kết quả là $\{1; 48\}$.

Cách 2: Đặt $\log_2 x = t \Leftrightarrow x = 2^t$. Ta có

$$pt \Leftrightarrow t.\log_4 2^t.\log_6 2^t = t.\log_4 2^t + \log_4 2^t.\log_6 2^t + t.\log_6 2^t$$

$$\Leftrightarrow t^2\left(t.\log_4 2.\log_6 2 - \log_4 2 - \log_4 2.\log_6 2 - \log_6 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{\log_4 2 + \log_4 2.\log_6 2 + \log_6 2}{\log_4 2.\log_6 2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2^{\frac{\log_4 2 + \log_4 2.\log_6 2 + \log_6 2}{\log_4 2.\log_6 2}} = 48 \end{array}\right..$$

Câu 100: Giá trị nào của m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1, 3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $1 \leq m \leq 16$. **B.** $4 \leq m \leq 8$. **C.** $0 \leq m \leq 2$. **D.** $3 \leq m \leq 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}\left(\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 1\right)$

Đặt $t = \log_3^2 x,\ 0 \leq t \leq 3$. Ta có $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \sqrt{t+1} - 1\right)$

$f'(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right)$; $f'(t)=0$ vô nghiệm. $f(0)=0$; $f(3)=2$. Vậy $0\le m\le 2$.

Câu 101: Phương trình $\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)=6$ có:

A. 2 nghiệm dương. **B.** 1 nghiệm dương.
C. Phương trình vô nghiệm **D.** 1 nghiệm kép.

Hướng dẫn giải

* Cách 1: Biến đổi. Điều kiện: $3^x-1>0\Rightarrow x>0$

$\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)=6\Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\log_3[3(3^x-1)]=6$

$\Leftrightarrow \log_3(3^x-1).[1+\log_3(3^x-1)]=6\Leftrightarrow \log_3(3^x-1)^2+\log_3(3^x-1)-6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(3^x-1)=2\\ \log_3(3^x-1)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=10\\ 3^x=\frac{28}{27}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 10\\ x=\log_3\frac{28}{27}\end{array}\right.$

* Cách 1: Dùng Casio:

Nhập vào máy tính biểu thức: $\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)-6$

Vì điều kiện của chúng ta là $x>0$ nên tuyệt đối không $\boxed{\text{SOLVE}}$ với số âm vì sẽ làm đứng máy rất mất thời gian.

Bây giờ tôi sẽ nói lên hạn chế của máy tính: Với điều kiện $x>0$ các bạn $\boxed{\text{SOLVE}}$ với 1 số chẳng hạn $x=1$ sẽ ra được $\boxed{2.0959}$ sau đó các bạn tiếp tục với các số lớn hơn vẫn ra $\boxed{2.0959}$ tiếp tục với các số nhỏ hơn 1 ví dụ $x=0.5$ (an tâm vì số này đã sát giới hạn 0) vẫn ra $\boxed{2.0959.}$ Từ đó dẫn tới kết luận phương trình trên chỉ có 1 nghiệm là hoàn toàn **sai**. Các bạn thử $\boxed{\text{SOLVE}}$ với giá trị $x=0.4$ máy sẽ cho ra $\boxed{0.033103.}$ Vậy phương trình của chúng ta có 2 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

Câu 102: Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2).\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2=27$.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{4}{3}$. **C.** $m=25$. **D.** $m=\frac{28}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_3^2 x-(m+2).\log_3 x+3m-1=0$ (1). Điều kiện xác định: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$. Ta có phương trình: $t^2-(m+2)t+3m-1=0$ (2).

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1.x_2=27$.

Thì phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1+t_2=3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ m+2=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-8m+8>0\\ m=1\end{cases}\Rightarrow m=1$.

Câu 103: Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]}=4.(x-2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Tính $2x_1-x_2$.

A. 1. **B.** 3. **C.** -5. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện $x>2$.

Phương trình thành $(x-2)^{\log_2 4+\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$

$\Leftrightarrow (x-2)^2.(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$ hay $(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)$.

Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2(x-2).\log_2(x-2)=\log_2[4(x-2)]$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(x-2) = 2 + \log_2(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-2) = -1 \\ \log_2(x-2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x = 6 \end{array}\right..$$

Suy ra $x_1 = \dfrac{5}{2}$ và $x_2 = 6$. Vậy $2x_1 - x_2 = 2.\dfrac{5}{2} - 6 = -1$.

Câu 104: Tìm số nghiệm của phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4 \quad (1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

ĐK: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$. Phương trình:

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x^2 + x + 1)}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4 \Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x-1) + \log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4 \quad (3)$$

Đặt $t = \log_{x+1}(2x-1)$, khi đó (3) viết thành: $2t + \dfrac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x+1}(2x-1) = 1 \\ \log_{x+1}(2x-1) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 = 2x - 1 \\ \sqrt{x+1} = 2x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right..$$ **Chọn C.**

VẬN DỤNG CAO

Câu 105: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m

A. $1 < a_0 < 2$. **B.** $e < a_0 < e^2$. **C.** $2 < a_0 < 3$. **D.** $e^2 < a_0 < e^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có phương trình tương đương với:

$$(1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018 \Leftrightarrow \log_a x \log_b x + \log_a x + \log_b x + 1 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_b(\log_a x)^2 + (1 + \log_b a)\log_a x - 2017 = 0.$$

Khi đó theo Viet ta có: $\log_a m + \log_a n = -\dfrac{1 + \log_b a}{\log_b a} = -\log_a b - 1 = \log_a \dfrac{1}{ab} \Leftrightarrow mn = \dfrac{1}{ab}$

Vì áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P = (4a^2 + 9b^2)\left(\frac{36}{a^2b^2} + 1\right) \geq 2\sqrt{4a^2.9b^2}.2\sqrt{\frac{36}{a^2b^2}.1} = 144$$

Dấu bằng đạt tại $4a^2 = 9b^2, \dfrac{36}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2$.

Câu 106: Biết rằng khi m, n là các số dương khác 1, thay đổi thỏa mãn $m + n = 2017$ thì phương trình $8\log_m x.\log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt a, b. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(ab)$ là $\dfrac{3}{4}\ln\left(\dfrac{c}{13}\right) + \dfrac{7}{8}\ln\left(\dfrac{d}{13}\right)$ với c, d là các số nguyên dương. Tính $S = 2c + 3d$.

A. $S=2017$ **B.** $S=66561$ **C.** $S=64544$ **D.** $S=26221$

Hướng dẫn giải

Ta có: $8\log_m x.\log_n m.\log_m x-7\log_m x-6\log_n m.\log_m x-2017=0$

$\Leftrightarrow 8\log_n m\left(\log_m x\right)^2-\left(6\log_n m+7\right)\log_m x-2017=0$

Theo vi – ét ta có $\log_m a+\log_m b=\dfrac{6\log_n m+7}{8\log_n m}=\dfrac{6}{8}+\dfrac{7}{8}\log_m n\Leftrightarrow \log_m\left(ab\right)=\log_m\left(m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}\right)$

Vì vậy $ab=m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}=m^{\frac{3}{4}}\left(2017-m\right)^{\frac{7}{8}}\Rightarrow \ln\left(ab\right)=f\left(m\right)=\dfrac{3}{4}\ln m+\dfrac{7}{8}\ln\left(2017-m\right)$

Mà

$f'\left(m\right)=\dfrac{3}{4m}-\dfrac{7}{8\left(2017-m\right)}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{12102}{13}\Rightarrow \ln\left(ab\right)=f\left(\dfrac{12102}{13}\right)=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{12102}{13}+\dfrac{7}{8}\ln\dfrac{14119}{13}$

Do đó $c=12102,d=14119\Rightarrow S=66561$. **Chọn B.**

Câu 107: Cho các số thực $a,b>1$ và phương trình $\log_a\left(ax\right)\log_b\left(bx\right)=2018$ có hai nghiệm phân biệt m và n. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(36m^2n^2+1\right)$.

A. 144 **B.** 72 **C.** 36 **D.** 288

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với:

$\left(1+\log_a x\right)\left(1+\log_b x\right)=2018\Leftrightarrow \log_a x\log_b x+\log_a x+\log_b x+1=2018$

$\Leftrightarrow \log_b a\left(\log_a x\right)^2+(1+\log_b a)\log_a x-2017=0$

Khi đó theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=-\dfrac{1+\log_b a}{\log_b a}=-\log_a b-1=\log_a\dfrac{1}{ab}\Leftrightarrow mn=\dfrac{1}{ab}$

Vì vậy áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(\dfrac{36}{a^2b^2}+1\right)\ge 2\sqrt{4a^2.9b^2}.2\sqrt{\dfrac{36}{a^2b^2}.1}=144$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}4a^2=9b^2\\ \dfrac{36}{a^2b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=3,b=2$.

Chọn A.

Câu 108: Biết rằng khi m,n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình $8\log_m x.\log_n x-7\log_m x-6\log_n x-2017=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt a,b. Tính $S=m+n$ để ab là một số nguyên dương nhỏ nhất.

A. $S=\dfrac{500}{3}$. **B.** $S=\dfrac{700}{3}$. **C.** $S=\dfrac{650}{3}$. **D.** $S=200$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có phương trình tương đương với:

$8\log_m x.\log_n m.\log_m x-7\log_m x-6\log_n m.\log_m x-2017=0$

$\Leftrightarrow 8\log_n m\left(\log_m x\right)^2-\left(7+6\log_n m\right).\log_m x-2017=0$

$\Rightarrow \log_m a+\log_m b=\dfrac{7+6\log_n m}{8\log_n m}=\dfrac{6}{8}+\dfrac{7}{8}\log_m n\Leftrightarrow \log_m\left(ab\right)=\log_m\left(m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}\right)$

$\Leftrightarrow ab=m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=8;n=4;ab=16\Rightarrow S=8+4=12$

Mẹo: Bước cuối thay $n=S-m$ với S ở mỗi đáp án; nhập hàm $F\left(X\right)=X^{\frac{6}{8}}\left(S-X\right)^{\frac{7}{8}}$ Start?2 End? $S-2$ và Step? 1.

Nên thử với S nhỏ trước. Chọn đáp án cho kết quả $F\left(X\right)$ nguyên dương nhỏ nhất.

Câu 109: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $\left(\log_a x\right)\left(\log_b x\right)-2\log_a x-3\log_b x-1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=mn$

A. $\frac{16875}{16}$ **B.** $\frac{4000}{27}$ **C.** 15625 **D.** 3456

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình tương đương với

$\left(\log_a x\right)\left(\log_b a.\log_a x\right)-\left(2+3\log_b a\right)\log_a x-1=0$.

Theo Vi-ét ta có: $\log_a m+\log_a n=\dfrac{\left(2+\log_b a\right)}{\log_b a}=2\log_a b+2=\log_a\left(a^3b^2\right)\Leftrightarrow mn=a^3b^2$.

Khi đó ta có $S=f\left(a\right)=a^3\left(10-a\right)^2\le\max\limits_{(1;9)}f\left(a\right)=f\left(6\right)=3456$.

Câu 110: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $\left(\log_a x\right)\left(\log_b x\right)-2\log_a x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=mn$.

A. $\frac{279}{4}$ **B.** 90 **C.** $\frac{81}{4}$ **D.** $\frac{45}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Phương trình tương đương với

$\left(\log_a x\right)\left(\log_b a.\log_a x\right)-2\log_a x-3\log_b x-1=0\Leftrightarrow\log_b a\left(\log_a x\right)^2-2\log_a x-3=0$.

Theo Vi-ét ta có

$\log_a m+\log_a n=\dfrac{2}{\log_b a}=2\log_a b=\log_a b^2\Leftrightarrow\log_a\left(mn\right)=\log_a b^2\Leftrightarrow mn=b^2$.

Vậy $P=b^2-9a=b^2+9\left(10-b\right)=\left(b-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{279}{4}\ge\dfrac{279}{4}$. Dấu bằng khi $b=\dfrac{9}{2},a=\dfrac{11}{2}$.

Câu 111: Cho ba số thực a,b,c thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b+c=100$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $\left(\log_a x\right)^2-\left(1+2\log_a b+3\log_a c\right)\log_a x-1=0$. Tính $S=a+2b+3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{500}{3}$ **B.** $S=\frac{700}{3}$ **C.** $S=\frac{650}{3}$ **D.** $S=200$

Hướng dẫn giải

Theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=1+2\log_a b+3\log_a c=\log_a\left(ab^2c^3\right)\Leftrightarrow mn=ab^2c^3$

Theo $AM-GM$ ta có:

$$mn=ab^2\left(100-a-b\right)^3=\frac{4}{27}\left(3a.\frac{3b}{2}.\frac{3b}{2}\left(100-a-b\right)\left(100-a-b\right)\left(100-a-b\right)\right)$$

$$\le\frac{4}{27}\left(\frac{3a+2\left(\frac{3b}{2}\right)+3\left(100-a-b\right)}{6}\right)^6=\frac{625.10^8}{27}.$$

Dấu bằng đặt tại $3a=\dfrac{3b}{2}=100-a-b\Leftrightarrow a=\dfrac{50}{3},b=\dfrac{100}{3},c=\dfrac{150}{3}\Rightarrow S=\dfrac{700}{3}$. **Chọn B.**

Câu 112: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2^2 a-2\log_2 a+2+2(\log_2 a-1)\sin(\log_2 a+b)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. $\frac{3\pi}{2}-1$ **B.** $\frac{3\pi}{2}-2$ **C.** $\pi-1$ **D.** $\frac{9\pi}{2}+2$

Hướng dẫn giải

Theo điều kiện bài toán ta có: $(\log_2 a-1+\sin(\log_2 a+b))^2+\cos^2(\log_2 a+b)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\log_2 a+b)=0\\ \log_2 a-1+\sin(\log_2 a+b)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \log_2 a-1\pm1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=\frac{\pi}{2}-1+k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}a=4\\ b=\frac{\pi}{2}-2+k\pi\end{cases}\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $a=1\Rightarrow b\ge\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow S\ge\frac{3\pi}{2}-1$

Trường hợp 2: Nếu $a=4\Rightarrow b\ge\frac{3\pi}{2}-2\Rightarrow S\ge\frac{9\pi}{2}+2$. **Chọn A.**

Câu 113: Cho a,b nguyên dương lớn hơn 1. Biết $11\log_a x\log_b x-8\log_a x-20\log_b x-11=0$ có tích hai nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=28$ **B.** $S=10$ **C.** $S=22$ **D.** $S=15$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với: $11\log_b a(\log_a x)^2-4(2+5\log_b a)\log_a x-11=0$

Phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt vì $P=-\frac{1}{\log_b a}<0;\forall a,b>1$

Gọi hai nghiệm là x_1,x_2. Theo vi – ét ta có

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\frac{4(2+5\log_b a)}{11\log_b a}=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x_1x_2=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}\Leftrightarrow x_1x_2=a^{\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}}=b^{\frac{8}{11}}a^{\frac{20}{11}}$$

Ta có đánh giá sau $x_1x_2=(a^{20}b^8)^{\frac{1}{11}}\ge(2^{20}b^8)^{\frac{1}{11}}=2(2^9.b^8)^{\frac{1}{11}}$

Và

$$2^9.b^8=k^{11}\ge2^9.2^8=2^{17}\Rightarrow k\ge3,k\,\vdots\,2\Rightarrow k=4\Rightarrow b^8=\frac{4^{11}}{2^9}\notin\mathbb{Z};k=8\Rightarrow b^8=\frac{8^{11}}{2^9}=2^{24}\Leftrightarrow b=8,a=2$$

Do đó $x_1x_2\ge16$ và $S=2.2+3.8=28$. **Chọn A.**

Câu 114: Cho m và n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $8(\log_m x)(\log_n x)-7\log_m x-6\log_n x-2017=0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất?

A. $m+n=20$. **B.** $m+n=48$. **C.** $m+n=12$. **D.** $m+n=24$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Đặt $t=\log_m x$, lúc đó $x=m^t$

Phương trình trở thành

$$8t(\log_n m^t)-7t-6\log_n m^t-2017=0\Leftrightarrow 8t^2\log_n m-7t-6t\log_n m-2017=0$$

$\Leftrightarrow 8(\log_n m)t^2-(7+6\log_n m)t-2017=0$ Ta có $\Delta=(7+6\log_n m)^2+4.2017.8\log_n m$

Lúc đó $x_1 = m^{t_1}; x_2 = m^{t_2}$ $\quad x_1.x_2 = m^{t_1+t_2} = m^{\frac{7+6\log_n m}{8\log_n m}} = P$ nguyên

Câu 115: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 30$. **B.** $S_{\min} = 25$. **C.** $S_{\min} = 33$. **D.** $S_{\min} = 17$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.

Đặt $t = \ln x$, $u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0(1)$, $5u^2 + bu + a = 0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x, một u thì có một x.

Ta có $x_1.x_2 = e^{t_1}.e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1x_2 > x_3x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5}\ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3$ (do a, b nguyên dương), suy ra $b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8$.

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2.3 + 3.8 = 30$, suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được $a = 3, b = 8$.

Câu 116: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4};4\right]$:

A. $m < -3$. **B.** $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$. **C.** $m > \frac{7}{3}$. **D.** $-3 < m < \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B. Điều kiện: $x > 2$. $\quad (m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0(*)$

Đặt $\log_2(x-2) = t$, $x \in \left[\frac{5}{4};4\right] \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 2$ (Kết hợp với điều kiện). Vậy $t \leq 1$.

Phương trình (*) có dạng: $\Leftrightarrow 4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 = 0(**)$

Ta cần tìm m sao cho PT (**) có nghiệm thỏa mãn $t \leq 1$.

$\Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$; $f'(t) = \frac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}$. Lập bảng biến thiên ta có

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{7}{3}$		

Vậy $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 117: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$\log_2(5^x-1).\log_4(2.5^x-2)=m$ có nghiệm $x\ge 1$.

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\log_2(5^x-1).\log_4(2.5^x-2)=m \quad (1)$

$\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\frac{1}{2}\log_2\left[(5^x-1)2\right]=m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(5^x-1)\left[\log_2(5^x-1)+1\right]=m$

Đặt $t=\log_2(5^x-1)$, PTTT: $\frac{1}{2}t(t+1)=m \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t=m \quad (2)$

PT (1)có nghiệm $x\ge 1$ khi và chỉ khi PT(2) có nghiệm $t\ge 2$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t \quad f'(t)=t+\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		-	0	+			
y		↘	$-\frac{1}{8}$	↗	3	↗	

Dựa vào BBT, PT(2) có nghiệm $t\ge 2$ khi và chỉ khi $m\ge 3$.

Câu 118: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}-2m-5=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $m\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$ **B.** $[-2;+\infty)$ **C.** $m\in(-\infty;0)$ **D.** $m\in[-2;0]$

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}-2m-5=0 \Leftrightarrow \log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}=2m+5$.

Xét $f(x)=\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}$ $,x\in\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$.

$$f'(x)=\frac{2\log_2 x}{x.\ln 2}+\frac{\frac{2\log_2 x}{x.\ln 2}}{2\sqrt{\log_2^2 x+1}}=\frac{2\log_2 x}{x.\ln 2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\log_2^2 x+1}}\right).\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\,(\text{Tm}).$$

$f'(x)$ không xác định tại $x=0$ (loại).

BBT

x	1		$2^{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	1	↗	5

Vậy phương trình có nghiệm khi: $1\le 2m+5\le 5 \Leftrightarrow -2\le m\le 0$.

Câu 119: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$.

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\ge 32\Rightarrow \log_2 x\ge \log_2 32=5$ hay $t\ge 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m(t-3)$ $(*)$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t\ge 5$"

Với $t\ge 5$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)}=m(t-3)\Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0\Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\ge 5\Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\le 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay

$1<\dfrac{t+1}{t-3}\le 3\Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\le\sqrt{3}$

suy ra $1<m\le\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1<m\le\sqrt{3}$.

BÌNH LUẬN: Chúng ta có thể dùng hàm số để tìm max, min của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}, t\ge 5$

Câu 120: Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$

A. $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $-3<m\le\dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

$4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0\Leftrightarrow (m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)=t^2+5t+1\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}\Leftrightarrow g(m)=f(t)$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in[-1;1]$

$f'(t)=\dfrac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\ge 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g(m);f(t)$ cắt nhau

$\forall t\in[-1;1]\Rightarrow f(-1)\le g(m)\le f(1)\Leftrightarrow -3\le m\le\dfrac{7}{3}$

BÌNH LUẬN:

Đây là dạng toán ứng dụng hàm số để giải bài toán chứa tham số. Đối với bài toán biện luận nghiệm mà chứa tham số thì phải tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ sau đó cô lập m rồi tìm max, min hàm số.

Câu 121: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $\left[32;+\infty\right)$?

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$.

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\geq 32\Rightarrow \log_2 x\geq \log_2 32=5$ hay $t\geq 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m\left(t-3\right)$ $(*)$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t\geq 5$"

Với $t\geq 5$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{\left(t-3\right).\left(t+1\right)}=m\left(t-3\right)\Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0\Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\geq 5\Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\leq 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay

$1<\dfrac{t+1}{t-3}\leq 3\Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\leq\sqrt{3}$ suy ra $1<m\leq\sqrt{3}$. Phương trình có nghiệm khi $1<m\leq\sqrt{3}$.

Câu 122: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=m$ có nghiệm $x\geq 1$.?

A. $m\in\left[2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[3;+\infty\right)$. **C.** $m\in(-\infty;2]$. **D.** $m\in\left(-\infty;3\right]$.

Hướng dẫn giải

Với $x\geq 1\Rightarrow 5^x\geq 5\Rightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\geq \log_2\left(5-1\right)=2$ hay $t\geq 2$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình có nghiệm $t\geq 2$".

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ \forall t\geq 2,\ f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\geq 2$

t	2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến với $t\geq 2$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $2m\geq 6\Leftrightarrow m\geq 3$. Vậy $m\geq 3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 123: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $m\in[0;2]$. **B.** $m\in(0;2)$. **C.** $m\in(0;2]$. **D.** $m\in[0;2)$.

Hướng dẫn giải

Với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ hay $1\leq x\leq 3^{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt{\log_3^2 1+1}\leq\sqrt{\log_3^2 x+1}\leq\sqrt{\log_3^2 3^{\sqrt{3}}+1}$ hay $1\leq t\leq 2$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$". Ta có $PT\Leftrightarrow 2m=t^2+t+2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t-2,\ \forall t\in\left[1;2\right],\ f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in\left[1;2\right]$

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	4

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.
Vậy $0 \le m \le 2$ là các giá trị cần tìm.

Câu 124: Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m < 2$. **B.** $3 < m < 4$. **C.** $0 < m < \frac{3}{2}$. **D.** $2 < m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ Đk: $x > 0$

$\Leftrightarrow 4\left(\log_{3^2} x\right)^2 + m\log_{3^{-1}} x + \frac{1}{6}\log_{3^{\frac{-1}{2}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - m\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - \left(m + \frac{1}{3}\right)\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow t^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right)t + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3\left(x_1.x_2\right) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 1$ (Với $t_1 = \log_3 x_1$ và $t_2 = \log_3 x_2$)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (2)

Ta có $t_1 + t_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$. Vậy $0 < m < \frac{3}{2}$ là mệnh đề đúng.

PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 125: Phương trình $\log_2(4 - 2^x) = 2 - x$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $4 - 2^x = 2 - x$ **B.** $4 - 2^x = 2^{2-x}$ **C.** $(2^x)^2 - 4.2^x + 4 = 0$ **D.** Cả 3 đáp án trên đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D. *Nhắc lại:* 2 phương trình tương đương thì từ 1 phương trình này ta có thể biến đổi thành phương trình kia và ngược lại. 2 phương trình tương đương có cùng tập nghiệm.

$DK: 4 - 2^x > 0 \Rightarrow 2^x < 2^2 \Rightarrow x < 2$

$\log_2(4 - 2^x) = 2 - x \Rightarrow 4 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 4 - 2^x = \frac{2^2}{2^x} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 4.2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

So với điều kiện phương trình vô nghiệm. $\log_2(4 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x\right)2 - 4.2^x + 4 = 0 \\ x < 2 \end{cases}$

Câu 126: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. **B.** $m = 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right.$. **D.** $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C. PT $\Leftrightarrow 25^x - \log_5 m = 5^x \xrightarrow{t = 5^x > 0} t^2 - t = \log_5 m$

Xét $g(t) = t^2 - t$ trên $(0;+\infty)$ ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$	||	$-$	0	$+$	
$g(t)$	|| 0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 m = -\dfrac{1}{4}\\ \log_5 m \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\\ m \geq 1\end{array}\right.$.

Câu 127: Cho x thỏa mãn phương trình $\log_2\left(\dfrac{5.2^x - 8}{2^x + 2}\right) = 3 - x$. Giá trị của biểu thức $P = x^{\log_2 4x}$ là

A. $P = 4$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = 8$ **D.** $P = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có

$$\log_2\left(\frac{5.2^x - 8}{2^x + 2}\right) = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5.2^x - 8}{2^x + 2} > 0\\ \dfrac{5.2^x - 8}{2^x + 2} = \dfrac{8}{2^x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5.2^x - 8}{2^x + 2} > 0\\ \left[\begin{array}{l}2^x = -\dfrac{4}{5}\\ 2^x = 4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $P = 2^{\log_2(4.2)} = 8$.

Câu 128: Phương trình $\log_2\left(3.2^x - 1\right) = 2x + 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\log_2\left(3.2^x - 1\right) = 2x + 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 2.4^x - 3.2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x = 1\\ 2^x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = -1\end{array}\right.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\log_2\left(3x2^X - 1\right) - 2X - 1 = 0$

Ấn SHIFT CALC nhập X=5, ấn =. Máy hiện X=0.

Ấn Alpha X Shift STO A

Ấn AC. Viết lại phương trình: $\dfrac{\log_2\left(3x2^X - 1\right) - 2X - 1}{X - A} = 0$

Ấn SHIFT CALC. Máy hỏi A? ẤN = Máy hỏi X? Ấn 5 =. Máy hiện X=-1.

Ấn Alpha X Shift STO B.

Ấn AC. Viết lại phương trình: $\dfrac{\log_2\left(3x2^X - 1\right) - 2X - 1}{(X - A)(X - B)} = 0$

Ấn SHIFT CALC. Máy hỏi A? ẤN = Máy hỏi B? Ấn =. Máy hỏi X? Ấn 1=

Máy không giải ra nghiệm. Vậy đã hết nghiệm.

Câu 129: Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\log_2\left(4^x + 4\right) = x - \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1} - 3\right)$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $2^{x+1}-3>0 \Leftrightarrow x>\log_2 3-1$.

Ta có: $\log_2\left(4^x+4\right)=x-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-3\right) \Leftrightarrow \log_2\dfrac{4^x+4}{2^{x+1}-3}=x \Leftrightarrow \dfrac{4^x+4}{2^{x+1}-3}=2^x \quad (1)$

Đặt $t=2^x, t>0$. Ta có $(1) \Rightarrow t^2+4=2t^2-3t \Leftrightarrow t^2-3t-4=0 \Rightarrow t=4$.

$\Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

VẬN DỤNG

Câu 130: Cho phương trình $4.5^{\log(100x^2)}+25.4^{\log(10x)}=29.10^{1+\log x}$. Gọi a và b lần lượt là 2 nghiệm của phương trình. Khi đó tích ab bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{100}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x>0$. Ta có

$4.5^{\log(100x^2)}+25.4^{\log(10x)}=29.10^{1+\log x} \Leftrightarrow 4.25^{\log 10x}-29.10^{\log 10x}+25.4^{\log 10x}=0$

$$\Leftrightarrow 4.(\frac{5}{2})^{2\log 10x}-29.(\frac{5}{2})^{\log 10x}+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\frac{5}{2})^{\log 10x}=1\\(\frac{5}{2})^{\log 10x}=\frac{25}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{10}\\x=10\end{array}\right. \Rightarrow ab=1$$

Câu 131: Với giá trị nào của m thì phương trình $\log_2(4^x+2m^3)=x$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. $m<\dfrac{1}{2}$ **B.** $m>-\sqrt[3]{\dfrac{4^x}{2}}$ **C.** $0<m<\dfrac{1}{2}$ **D.** $m>0$

Hướng dẫn giải

* Cách 1: Dùng công thức biến đổi Điều kiện $4^x+2m^3>0$

Với điều kiện trên phương trình trở thành: $4^x+2m^3-2^x=0$ (1)

Đặt $t=(2)^x$ ta được: $t^2-t+2m^3=0$ (2)

Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình 2 có nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-8m^3>0\\1>0\\2m^3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{1}{2}\\m>0\end{cases}.$$ **Chọn C.**

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

VẬN DỤNG

Câu 132: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Chọn B. ĐK: $x\neq 0;\ x\neq\sqrt{2}$.

Đặt $t=x^2-\sqrt{2}x \Rightarrow x^2-\sqrt{2}x+2=t+2 \Rightarrow \log_3|t|=\log_5(t+2)$.

Đặt $\log_3|t|=\log_5(t+2)=u \Rightarrow \begin{cases}\log_3|t|=u\\\log_5(t+2)=u\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|t|=3^u\\t+2=5^u\end{cases}$

$$\Rightarrow |5^u-2|=3^u \Rightarrow \left[\begin{array}{l}5^u-2=3^u\\5^u-2=-3^u\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}5^u+3^u=2\\3^u+2=5^u\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}5^u+3^u=2 & (1)\\\left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u=1 & (2)\end{array}\right..$$

Xét $(1): 5^u + 3^u = 2$

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Xét $(2): \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

BÌNH LUẬN: Cho $f(x) = g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 133: Cho phương trình $2\log_3(\text{cotx}) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$. Đặt $u = \log_2(\cos x)$ khi đó $\begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$

Vì $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ suy ra $\frac{(2^u)^2}{1 - (2^u)^2} = 3^u \Leftrightarrow f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$

$f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số f(u) đồng biến trên R, suy ra phương trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy $f(-1) = 0$ suy ra $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Theo điều kiện ta đặt suy ra nghiệm thỏa mãn là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. Khi đó phương trình nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$ là $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

Chọn C.

Câu 134: Phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Hướng dẫn giải

Chọn A. điều kiện x > 0

Phương trình tương đương với $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) = 2x - x^2$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$

Và $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) = \log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = \log_3\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\right) \geq \log_3 3 = 1$

Do đó $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+1}{x}\right)=2x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2=0\\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Câu 135: Cho phương trình $\log_3\dfrac{x^2-2x+1}{x}+x^2+1=3x$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện $x>0$ và $x\neq 1$

$\log_3\dfrac{x^2-2x+1}{x}+x^2+1=3x \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2x+1\right)-\log_3 x+x^2-2x+1-x=0$

$\log_3\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2-2x+1\right)=\log_3 x+x\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$ và $t\neq 1$

Nên $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với với $t>0$ và $t\neq 1$ nên $f(t)$ đồng biến với với $t>0$ và $t\neq 1$

Do đó: $f\left(x^2-2x+1\right)=f(x) \Leftrightarrow x^2-2x+1=x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Khi đó tổng các nghiệm của phương trình bằng 3.

Câu 136: Phương trình: $\ln\left(x^2+x+1\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=x^2-x$ có tổng bình phương các nghiệm bằng:

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\ln\left(x^2+x+1\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=x^2-x$.

$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+1\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\ln\left(2x^2+1\right)+\left(2x^2+1\right)$.

Nhận xét: $x^2+x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $2x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ với $t\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$, nên hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $f\left(x^2+x+1\right)=f\left(2x^2+1\right) \Leftrightarrow x^2+x+1=2x^2+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 1.

VẬN DỤNG CAO

Câu 137: Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 4 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)\ (1)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)\ (2)$

Xét hàm số $f(t)=2^t.log_2(t+2), t\geq 0$.

Vì $f'(t)>0, \forall t\geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right] = f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1+2m=0\,(3) \\ x^2=2m-1\,(4) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)

$\Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)

$\Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

$(4) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$,với $\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m=1$.

KL: $m \in \left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

BÌNH LUẬN:

B1: Đưa phương trình về dạng $f(u)=f(v)$ với u,v là hai hàm theo x.

B2: Xét hàm số $f(t), t \in D$.

B3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t), t \in D$ tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trên D.

B4: $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

Câu 138: Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m \cdot \ln\left(1-2^x\right) - x = m$ có nghiệm thuộc $(-\infty;0)$ là

A. $(\ln 2;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;e)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $1-2^x>0 \Leftrightarrow x<0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $m = \dfrac{x}{\ln\left(1-2^x\right)-1}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\ln\left(1-2^x\right)-1}$ với $x<0$. Có $f' = \dfrac{\ln\left(1-2^x\right)-1-x.\dfrac{-2^x.\ln 2}{1-2^x}}{\left(\ln\left(1-2^x\right)-1\right)^2}$

$= \dfrac{\left(1-2^x\right)\ln\left(1-2^x\right)-\left(1-2^x\right)1+x.2^x.\ln 2}{\left(1-2^x\right)\left(\ln\left(1-2^x\right)-1\right)^2}$. Vì $x<0$ nên $0<1-2^x<1$, do đó

$f'(x)<0\ \ \forall x<0$. Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;\ 0)$.

Mặt khác, dễ thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Vậy phương trình có nghiệm khi $m > 0$.

Câu 139: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-1 < m \neq 0$. **B.** $m > -1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $-1 < m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Xét hàm số

$$f(x) = x - \frac{2}{\log_3(x+1)}; f'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1).\ln 3.\log_3^2(x+1)} > 0, \forall x \in (-1;0) \cup (0:+\infty)$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > -1$

Câu 140: Biết phương trình $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $a+b$?

A. 5 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2

Hướng dẫn giải.

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Pt $\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) - \log_5 x = \log_3(x-1)^2 - \log_3 4x$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) + \log_3 4x = \log_5 x + \log_3(x-1)^2$ (1)

Đặt $t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2$

(1) có dạng $\log_5 t + \log_3(t-1)^2 = \log_5 x + \log_3(x-1)^2$ (2)

Xét $f(y) = \log_5 y + \log_3(y-1)^2$, do $x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1$.

Xét $y > 1$: $f'(y) = \dfrac{1}{y\ln 5} + \dfrac{1}{(y-1)^2\ln 3}.2(y-1) > 0$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến trên miền $(1;+\infty)$

(2) có dạng $f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1-\sqrt{2} \ \text{(vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}\ (tm)$.

Vậy $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Chọn A.

CHUYÊN ĐỀ 7: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A – KIẾN THỨC CHUNG

- Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x)\end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x)\end{cases}\end{array}\right.}$. Tương tự với bất phương trình dạng: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a^{f(x)} \le a^{g(x)}\end{array}\right.$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $\boxed{a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N)>0}$.
- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
  + Đưa về cùng cơ số.
  + Đặt ẩn phụ.
  + Sử dụng tính đơn điệu: $\begin{cases} y=f(x) \text{ đồng biến trên } D \text{ thì: } f(u)<f(v) \Rightarrow u<v \\ y=f(x) \text{ nghịch biến trên } D \text{ thì: } f(u)<f(v) \Rightarrow u>v \end{cases}$

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

A. $(-\infty;\log_2 3]$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}} 3;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x > 3.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

Câu 2: Giải bất phương trình $\frac{1}{9}.3^{3x} > 1$.

A. $x > \frac{2}{3}$. **B.** $x < \frac{2}{3}$. **C.** $x > \frac{3}{2}$. **D.** $x < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\frac{1}{9}.3^{3x} > 1 \Leftrightarrow 3^{3x} > 3^2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1}$

A. $x \in [2;+\infty)$. **B.** $x \in (2;+\infty)$. **C.** $x \in (-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \le \frac{4}{3}.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \ge 2$

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x-2} < 3$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\log_3 2\end{array}\right.$. **B.** $x > \log_3 2$. **C.** $x < 1$. **D.** $\log_3 2 < x < 1$.

Hướng dẫn giải

$\dfrac{3^x}{3^x-2}<3\Leftrightarrow\dfrac{3^x-3}{3^x-2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x>3\\3^x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<\log_3 2\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 5: Cho hàm số $y=x^2e^x$. Nghiệm của bất phương trình $y'<0$ là:

A. $x\in(0;2)$ **B.** $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **C.** $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ **D.** $x\in(-2;0)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. $y'=(x^2+2x)e^x$ $y'<0\Leftrightarrow(x^2+2x)e^x<0\Leftrightarrow x^2+2x<0\Leftrightarrow-2<x<0$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình: $81.9^{x-2}+3^{x+\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}.3^{2\sqrt{x}+1}\ge 0$ là:

A. $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$ **B.** $S=[1;+\infty)$ **C.** $S=[0;+\infty)$ **D.** $S=[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ĐKXĐ: $x\ge 0$.

BPT $\Leftrightarrow 81.\dfrac{9^x}{81}+3^x.3^{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}.3.3^{2\sqrt{x}}\ge 0\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x.3^{\sqrt{x}}-2.3^{2\sqrt{x}}\ge 0\Leftrightarrow\left(3^x-3^{\sqrt{x}}\right)\left(3^x+2.3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3^x-3^{\sqrt{x}}\ge 0\ \left(do\ \ 3^x+2.3^{\sqrt{x}}>0,\ \forall x\ge 0\right)\Rightarrow 3^x\ge 3^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x\ge\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\ge 1\\\sqrt{x}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x=0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm cảu BPT là $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\le 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $2\le x$. **B.** $1\le x\le 2$. **C.** $2\le x\le 7$. **D.** $2\le x\le 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. ĐK: $x\ge 1$. Ta có:

$3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\le 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow 3^{x^2+\sqrt{x-1}}+9-3.3^{x^2}-3.3\sqrt{x-1}\le 0\Leftrightarrow\left(3^{x^2}-3\right)\left(3^{\sqrt{x-1}}-3\right)\le 0$

+ Với $x=1$, thỏa mãn; + Với $x>1$:$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-1}}\le 3\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\le 1$ $\Leftrightarrow$ $1\le x\le 2$

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x+4.5^x-4<10^x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$. **B.** $x<0$. **C.** $x>2$. **D.** $0<x<2$.

Hướng dẫn giải

$2^x+4.5^x-4<10^x\Leftrightarrow 2^x-10^x+4.5^x-4<0\Leftrightarrow 2^x\left(1-5^x\right)-4\left(1-5^x\right)<0\Leftrightarrow\left(1-5^x\right)\left(2^x-4\right)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-5^x<0\\2^x-4>0\end{cases}\\\begin{cases}1-5^x>0\\2^x-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^x>1\\2^x>4\end{cases}\\\begin{cases}5^x<1\\2^x<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **Chọn A.**

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$ là:

A. $x\in\left(0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$. **B.** $x\in(1;3)$. **C.** $x\in(1;3]$. **D.** $x\in\left[0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$.

Hướng dẫn giải

$\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}-1\le 0\Leftrightarrow\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 0\Leftrightarrow 1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3$

$\Leftrightarrow 0<x\le\log_{\frac{3}{2}}3$ **Chọn A.**

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x+4^{x+2}+4^{x+4}\ge 5^x+5^{x+2}+5^{x+4}$ là:

A. $T=\left(-\infty;\log_{\frac{4}{5}}\frac{31}{13}\right]$. **B.** $T=\left[\log_{\frac{4}{5}}\frac{31}{13};+\infty\right)$. **C.** $T=\left(-\infty;\log_{\frac{4}{5}}\frac{31}{13}\right)$. **D.** $T=\left(\log_{\frac{4}{5}}\frac{31}{13};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương:

$4^x+16\cdot 4^x+256\cdot 4^x\ge 5^x+25\cdot 5^x+625\cdot 5^x\Leftrightarrow 273\cdot 4^x\ge 651\cdot 5^x$

$$\Leftrightarrow 4^x\ge\frac{31}{13}\cdot 5^x\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^x\ge\frac{31}{13}\Leftrightarrow x\le\log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{31}{13}\right).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=\left(-\infty;\log_{\frac{4}{5}}\frac{31}{13}\right]$. **Chọn A.**

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}\le 4^x+4^{x+1}+4^{x+2}$ là:

A. $\left[\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}\right]$. **C.** $\left(\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 3^x+3\cdot 3^x+9\cdot 3^x\le 4^x+4\cdot 4^x+16\cdot 4^x\Leftrightarrow 13\cdot 3^x\le 21\cdot 4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\frac{21}{13}\Leftrightarrow x\ge\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}.$$

(Vì $0<\frac{3}{4}<1$ nên $\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\frac{21}{13}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}}\Leftrightarrow x\ge\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}$)

Vậy tập nghiệm bất phương trình (1) là $T=\left[\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13};+\infty\right)$. **Chọn A.**

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x.x^2+54x+5.3^x>9x^2+6x.3^x+45$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;1)\cup(2;5)$ **C.** $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$ **D.** $(1;2)\cup(5;+\infty)$

Bất phương trình $3^x.x^2+54x+5.3^x>9x^2+6x.3^x+45$ tương đương với:

$$\left(3^x.x^2-9x^2\right)+\left(-6x.3^x+54x\right)+\left(5.3^x-45\right)>0\Leftrightarrow x^2\left(3^x-9\right)-6x\left(3^x-9\right)+5\left(3^x-9\right)>0$$

$$\Leftrightarrow\left(3^x-9\right)\left(x^2-6x+5\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x-9>0\\x^2-6x+5>0\end{cases}\\\begin{cases}3^x-9<0\\x^2-6x+5<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\\left[\begin{array}{l}x<1\\x>5\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<2\\1<x<5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>5\\1<x<2\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;2)\cup(5;+\infty)$. **Chọn D.**

VẬN DỤNG

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^x-4\right)\left(x^2-2x-3\right)<0$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(2;3)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\left(2^x-4\right)\left(x^2-2x-3\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-4>0\\x^2-2x-3<0\end{cases}\\\begin{cases}2^x-4<0\\x^2-2x-3>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\-1<x<3\end{cases}\\\begin{cases}x<2\\x<-1\vee x>3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<3\\x<-1\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(2;3)$.

Cách 2: lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
2^x-4		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 14: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.

A. $S = (2;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;0)$. **C.** $S = (0;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^{-\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x-1 > -\frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Câu 15: Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{125}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{125} \Leftrightarrow x^2-2x \le 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$

Vì phương trình tìm nghiệm nguyên dương nên các nghiệm là $x = \{1;2;3\}$.

Câu 16: Một học sinh giải bất phương trình $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \le \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5}$.

Bước 1: Điều kiện $x \ne 0$.

Bước 2: Vì $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \le \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le 5$

Bước 3: Từ đó suy ra $1 \le 5x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{5}$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

A. Sai ở bước 1. **B.** Sai ở bước 2. **C.** Sai ở bước 3. **D.** Đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Vì $\frac{1}{x} \le 5 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{x} \le 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x \ge \frac{1}{5}$.

Câu 17: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$ ta được tập nghiệm:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ **B.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $2^{x+2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\Leftrightarrow 2^{x+2}<2^{-2x}\Leftrightarrow x+2<-2x\Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 19: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$.

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-3)$. **D.** $S=\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}\Leftrightarrow 2x+1>3x-2$ (vì $0<\frac{1}{2}<1$) $\Leftrightarrow x<3$.

Câu 20: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2}\geq\frac{1}{9}$ là:

A. $x\geq -4$. **B.** $x<0$. **C.** $x>0$. **D.** $x<4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A . $3^{x+2}\geq\frac{1}{9}\Leftrightarrow 3^{x+2}\geq 3^{-2}\Leftrightarrow x+2\geq -2\Leftrightarrow x\geq -4$.

Câu 21: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình: $2^{-|x|}>\frac{1}{8}$.

A. $x>3$ hoặc $x<-3$. **B.** $-3<x<3$. **C.** $x<-3$. **D.** $x>3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Có: $2^{-|x|}>\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2^{-|x|}>2^{-3}\Leftrightarrow -|x|>-3 \Leftrightarrow |x|<3\Leftrightarrow -3<x<3$

Câu 22: Giải bất phương trình $2^{-x^2+3x}>4$

A. $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$. **B.** $2<x<4$. **C.** $1<x<2$. **D.** $0<x<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $2^{-x^2+3x}>4\Leftrightarrow -x^2+3x>2\Leftrightarrow -x^2+3x-2>0\Leftrightarrow 1<x<2$.

Câu 23: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{x^2+x}>0,09$.

A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $0,3^{x^2+x}>0,09\Leftrightarrow 0,3^{x^2+x}>(0,3)^2\Leftrightarrow x^2+x<2\Leftrightarrow -2<x<1$. Vậy $S=(-2;1)$.

Câu 24: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}$.

A. $S=\left(-\infty;\frac{-2}{5}\right)$ **B.** $S=\left(-\infty;\frac{-2}{5}\right)\cup(0;+\infty)$. **C.** $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=\left(\frac{-2}{5};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\frac{3}{x}+5\Leftrightarrow\frac{2+5x}{x}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<-\frac{2}{5} \\ x>0 \end{array}\right.$.

Câu 25: Tập các số x thỏa mãn $\left(\frac{3}{2}\right)^{4x}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là:

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$ **B.** $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$ **C.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$ **D.** $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 4x \le 2-x \Leftrightarrow x \le \frac{2}{5}$.

Câu 26: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{2x}{x-1}} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{x}$ là:

A. $(-\infty;-1]\cup[0;1]$ **B.** $[-1;0]$ **C.** $(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$ **D.** $[-1;0]\cup(1;+\infty)$

Hướng dẫn giải.

Chọn D. $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{2x}{x-1}} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{-2x}{x-1}} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{x} \Leftrightarrow -\frac{2x}{x-1} \le x$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}+x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0 \vee x > 1$.

Câu 27: Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$ là

A. $x \le \frac{2}{3}$. **B.** $x > \frac{2}{3}$. **C.** $x \ne \frac{2}{3}$. **D.** $x = \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $BPT \Leftrightarrow 9x^2-17x+11 \le 7-5x \Leftrightarrow 9x^2-12x+4 \le 0 \Leftrightarrow (3x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Câu 28: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} - \frac{2^x}{2} \le 0$ là

A. $[0;\ 2]$. **B.** $(-\infty;\ 1]$. **C.** $(-\infty;\ 0]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} - \frac{2^x}{2} \le 0 \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{x^2-2x}} - 2^{x-1} \le 0 \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{x^2-2x}} \le 2^{x-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2-2x} \le x-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \ge 1-x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x \ge 0 \\ 1-x \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x > 0 \\ x^2-2x \ge (1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \ge 2.$$

Câu 29: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow x^2-3x+4 \le 10-2x \Leftrightarrow x^2-x-6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$

Do đó, nghiệm nguyên dương của bất phương trình là $\{1;2;3\}$.

Câu 30: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{10}-3 = \left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$

$\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{-\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3-x}{x-1} > \dfrac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{3-x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{(x+3)(x-1)} < 0 \Rightarrow x \in (-3;1)$.

Vậy nghiệm nguyên gồm $x=-2; x=-1; x=0$.

Câu 31: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ x>2 \\ x<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ 2<x<14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < 14.$$

Vì x nguyên nên nhận $x = \{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$.

Câu 32: Bất phương trình $\left(\sqrt{3}-1\right)^{x+1} < \left(4-2\sqrt{3}\right)^{x-1}$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;3]$. **C.** $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\left(\sqrt{3}-1\right)^{x+1} < \left(4-2\sqrt{3}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{x+1} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2x-2} \Leftrightarrow x+1 > 2x-2$ (do $\sqrt{3}-1<1$).

$\Leftrightarrow x<3$.

VẬN DỤNG

Câu 33: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(t^2+2t+\dfrac{7}{4}\right)^{t^2-2t+3} \ge \left(t^2+2t+\dfrac{7}{4}\right)^{1+t}$ là:

A. $(-\infty;1] \cup [2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};1\right] \cup [2;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2};1\right] \cup [2;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \cup (2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta phân tích như sau: $t^2+2t+\dfrac{7}{4} = \left(t^2+2t+1\right)+\dfrac{3}{4} = (t+1)^2+\dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta chia thành các trường hợp:

- TH1: $t^2+2t+\dfrac{7}{4}=1 \Leftrightarrow t^2+2t+\dfrac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{2} \\ t=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Khi đó, tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong trường hợp 1 là:

$T_1 = \left\{-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$

- TH2: $\dfrac{3}{4} \le t^2+2t+\dfrac{7}{4} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t+1 \ge 0 \\ t^2+2t+\dfrac{3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ t \in \left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương:

$t^2-2t+3\le 1+t \Leftrightarrow t^2-3t+2\le 0 \Leftrightarrow t\in[1;2]$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong trường hợp 2 là: $T_2=\varnothing$.

□ TH3: $t^2+2t+\frac{7}{4}>1 \Leftrightarrow t^2+2t+\frac{3}{4}>0 \Leftrightarrow t\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương:

$t^2-2t+3\ge 1+t \Leftrightarrow t^2-3t+2\ge 0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong trường hợp 3 là: $T_3=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right]\cup[2;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$T=T_1\cup T_2\cup T_3=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\}\cup\varnothing\cup\left(\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right]\cup[2;+\infty)\right)=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};1\right]\cup[2;+\infty)$.

Câu 34: Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được: $50+\frac{20.2^x}{5^x}\le\frac{133\sqrt{10^x}}{5^x} \Leftrightarrow 50+20.\left(\frac{2}{5}\right)^x\le 133.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x$, $(t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\le t\le\frac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\frac{2}{5}\le\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x\le\frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2\le\left(\frac{2}{5}\right)^x\le\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow -4\le x\le 2$ nên $a=-4, b=2$

Vậy $b-2a=10$.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 35: Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình: $4^{x-1}-2^{x-2}\le 3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $4^{x-1}-2^{x-2}\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}4^x-\frac{1}{4}2^x-3\le 0 \Leftrightarrow 0<2^x\le 4 \Leftrightarrow x\le 2$.

Câu 36: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{2x+1}-10.3^x+3\le 0$ là

A. $[-1;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$3^{2x+1}-10.3^x+3\le 0 \Leftrightarrow 3.(3^x)^2-10.3^x+3\le 0$. Đặt $t=3^x$, $t>0$

BPT $\Leftrightarrow 3t^2-10t+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le t\le 3 \Leftrightarrow 3^{-1}\le t\le 3 \Rightarrow 3^{-1}\le 3^x\le 3^1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Câu 37: Nghiệm của bất phương trình $e^x+e^{-x}<\frac{5}{2}$ là

A. $x<\frac{1}{2}$ hoặc $x>2$. **B.** $\frac{1}{2}<x<2$.

C. $-\ln 2<x<\ln 2$. **D.** $x<-\ln 2$ hoặc $x>\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $e^x+e^{-x}<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow e^x+\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2-5e^x+2<0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<e^x<2\Leftrightarrow -\ln 2<x<\ln 2$.

Câu 38: Nghiệm của bất phương trình $9^{x-1}-36.3^{x-3}+3\le 0$ là

A. $x\ge 1$. **B.** $x\le 3$. **C.** $1\le x\le 3$. **D.** $1\le x\le 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $9^{x-1}-36.3^{x-3}+3\le 0\Leftrightarrow \dfrac{9^x}{9}-\dfrac{36.3^x}{27}+3\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3^x}{3}\right)^2-\dfrac{4.3^x}{3}+3\le 0\Leftrightarrow t^2-4t+3\le 0\left(t=\dfrac{3^x}{3}\right)\Leftrightarrow t\in[1;3]\Leftrightarrow 3\le 3^x\le 9\Rightarrow x\in[1;2]$.

Câu 39: Bất phương trình $9^x-3^x-6<0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $9^x-3^x-6<0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3^x-6<0\Leftrightarrow -2<3^x<3\Leftrightarrow x<1$.

Câu 40: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $3^{3x-2}+\dfrac{1}{27^x}\le\dfrac{2}{3}$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. **D.** $(2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $3^{3x-2}+\dfrac{1}{27^x}\le\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{3^{3x}}{9}+\dfrac{1}{3^{3x}}\le\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\left(3^{3x}\right)^2-6.3^{3x}+9\le 0$

$\Leftrightarrow\left(3^{3x}-3\right)^2\le 0\Leftrightarrow 3^{3x}-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 41: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $6^{2x+1}-13.6^x+6\le 0$.

A. $[-1;1]$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **C.** $\left[\log_6\dfrac{2}{3};\log_6\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $(-\infty;\log_6 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Bpt $\Leftrightarrow 6.6^{2x}-13.6^x+6\le 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\le 6^x\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\log_6\dfrac{2}{3}\le x\le\log_6\dfrac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bpt là $S=\left[\log_6\dfrac{2}{3};\log_6\dfrac{3}{2}\right]$.

Câu 42: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{3^x+5}\le\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$ là:

A. $-1<x\le 1$. **B.** $x\le -1$. **C.** $x>1$. **D.** $1<x<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$\dfrac{1}{t+5}\le\dfrac{1}{3t-1}\Leftrightarrow\begin{cases}3t-1>0\\3t-1\le t+5\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}<t\le 3\Leftrightarrow -1<x\le 1$.

Câu 43: Xác định tập hợp $A\subset\mathbb{R}$ thỏa $A=C\cup D$ trong đó $C=(1;5)$ và D là tập nghiệm của bất phương trình $\left(28-16\sqrt{3}\right)^x-6\left(4-2\sqrt{3}\right)^x+5\ge 0$.

A. $A=\mathbb{R}$ **B.** $A=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. **C.** $A=(1;5)$. **D.** $A=(0;1]\cup[5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta đặt $t=\left(4-2\sqrt{3}\right)^x$, $(t>0)$.

Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành:

$t^2-6t+5\ge 0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. Vì $t>0$ nên

$$t\in(0;1]\cup[5;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 1\\ t\ge 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ t\le 1\\ t\ge 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4-2\sqrt{3}\right)^x>0\\ \left(4-2\sqrt{3}\right)^x\le 1\\ \left(4-2\sqrt{3}\right)^x\ge 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\ge 0\\ x\le\log_{4-2\sqrt{3}}5\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $D=\varnothing$.

Nên $A=C\cup D=(1;5)\cup\varnothing=(1;5)$, vì $A=(1;5)\subset\mathbb{R}$

VẬN DỤNG

Câu 44: Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 16

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được: $50+\dfrac{20.2^x}{5^x}\le\dfrac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le 133.\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x, (t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\le 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\le t\le\dfrac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\dfrac{2}{5}\le\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x\le\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$ nên $a=-4, b=2$

Vậy $b-2a=10$

Bình luận

Phương pháp giải bất phương trình dạng $ma^{2\alpha}+n(ab)^{\alpha}+pb^{2\alpha}>0$: chia 2 vế của bất phương trình cho $a^{2\alpha}$ hoặc $b^{2\alpha}$.

Câu 45: Giải bất phương trình $2^{\frac{4x-1}{2x+1}}<2^{\frac{2-2x}{2x+1}}+1$.

A. $\left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{1}{2}\\ x>1\end{array}\right.$. **B.** $-\dfrac{1}{2}<x<1$. **C.** $x>1$ **D.** $x<-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $2^{\frac{4x-1}{2x+1}}<2^{\frac{2-2x}{2x+1}}+1\Leftrightarrow 8.2^{-\frac{3}{2x+1}}<2^{\frac{3}{2x+1}}+2$.

Đặt $2^{\frac{3}{2x+1}}=t>0$ thì ta có PT: $\dfrac{8}{t}<t+2\Leftrightarrow t^2+2t-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-4\\ t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow t>2\ (t>0)$.

Với $t>2\Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2x+1}}>2\Leftrightarrow\dfrac{3}{2x+1}>1\Leftrightarrow\dfrac{-2x+2}{2x+1}>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2x+1}<0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<x<1$.

Câu 46: Nghiệmcủabấtphươngtrình $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$ là

A. $0\le x<1$. **B.** $0<x\le 1$. **C.** $0<x<1$. **D.** $0\le x\le 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tacó: $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2-6.5^{\sqrt{x}}+5<0\Leftrightarrow t^2-6t+5<0\left(t=5^{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow 1<t<5\Leftrightarrow\begin{cases}5^{\sqrt{x}}<5\\ 5^{\sqrt{x}}>1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1.$$

Câu 47: Cho bất phương trình: $\dfrac{1}{5^{x+1}-1} \ge \dfrac{1}{5-5^x}$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình.

A. $S=(-1;0]\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-1;0]\cap(1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;0]$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\dfrac{1}{5^{x+1}-1} \ge \dfrac{1}{5-5^x} \Leftrightarrow \dfrac{6(1-5^x)}{(5.5^x-1)(5-5^x)} \ge 0$ (1).

Đặt $t=5^x$, BPT (1) $\Leftrightarrow \dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)} \ge 0$. Đặt $f(t)=\dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)}$.

Lập bảng xét dấu $f(t)=\dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)}$, ta được nghiệm:

$\left[\begin{array}{l} 5<t \\ \dfrac{1}{5}<t\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5<5^x \\ \dfrac{1}{5}<5^x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x \\ -1<x\le 0 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của BPT là $S=(-1;0]\cup(1;+\infty)$.

Câu 48: Cho bất phương trình $\left(5^{x^2-2x}-3.2^{x^2-2x}\right).5^{x^2-2x} > -2^{2x^2-4x+1}$. Phát biểu nào sau đây là đúng:

A. Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $T=\left(-\infty;1-\sqrt{\log_2 5}\right)\cup\left(1+\sqrt{\log_2 5};+\infty\right)\cup(0;2)$

B. Bất phương trình đã cho vô nghiệm.

C. Tập xác định của phương trình đã cho là $(0;+\infty)$.

D. Bất phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $\left(5^{x^2-2x}-3.2^{x^2-2x}\right).5^{x^2-2x} > -2^{2x^2-4x+1}$ tương đương với:

$$5^{2x^2-4x}-3.2^{x^2-2x}5^{x^2-2x} > -2^{2x^2-4x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x^2-4x}-3\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x} > -2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x^2-4x}-3\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}>2 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}<1 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}<1$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}<1 \Leftrightarrow x^2-2x<0 \Leftrightarrow 0<x<2$

- Trường hợp 2: $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}>2$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x}>2 \Leftrightarrow x^2-2x>\log_{\frac{5}{2}}2 \Leftrightarrow (x-1)^2>\log_{\frac{5}{2}}2+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1+\sqrt{\log_{\frac{5}{2}}2+1} \\ x<1-\sqrt{\log_{\frac{5}{2}}2+1} \end{array}\right.$$

A) Theo cách giải trên, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\infty;1-\sqrt{\log_2 5}\right)\cup\left(1+\sqrt{\log_2 5};+\infty\right)\cup(0;2)$ nên phát biểu này đúng.

B) Sai vì tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\infty;1-\sqrt{\log_2 5}\right)\cup\left(1+\sqrt{\log_2 5};+\infty\right)\cup(0;2)$.

C) Sai vì tập xác định của phương trình đã cho là $D=R$.

D) Sai vì tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\infty;1-\sqrt{\log_2 5}\right)\cup\left(1+\sqrt{\log_2 5};+\infty\right)\cup\left(0;2\right)$. **Chọn A.**

VẬN DỤNG CAO

Câu 49: Tìm m để bất phương trình $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(0;1\right)$.

A. $0\le m\le 6$ **B.** $m\le 6$. **C.** $m\ge 6$. **D.** $m\le 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $m.9^x-\left(2m+1\right).6^x+m.4^x\le 0 \Leftrightarrow m.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x-\left(2m+1\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+m\le 0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$. Vì $x\in\left(0;1\right)$ nên $1<t<\dfrac{3}{2}$

Khi đó bất phương trình trở thành $m.t^2-\left(2m+1\right)t+m\le 0 \Leftrightarrow m\le\dfrac{t}{\left(t-1\right)^2}$.

Đặt $f\left(t\right)=\dfrac{t}{\left(t-1\right)^2}$. Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{-t-1}{\left(t-1\right)^3}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Bảng biến thiên.

t	-1		1		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	$+\ 0$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|$
$f(t)$			$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m\le\lim\limits_{t\to\frac{3}{2}}f\left(t\right)=6$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $\left(-\infty;0\right]$: $m2^{x+1}+\left(2m+1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^x+\left(3+\sqrt{5}\right)^x<0$.

A. $m\le-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\le\dfrac{1}{2}$. **C.** $m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương

$2m+\left(2m+1\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x<0\ \left(1\right)$. Đặt $t=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x>0$, ta được:

$2m+\left(2m+1\right)\dfrac{1}{t}+t<0 \ \Leftrightarrow \mathrm{f}\left(t\right)=t^2+2mt+2m+1<0\ \left(2\right)$

BPT (1) nghiệm đúng $\forall x\le 0$ nên BPT (2) có nghiệm $0<t\le 1$, suy ra

Phương trình $f\left(t\right)=0$ có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa $t_1\le 0<1<t_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(0\right)\le 0\\ f\left(1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1\le 0\\ 4m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le-0,5\\ m<-0,5\end{cases}$. Vậy $m<\dfrac{-1}{2}$ thỏa Ycbt. **Chọn D.**

Câu 51: Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2x}+2^{\sin^2x}\ge m.3^{\sin^2x}$ có nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $\sin^2x=t\ \left(0\le t\le 1\right)$

$3^{\cos^2x}+2^{\sin^2x}\ge m.3^{\sin^2x}\Leftrightarrow 3^{\left(1-t\right)}+2^t\ge 3^t\Leftrightarrow\dfrac{3}{3^t}+2^t\ge m.3^t\Leftrightarrow\dfrac{3}{\left(3^t\right)^2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\ge m$

Đặt: $y=\frac{3}{9^t}+\left(\frac{2}{3}\right)^t\left(0\le t\le 1\right)$, $y'=3.\left(\frac{1}{9}\right)^t.\ln\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^t.\ln\frac{2}{3}<0\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến

t	0		1
f'(t)		−	
f(t)	4	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\le 1$ thì phương trình có nghiệm

Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m=1$.

Câu 52: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0$ có nghiệm đúng $\forall x>0$ là:

A. $\left(-2;+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;-\frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $2^x=t$. Do $x>0\Rightarrow t>1$. Khi đó ta có:

$(3m+1)t^2+(2-m)t+1<0,\ \forall t>1$

$\Leftrightarrow(3t^2-t)m<-t^2-2t-1\ \ \forall t>1\Leftrightarrow m<\frac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}\ \ \forall t>1$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}$ trên $\left(1;+\infty\right)\Rightarrow f'(t)=\frac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2}>0\ \ \forall t\in(1;+\infty)$

BBT

t	1		$+\infty$
f'(t)		+	
f(t)	−2	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$

Do đó $m\le\lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bình luận: Sử dụng
$+\ m\ge f\left(x\right)\forall x\in D\Leftrightarrow m\ge\max f\left(x\right)\forall x\in D$
$+\ m\le f\left(x\right)\forall x\in D\Leftrightarrow m\le\min f\left(x\right)\forall x\in D$

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2x}+5^{\cos^2x}\le m.7^{\cos^2x}$ có nghiệm.

A. $m\ge-\frac{6}{7}$. **B.** $m\ge\frac{6}{7}$. **C.** $m<\frac{6}{7}$. **D.** $m<-\frac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $4^{\sin^2x}+5^{\cos^2x}\le m.7^{\cos^2x}\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2x}+\left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2x}\le m$.

Đặt $t=\cos^2x,t\in\left[0;1\right]$ thì BPT trở thành: $4\cdot\left(\frac{1}{28}\right)^t+\left(\frac{5}{7}\right)^t\le m$.

Xét $f\left(t\right)=4.\left(\frac{1}{28}\right)^t+\left(\frac{5}{7}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $\left[0;1\right]$.

Suy ra: $f(1)\le f(t)\le f(0)\Leftrightarrow \frac{6}{7}\le f(t)\le 5$. Từ đó BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge \frac{6}{7}$.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. m tùy ý. **B.** $m\ne -\frac{4}{3}$. **C.** $m<-\frac{3}{2}$. **D.** $m\le -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t-3-2m>0$

ycbt $\Leftrightarrow t^2-2(m+1)t-3-2m>0,\forall t>0,(1)$ ta có $\Delta'=(m+2)^2\ge,\forall m$

Nếu $\Delta'=0\Leftrightarrow m=-2$, khi đó từ (1) ta có $(2t+1)^2>0,\forall t\ne -\frac{1}{2}$

Nếu $m\ne -2$ ta có $\Delta'>0$

khi đó (1) có hai nghiệm thỏa mãn ycbt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta'>0\\ \frac{S}{2}<0\\ P\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne -2\\ m<-1\\ m\le -\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$

Kết luận Vậy $m\le -\frac{3}{2}$.

Câu 55: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3 x}+\frac{2}{3}\left(-1+\sqrt{10}\right)^{\log_3 x}\ge \frac{5}{3}\cdot x$ (1) là:

A. $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$. Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3 x}+\frac{2}{3}\cdot\left(-1+\sqrt{10}\right)^{\log_3 x}\ge\frac{5}{3}\cdot 3^{\log_3 x}$ (2).

Đặt $t=\log_3 x, t\in\mathbb{R}$ ta được:

$$(2)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{10}\right)^t+\frac{2}{3}\cdot\left(-1+\sqrt{10}\right)^t\ge\frac{5}{3}\cdot 3^t\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^t+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right)^t$$

$$\ge\frac{5}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^t+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right)^t-\frac{5}{3}\ge 0\ (3)$$

Đặt $u=\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^t, u>0$ ta được:

$$(3)\Leftrightarrow u+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u}-\frac{5}{3}\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{3u}\cdot\left(3u^2+2u-5\right)\ge 0\Leftrightarrow 3u^2+2u-5\ge 0\Leftrightarrow u\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right]\cup[1;+\infty).$$

Vì $u>0$ nên $u\in[1;+\infty)\Leftrightarrow u\ge 1\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^t\ge 1\Leftrightarrow t\ge 0\Leftrightarrow\log_3 x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=[1;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(1+\sqrt{5}\right)^{\log_2 x}-\left(-1+\sqrt{5}\right)^{\log_2 x}>\frac{2}{3}x$ (1) là:

A. $\left(2^{\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{10}}{2}};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

C. $\left(\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{3}}\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)^{\log_2 x}-\left(-1+\sqrt{5}\right)^{\log_2 x}>\frac{2}{3}\cdot 2^{\log_2 x}$ (2). Đặt $t=\log_2 x,\ t\in\mathbb{R}$

$(2)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)^t-\left(-1+\sqrt{5}\right)^t>\frac{2}{3}\cdot 2^t\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^t>\frac{2}{3}$ (3).

Đặt $u=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$, $u>0$, ta được:

$$u-\frac{1}{u}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{u}\left(u^2-\frac{2}{3}u-1\right)>0\Leftrightarrow u^2-\frac{2}{3}u-1>0\Leftrightarrow u\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right).$$

Vì $u>0$ nên

$$u\in\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow u>\frac{1+\sqrt{10}}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t>\frac{1+\sqrt{10}}{3}\Leftrightarrow t>\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

$$\Leftrightarrow\log_2 x>\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{10}}{3}\Leftrightarrow x>2^{\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{10}}{3}}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=\left(2^{\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{10}}{3}};+\infty\right)$. **Chọn A.**

PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HÓA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 57: Tìm tập S của bất phương trình: $3^x.5^{x^2}<1$.

A. $\left(-\log_5 3;0\right]$. **B.** $\left[\log_3 5;0\right)$. **C.** $\left(-\log_5 3;0\right)$. **D.** $\left(\log_3 5;0\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $3^x.5^{x^2}<1\Leftrightarrow\log_5\left(3^x.5^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow x^2+x\log_5 3<0\Leftrightarrow-\log_5 3<x<0$ nên $S=\left(-\log_5 3;0\right)$.

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 58: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $7^x\geq 10-3x$.

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=7^x$ đồng biến trên R. Hàm số $y=10-3x$ nghịch biến trên **R**.
Phương trình $7^x=10-3x$ có nghiệm duy nhất $x=1$ nên chọn đáp án **C.**

Câu 59: Cho hàm số $f(x)=\frac{3^x}{7^{x^2-4}}$. Hỏi khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f(x)>9\Leftrightarrow x-2-\left(x^2-4\right)\log_3 7>0$.

B. $f(x) > 9 \Leftrightarrow (x-2)\log 3 - (x^2-4)\log 7 > 0.$

C. $f(x) > 9 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 - (x^2-4)\ln 7 > 0.$

D. $f(x) > 9 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,2} 3 - (x^2-4)\log_{0,2} 7 > 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow \dfrac{3^x}{7^{x^2-4}} > 9 \Leftrightarrow 3^{x-2} > 7^{x^2-4} \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,2} 3 < (x^2-4)\log_{0,2} 7$.

VẬN DỤNG

Câu 60: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{\sqrt{2x}+1} - 3^{x+1} \le x^2 - 2x$ là

A. $[0;+\infty)$ **B.** $[0;2]$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Điều kiện xác định $x \ge 0$.

Ta có $3^{\sqrt{2x}+1} - 3^{x+1} \le x^2 - 2x \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2x}+1} + 2x \le 3^{x+1} + x^2$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 3^{t+1} + t^2$ với $t \ge 0$.

Ta có $f'(t) = 3^{t+1}.\ln 3 + 2t \ge 0,\ \forall t \ge 0.$ Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x}\right) \le f(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x} \le x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là $[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Cách 2:

Với $x = 1$ ta có bất phương trình: $3^{\sqrt{2}+1} - 3^2 \le -1 \Leftrightarrow 3\left(3^{\sqrt{2}} - 3\right) \le -1$ (vô lý). Loại A, B.

Với $x = 0$ ta có bất phương trình: $3 - 3 \le 0$ (thỏa mãn).

Câu 61: S_1 là tập nghiệm của bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 < 0$. Gọi S_2 là tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x} < 4$. Gọi S_3 là tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khi nói về mối quan hệ giữa các tập nghiệm S_1, S_2, S_3.

A. $S_1 \subset S_2 \subset S_3$. **B.** $S_1 \subset S_3 \subset S_2$. **C.** $S_3 \subset S_1 \subset S_2$. **D.** $S_3 \subset S_2 \subset S_1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+) Xét bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2.2^x + 3.3^x + 1 < 6^x$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x < 1$$

Ta có hàm số $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 1$.

Do đó bất phương trình trên có nghiệm $x > 2 \Rightarrow S_1 = (2;+\infty)$.

+) Xét bất phương trình $2^{-x} < 4. \Leftrightarrow 2^{-x} < 4 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2 \Rightarrow S_2 = (-2;+\infty)$.

+) Xét bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow x - 1 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$

$\Rightarrow S_3 = [2;+\infty)$

Từ đó suy ra $S_1 \subset S_3 \subset S_2$.

CHUYÊN ĐỀ 8: BẤT PHƯƠNG LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. **Định nghĩa:**
Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

2. **Phương trình và bất phương trình lôgarit cơ bản:** cho $a,\ b>0,\ a\neq 1$
Bất phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a f(x)>b;\ \log_a f(x)\geq b;\ \log_a f(x)<b;\ \log_a f(x)\leq b$

3. **Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit**
- **Đưa về cùng cơ số**
  - Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$
  - Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$
- **Đặt ẩn phụ**
- **Mũ hóa**
- **Phương pháp hàm số và đánh giá**

B – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1$ là:

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{8};1\right)$. **C.** $(1;8)$. **D.** $\left(\frac{1}{8};3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}} x<3\Leftrightarrow 1>x>\left(\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow\frac{1}{8}<x<1$.

Câu 2: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-2x+3\right)>1$ có tập nghiệm là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_2\left(x^2-2x+3\right)>1\Leftrightarrow x^2-2x+3>2^1\Leftrightarrow x^2-2x+1>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập nghiệm $S=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-1$ là:

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1<2\\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

Câu 4: Giải bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x-1)>2$ ta được:

A. $\frac{1}{2}<x<\frac{25}{32}$. **B.** $x>\frac{25}{32}$. **C.** $x<\frac{1}{2}$ hoặc $x>\frac{25}{32}$. **D.** $x>\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $x>\frac{1}{2}$

Khi đó bất phương trình tương đương với. $\log_{\frac{3}{4}}(2x-1)>\log_{\frac{3}{4}}\frac{9}{16}$.

$\Leftrightarrow 2x-1<\frac{9}{16} \Leftrightarrow x<\frac{25}{32}$. Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được $\frac{1}{2}<x<\frac{25}{32}$

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $3<\log_2 x<4$ là:

A. $(8;16)$. **B.** $(0;16)$. **C.** $(8;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $3<\log_2 x<4 \Leftrightarrow 2^3<x<2^4 \Leftrightarrow 8<x<16$.

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1)>-2$

A. $S=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $S=\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $S=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. BPT $\Leftrightarrow \begin{cases}2x-1>0\\2x-1<(0,5)^{-2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x<\frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \ge -1$ là

A. $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$. **C.** $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **D.** $\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \ge -1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2>0\\x^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\x^2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Câu 8: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2$.

A. $S=\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=(1;9)$. **C.** $S=\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(9;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x-1}>0\\\frac{2}{x-1}<\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1>0\\8<x-1\end{cases} \Leftrightarrow x>9$.

Câu 9: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\ge -1$.

A. $(-\infty;1)$. **B.** $[0;1)\cup(2;3]$. **C.** $[0;2)\cup(3;7]$. **D.** $[0;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\ge -1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+2>0\\\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right. \\ 0\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x<1 \\ 2<x\le 3 \end{array}\right..$$

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\ge 0$ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(1;2]$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\ge 0\Leftrightarrow x-1\le 1\Leftrightarrow x\le 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(1;2]$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\frac{4x+6}{x}\le 0$ là:

A. $S=\left[-2;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $S=[-2;0)$. **C.** $S=(-\infty;2]$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{3}{2};0\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

[Phương pháp tự luận] $\log_3\frac{4x+6}{x}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+6}{x}>0 \\ \frac{4x+6}{x}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{3}{2}\vee x>0 \\ -2\le x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x<-\frac{3}{2}$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\log_3\frac{4X+6}{X}$

Nhấn CALC và cho $X=1$ (thuộc đáp án C và D) máy tính hiển thị 2,095903274. Vậy loại đáp án C và **D.**

Nhấn CALC và cho $X=-1$ (thuộc đáp án B) máy tính không tính được. Vậy loại B

Câu 12: Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2-x+1)<0$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left(0;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $S=\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $S=(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ **D.** $S=(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2-x+1)<0\Leftrightarrow 2x^2-x+1>1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\frac{1}{2} \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\log_{\frac{2}{3}}(2X^2-X+1)$

Nhấn CALC và cho $X=-5$ (thuộc đáp án A và D) máy tính hiển thị – 9,9277…. Vậy loại đáp án A và **B.**

Nhấn CALC và cho $X=1$ (thuộc đáp án C) máy tính hiển thị – 1,709511291. **Chọn C.**

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>0$ là:

A. $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $S=\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S=(0;1)$. **D.** $S=\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1>0 \\ \log_2(2x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>0\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1))>\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x-1)<1 \\ \log_2(2x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<2x-1<2 \\ 2x-1>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{3}{2}$. (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow S=\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-3x+1)\le 0$ là:

A. $S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$.

B. $S=\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

C. $S=\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

D. $S=\varnothing$.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1>0 \\ \log_2(x^2-3x+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1>0 \\ x^2-3x+1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1>0 \\ x^2-3x+1\le 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$

Câu 15: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}-1}\left(x^2-2x+1\right)>0$.

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\ne 1$.

$\log_{\sqrt{3}-1}\left(x^2-2x+1\right)>0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}-1}\left(x^2-2x+1\right)>\log_{\sqrt{3}-1}1 \Leftrightarrow x^2-2x+1<1$

$x^2-2x<0 \Leftrightarrow 0<x<2$ Vì x nguyên, $x\ne 1 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Câu 16: Điều kiện xác định của bất phương trình $\ln\dfrac{x^2-1}{x}<0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>1 \end{array}\right.$. **B.** $x>-1$. **C.** $x>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện: $\dfrac{x^2-1}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>1 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\ln\dfrac{X^2-1}{X}$

Nhấn CALC và cho $X=-0,5$ (thuộc đáp án A và B) máy tính hiển thị 0,4054651081. Vậy loại đáp án C và D.

Nhấn CALC và cho $X=0,5$ (thuộc đáp án B) máy tính không tính được. Vậy loại B,

Câu 17: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right]>0$ là:

A. $x\in[-1;1]$ **B.** $x\in(-1;0)\cup(0;1)$ **C.** $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ **D.** $x\in(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

BPT xác định khi: $\begin{cases} 2-x^2>0 \\ \log_2(2-x^2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 2-x^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 1-x^2>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1)\le m$ có nghiệm $x\ge 1$?

A. $m\ge 2$. **B.** $m>2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $x\ge 1\Leftrightarrow 5^x-1\ge 4\Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\ge 2\Leftrightarrow m\ge 2$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2\left(mx-x^2\right)=2$ vô nghiệm?

A. $m<4$. **B.** $-4<m<4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **D.** $m>-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_2\left(mx-x^2\right)=2\Leftrightarrow -x^2+mx-4=0(*)$

Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0\Leftrightarrow m^2-16<0\Leftrightarrow -4<m<4$

Câu 20: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3\left(x^2+4x+m\right)\ge 1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $m\ge 7$. **B.** $m>7$. **C.** $m<4$. **D.** $4<m\le 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\log_3\left(x^2+4x+m\right)\ge 1\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+4x+m-3\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta\le 0\Leftrightarrow m\ge 7$

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1$ là:

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{8};1\right)$. **C.** $(1;8)$. **D.** $\left(\frac{1}{8};3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}} x<3$ $\quad 0<\log_{\frac{1}{2}} x<3\Leftrightarrow 1>x>\left(\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow \frac{1}{8}<x<1$.

Câu 22: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$ là

A. $S=(-4;-3)\cup[8;+\infty)$. **B.** $S=[8;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-4)\cup(-3;\ 8)$. **D.** $S=(-4;-3)\cup(8;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Taсó: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0\Leftrightarrow \log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)>1$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+x}{x+4}>6\Leftrightarrow\frac{x^2-5x-24}{x+4}>0\Leftrightarrow x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty)$.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)-1>0$ có dạng $(a;b)$. Khi đó giá trị $a+3b$ bằng

A. 15. **B.** 13. **C.** $\frac{37}{3}$. **D.** 30.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x>3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}(x-3)>1\Leftrightarrow x-3<\frac{1}{3}\Leftrightarrow x<\frac{10}{3}$

So điều kiện, $S=\left(3;\frac{10}{3}\right)$ nên $a+3b=13$.

Câu 24: Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}\right)>0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-2;-1)\cup(1;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}\right)>0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}>0\\ \log_3\dfrac{2x+1}{x-1}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-1}>1\\ \dfrac{2x+1}{x-1}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}>0\\ \dfrac{-x+4}{x-1}<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>4\end{array}\right.$

Câu 25: Bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x>1$ có nghiệm là

A. $x>3^{\log_2 6}$. **B.** $x>2^{\log_3 6}$. **C.** $x>6$. **D.** $x>3^{\log_6 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện $x>0$

Ta có $\log_2 x+\log_3 x>1\Leftrightarrow\log_2 x+\log_3 2.\log_2 x>1\Leftrightarrow(1+\log_3 2).\log_2 x>1$

$$\Leftrightarrow\log_3 6.\log_2 x>1\Leftrightarrow\log_2 x>\frac{1}{\log_3 6}=\log_6 3\Leftrightarrow x>2^{\log_6 3}\Leftrightarrow x>3^{\log_6 2}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+7\right)$. Nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ là:

A. $x>3$. **B.** $x<2$ hoặc $x>3$. **C.** $2<x<3$. **D.** $x<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x^2-5x+7>0,\forall x$

Ta có: $f(x)>0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+7\right)>0\Leftrightarrow x^2-5x+7<1\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$.

Kết hợp điều kiện được $x\geq 1$

Câu 27: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{3-2x}\geq 0$ là:

A. $T=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right]$. **B.** $T=\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$. **C.** $T=\left(-2;\dfrac{1}{3}\right]$. **D.** $T=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương pháp: + Đặt điều kiện $\dfrac{x+2}{3-2x}>0\Leftrightarrow -2<x<\dfrac{3}{2}$.

+ Rồi giải bất phương trình logarit.

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{3-2x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x+2}{3-2x}\leq 1\Leftrightarrow x+2\leq 3-2x\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}\rightarrow x\in\left(-2;\frac{1}{3}\right].$$

Câu 28: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ là

A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$. **C.** $(1;2)\cap(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

□ Điều kiện: $(x-1)(x-2)(x-3)+1>0$.

□ Khi đó bpt $\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)+1>1$, do đó điều kiện của bất phương trình luôn thỏa.

□ Ta có $\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)+1>1\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\ x>3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2)\cup(3;+\infty)$.

VẬN DỤNG

Câu 29: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln\left[(x+1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ là

A. $(1;2)\cap(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$. **C.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$. **D.** $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Đk: $(x+1)(x-2)(x-3)+1>0$.

BPT $\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)+1>1$ (đã thỏa mãn ĐK)

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)>0 \Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 30: Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình sau: $2^x+2.3^x-5^x+3>0$; $\log_2(x+2)\le -2$; $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x>1$. Tìm khẳng định đúng?

A. $S_1\subset S_3\subset S_2$. **B.** $S_2\subset S_1\subset S_3$. **C.** $S_1\subset S_2\subset S_3$. **D.** $S_2\subset S_3\subset S_1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D. Bất phương trình $2^x+2.3^x-5^x+3>0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x+2.\left(\frac{3}{5}\right)^x+3.\left(\frac{1}{5}\right)^x>1$

Ta thấy VT nghịch biến mà $f(2)=1$ nên $f(x)>f(2)\Leftrightarrow x<2\Rightarrow S_1=(-\infty;2)$

Bất phương trình $\log_2(x+2)\le -2 \Leftrightarrow 0<x\le -\frac{7}{4}\Rightarrow S_2=\left(-2;-\frac{7}{4}\right]$

Bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x>\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^0\Leftrightarrow x<0\Rightarrow S_3=(-\infty;0)$

Ta thấy $S_2\subset S_3\subset S_1$.

Câu 31: Tìm tập xác định hàm số sau: $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{3-2x-x^2}{x+1}}$.

A. $D=\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$. **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$. **D.** $D=\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Hàm số xác định khi: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-2x-x^2}{x+1}\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3-2x-x^2}{x+1}>0\\ \frac{3-2x-x^2}{x+1}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)\\ x\in\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-1\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$$

Câu 32: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x;\log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3$ có tập nghiệm là.

A. $(-\infty;27)$. **B.** $(8;27)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};27\right)$. **D.** $(27;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_3 x \ge \log_{\frac{1}{2}} x \Leftrightarrow x \ge 1$. Do đó ta xét.

TH1. Nếu $1 > x > 0$ khi đó $\max\left\{\log_3 x; \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \Leftrightarrow x > \frac{1}{8}$. Vậy $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$

TH2. Nếu $x \ge 1$ khi đó $\max\left\{\log_3 x; \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3 \Leftrightarrow \log_3 x < 3 \Leftrightarrow x < 27$. Vậy $[1; 27)$

Câu 33: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^{x^2-4} - 1\right).\ln x^2 < 0$ là

A. $[1;2]$. **B.** $(-2;-1) \cup (1;2)$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\left(2^{x^2-4}-1\right).\ln x^2 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2-4}-1>0\\ \ln x^2<0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2-4}-1<0\\ \ln x^2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4>0\\ 0<x^2<1\end{cases}(VN)\\ \begin{cases}x^2-4<0\\ x^2>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4<0\\ x^2>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2<x<2\\ \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<2\\ -2<x<-1\end{array}\right.$$

VẬN DỤNG CAO

Câu 34: Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** 9.

Chọn B.

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2y^2>1\\ 2x+y\ge x^2+2y^2\end{cases} (I), \quad \begin{cases}0<x^2+2y^2<1\\ 0<2x+y\le x^2+2y^2\end{cases} (II)$.

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0 < T = 2x + y \le x^2 + 2y^2 < 1$

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2 + 2y^2 \le 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \le \frac{9}{8}$. Khi đó

$$2x+y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \le \sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]} + \frac{9}{4} \le \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

Suy ra: $\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;\frac{1}{2})$

Bình luận: - Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ f(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

- Sử dụng bất đẳng thức BCS cho hai bộ số $(a;b),(x;y)$ thì $|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}>0$

Câu 35: Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$. **B.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

C. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$. **D.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6\le 0$ (1).

Giả sử $M(x;y)$ thỏa mãn pt (1), khi đó tập hợp điểm M là hình tròn (C_1) tâm $I(2;2)$ bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Các đáp án đề cho đều ứng với $m>0$. Nên dễ thấy $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$ là phương trình đường tròn (C_2) tâm $J(-1;1)$ bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Vậy để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa đề khi chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài

$\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10}=\sqrt{m}+\sqrt{2} \Leftrightarrow m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

Câu 36: Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\le m.\log_{5-\sqrt{4-x}}3$ có nghiệm là

A. $m>2\sqrt{3}$. **B.** $m\ge 2\sqrt{3}$. **C.** $m>12\log_3 5$. **D.** $2<m<12\log_2 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $x\in[0;4]$. Ta thấy $4-x\le 4\Rightarrow 5-\sqrt{4-x}\ge 3\Rightarrow \log_{5-\sqrt{4-x}}3>0$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $m\ge f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}).\log_3(5-\sqrt{4-x})$ $(*)$

Với $u=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\Rightarrow u'=\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}$ và

$v=\log_3(5-\sqrt{4-x})\Rightarrow v'=\frac{1}{2\sqrt{4-x}(5-\sqrt{4-x}).\ln 3}$.

Suy ra $f'(x)>0;\forall x\in(0;4)\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[0;4]$.

Để bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge \min\limits_{[0;4]} f(x)=f(0)=2\sqrt{3}$

Câu 37: Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(1+x)\ge x-ax^2$ luôn đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $T=2m+3n$.

A. $T=5$ **B.** $T=8$ **C.** $T=7$ **D.** $T=11$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện ta có: $a\ge\frac{x-\ln(1+x)}{x^2},\forall x>0$. Xét hàm số $f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ta có

$f'(x)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)x^2-2x\left(x-\ln(1+x)\right)}{x^4}=\dfrac{2\ln(1+x)-x-\dfrac{x}{1+x}}{x^3}$.

Xét $g(x)=2\ln(1+x)-x-\dfrac{x}{1+x}$ ta có $g'(x)=\dfrac{2}{1+x}-1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x^2}{(x+1)^2}<0,\forall x>0$.

Do đó $g(x)<g(0)=0,\forall x>0$. Suy ra $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}<0,\forall x>0$. Do đó lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có giá trị cần tìm là $a\ge\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$. Vậy $T=2.1+3.2=8$. **Chọn B.**

Câu 38: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2>1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge1$. Biết giá trị lớn nhất của $P=x+y$ là $\dfrac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{19}$. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\log_{x^2+2y^2}(x+2y)\ge1\Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2\Leftrightarrow(x-1)^2+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2\le\dfrac{9}{8}$.

$\Leftrightarrow x+y=1(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left(y-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{5}{4}$

$\le\sqrt{\left(1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\left((x-1)^2+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2\right)}=\dfrac{5}{4}\le\sqrt{3.\dfrac{9}{8}}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{5+3\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $S=a+b+c=12$

Câu 39: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3)\ge1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3x+4y-6$.

A. $\dfrac{5\sqrt{6}-9}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{6}-3}{2}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}-5}{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{6}-5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo giải thiết ta có: $x+y+3\ge x^2+y^2+2\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{3}{2}$.

Khi đó $S=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+4\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{5}{2}\le\sqrt{\left(3^3+4^2\right)\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\right)}-\dfrac{5}{2}\le\dfrac{5\sqrt{6}-5}{2}$.

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{4},\\ 3x+4y-1=\dfrac{5\sqrt{6}-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{6}-1}{10}\\ y=\dfrac{4\sqrt{6}-3}{10}\end{cases}$.

Câu 40: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1 \Leftrightarrow a^2+b^2\le a+b \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$

$$P=2\left(a-\frac{1}{2}\right)+4\left(b-\frac{1}{2}\right)\le\sqrt{\left(2^2+4^2\right)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]}\le\sqrt{20.\frac{1}{2}}=\sqrt{10}.$$

Câu 41: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(x+y)\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=x+2y$.

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\frac{5+\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện bài toán tương đương

Với $x^2+y^2<1 \Rightarrow x+y\le x^2+y^2<1\ (1)$

Với $x^2+y^2>1$ thì $x+y\ge x^2+y^2\ (2)$

Với (1) ta có: $S=x+2y\le\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left(x^2+y^2\right)}<\sqrt{5}$

Với (2) ta có: $x^2+y^2-x-y\le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức ta có:

$$S=\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\le\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)}+\frac{3}{2}\le\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{3+\sqrt{10}}{2}.$$

So sánh hai trường hợp suy ra giá trị lớn nhất của S là $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Câu 42: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x+y$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=a+b$.

A. 17. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Với $x^2+2y^2<1 \Rightarrow 2x+y\le x^2+2y^2<1$.

Với $x^2+2y^2>1$ thì $2x+y\ge x^2+2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8}$. Khi đó

$$P=2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{9}{4}\le\sqrt{\left(2^2+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)2}\right)\left((x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right)}+\frac{9}{4}$$

$\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất của $P=2x+y$ là $\frac{9}{2}$.

Suy ra $a=9$ và $b=2$. Do đó $S=11$.

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 43: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}x$ là:

A. $x>-\frac{1}{2}$. **B.** $x>0$. **C.** $x>1$. **D.** $x>-1$.

Hướng dẫn giải

BPT xác định khi: $\begin{cases} x>0 \\ 4x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Câu 44: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là:

A. $2<x<5$. **B.** $1<x<2$. **C.** $2<x<3$. **D.** $-4<x<3$.

Hướng dẫn giải

BPT xác định khi: $\begin{cases} x+1>0 \\ 5-x>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<5 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<5$.

Câu 45: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_5(x-2)+\log_{\frac{1}{5}}(x+2)>\log_5 x-3$ là:

A. $x>3$. **B.** $x>2$. **C.** $x>-2$. **D.** $x>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện: $\begin{cases} x-2>0 \\ x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\log_5(X-2)+\log_{\frac{1}{5}}(X+2)-\log_5 X+3$

Nhấn CALC và cho $X=1$ máy tính không tính được. Vậy loại đáp án C và D.

Nhấn CALC và cho $X=\frac{5}{2}$ (thuộc đáp án B) máy tính hiển thị 1,065464369.

Câu 46: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+15)\le\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là:

A. $x>-2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-2 \end{array}\right.$. **C.** $x>-3$. **D.** $-4<x<-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện: $\begin{cases} 5x+15>0 \\ x^2+6x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x>-2 \\ x<-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>-2$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\log_{0,5}(5X+15)-\log_{0,5}(X^2+6X+8)$

Nhấn CALC và cho $X=-3,5$ máy tính không tính được. Vậy loại đáp án C và D.

Nhấn CALC và cho $X=-5$ (thuộc đáp án B) máy tính không tính được. Vậy loại B

Câu 47: Một bạn giải bất phương trình lôgarit $\log_5(x-1)(x-3)(x-5)\le\log_5(x-3)(x-5)$ (1) như sau:

Bước 1:

Điều kiện:

$\begin{cases}(x-1)(x-3)(x-5)>0\\(x-3)(x-5)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(1;3)\cup(5;+\infty)\\x\in(-\infty;3)\cup(5;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)\cup(5;+\infty)$.

Bước 2: Tập xác định: $D=(1;3)\cup(5;+\infty)$.

Bước 3: $(1)\Leftrightarrow \log_5(x-1)+\log_5(x-3)+\log_5(x-5)\le\log_5(x-3)+\log_5(x-5)$

$\Leftrightarrow \log_5(x-1)\le 0 \quad \Leftrightarrow x-1\le 1 \quad \Leftrightarrow x\le 2$.

Bước 4: Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $T=\varnothing$.

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Hướng dẫn giải

Bước thứ 3 sai vì điều kiện xác định của bất phương trình (1) là $x\in(1;3)\cup(5;+\infty)$ nên khi $x=2$ thì $x-3=2-3=-1<0$ nên không tồn tại $\log_5(x-3)$, học sinh đã sai lầm ở bước này. **Chọn C.**

Câu 48: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+\log_3(x-1)\ge 0$ là:

A. $S=[1;6]$. **B.** $S=(5;6]$. **C.** $S=(5;+\infty)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. **[Phương pháp tự luận]**

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+\log_3(x-1)\ge 0\Leftrightarrow \log_3(x-1)\ge\log_3(x^2-6x+5)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+5>0\\x-1\ge x^2-6x+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\vee x>5\\1\le x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow 5<x\le 6$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\log_{\frac{1}{3}}(X^2-6X+5)+\log_3(X-1)$

Nhấn CALC và cho $X=2$ (thuộc đáp án A và D) máy tính không tính được. Vậy loại đáp án A và D.

Nhấn CALC và cho $X=7$ (thuộc đáp án C) máy tính hiển thị – 0,6309297536. Vậy loại C

Câu 49: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_{0,2}x-\log_5(x-2)<\log_{0,2}3$ là:

A. $x=6$. **B.** $x=3$. **C.** $x=5$. **D.** $x=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện: $x>2$

$\log_{0,2}x-\log_5(x-2)<\log_{0,2}3\Leftrightarrow\log_{0,2}[x(x-2)]<\log_{0,2}3\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>3\end{array}\right.$

So điều kiện suy ra $x>3$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\log_{0,2}X-\log_5(X-2)-\log_{0,2}3$

Nhấn CALC và cho $X=3$ (nhỏ nhất) máy tính hiển thị 0. Vậy loại đáp án B.

Nhấn CALC và cho $X=4$ máy tính hiển thị -0.6094234797.

Câu 50: Bất phương trình $\log_2(x^2-x-2)\ge\log_{0,5}(x-1)+1$ có tập nghiệm là:

A. $S=[1-\sqrt{2};+\infty)$ **B.** $S=[1+\sqrt{2};+\infty)$ **C.** $S=(-\infty;1+\sqrt{2}]$ **D.** $S=(-\infty;1-\sqrt{2}]$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện: $x>2$

$\log_2(x^2-x-2)\ge\log_{0,5}(x-1)+1\Leftrightarrow\log_2[(x^2-x-2)(x-1)]\ge 1\Leftrightarrow(x^2-x-2)(x-1)-2\ge 0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\sqrt{2}\le x\le 0\\x\ge 1+\sqrt{2}\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm] Dựa vào điều kiện ta loại A, C, D. **Chọn B.**

Câu 51: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_2\left(2x+1\right)$ là:

A. $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $S=\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3x+1>0\\2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1\vee x>-\frac{1}{2}\\x>-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_2\left(2x+1\right)\Leftrightarrow\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_4\left(2x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1>4x^2+4x+1\Leftrightarrow 2x^2+x<0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<0$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 52: Bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x+1)\ge\log_{\frac{3}{4}}(x+2)$ có tập nghiệm S là

A. $S=\left(-\frac{1}{2};1\right]$. **B.** $S=(-2;1)$. **C.** $S=\left[-\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $S=\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 0<2x+1\le x+2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\le 1$. Tập nghiệm là : $S=\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 53: Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2>\ln(4x-4)$.

A. $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **B.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\ln x^2>\ln\left(4x-4\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4x-4\\4x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 2\\x>1\end{cases}$

Câu 54: Tập nghiệm của bất phương trình $\log\left(x^2+25\right)>\log\left(10x\right)$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **C.** $(0;5)\cup(5;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện : $x>0$

$\log\left(x^2+25\right)>\log\left(10x\right)\Leftrightarrow x^2+25>10x\Leftrightarrow x^2-10x+25>0\Leftrightarrow x\ne 5$

Vậy tập nghiệm là $(0;5)\cup(5;+\infty)$.

Câu 55: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)$

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x>\frac{1}{2}$ (*)

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)\Leftrightarrow x+1>2x-1\Leftrightarrow x-2<0\Leftrightarrow x<2$. Kết hợp (*) $\Rightarrow S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}\left(x^2+x\right)<\log_{0,8}\left(-2x+4\right)$ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-4)\cup(1;2)$. **C.** $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-4;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x>0\\-2x+4>0\end{cases}$

Ta có: $\log_{0,8}\left(x^2+x\right)<\log_{0,8}\left(-2x+4\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4>0\\x^2+x>-2x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x^2+3x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\1<x<2\end{array}\right.$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+1\right)<\log_{\frac{1}{3}}\left(x-1\right)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+1\right)<\log_{\frac{1}{3}}\left(x-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1>x-1\\x-1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x>2\\x>1\end{cases}$

Câu 58: Giải bất phương trình $\log_3(3x-2)\geq 2\log_9(2x-1)$, ta được tập nghiệm là:

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1]$ **D.** $[1;+\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn D. ĐK $x>\frac{2}{3}$ Bpt $\Leftrightarrow\log_3(3x-2)\geq\log_3(2x-1)\Leftrightarrow 3x-2\geq 2x-1\Leftrightarrow x\geq 1$

Câu 59: Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3\left(1-x^2\right)\leq\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có:

$\log_3\left(1-x^2\right)\leq\log_{\frac{1}{3}}(1-x)\Leftrightarrow\log_3\left(1-x^2\right)\leq\log_3\frac{1}{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2>0\\1-x^2\leq\frac{1}{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\\frac{x^3-x^2-x}{1-x}\leq 0\end{cases}$

$\begin{cases}-1<x<1\\x^3-x^2-x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\\left[\begin{array}{l}x\leq\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\0\leq x\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\leq\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\0\leq x<1\end{array}\right.$. Nghiệm nguyên nhỏ nhất là $x=0$.

Câu 60: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\geq\log_{0,5}(x-1)+1$ có tập nghiệm là:

A. $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[1-\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;1+\sqrt{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

TXĐ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1\vee x>2\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

BPT $\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-x-2\right) \ge \log_{0,5}(x-1)+1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-x-2\right) \ge \log_{2^{-1}}(x-1)+1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-x-2\right)+\log_2(x-1)-1 \ge 0 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{\left(x^2-x-2\right)(x-1)}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2-x-2\right)(x-1)}{2} \ge 1 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)(x-1) \ge 2 \Leftrightarrow x\left(x^2-2x-1\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1-\sqrt{2}\,(loai) \\ x \ge 1+\sqrt{2}\,(tm)\end{array}\right. \Rightarrow x \ge 1+\sqrt{2}$

Câu 61: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_2(\log_4 x) \ge \log_4(\log_2 x)$ là:

A. 6. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x>0 \\ \log_4 x>0 \\ +\log_2\left(\log_{2^2} x\right) \ge \log_{2^2}(\log_2 x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ +\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right) \ge \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ +\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right) \ge \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2(\log_2 x)-1 \ge \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x) \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2(\log_2 x) \ge 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2 x \ge 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \ge 8\end{cases} \Rightarrow x \ge 8$

Câu 62: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Điều kiện: $x > -1$ (*)

Khi đó: $\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \log_2(x+7) > \log_2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Kết hợp với (*) ta có nghiệm là $-1<x<2$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x=0 \vee x=1$.

Câu 63: Nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2$ là

A. $x > \dfrac{3}{4}$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $\dfrac{3}{4} < x \le 3$. **D.** $-\dfrac{3}{8} \le x \le 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **Cách 1:** điều kiện $x > \dfrac{3}{4}$

$2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2 \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2-\log_3(2x+3) \le \log_3 9$

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{(4x-3)^2}{2x+3} \le \log_3 9 \Leftrightarrow \dfrac{(4x-3)^2}{2x+3} \le 9 \Leftrightarrow 16x^2-42x-18 \le 0\ (do 2x+3>0) \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{8};3\right]$

So sánh điều kiện chọn đáp án C

Cách 2: Bấm máy tính

+ dựa điều kiện loại A loại D

+ Nhập $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)-2$ bấm CALC gán $x=3$ loại B, gán $x=4$ loại A do đó **Chọn C.**

Câu 64: Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\frac{26}{5}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{28}{15}$. **D.** $S=\frac{11}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>0\\6-5x>0\\3x-2>6-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{3}\\x<\frac{6}{5}\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}$

$\Rightarrow a=1, b=\frac{6}{5}\Rightarrow S=a+b=\frac{11}{5}$.

Câu 65: Bất phương trình $\ln(2x+3)\ge\ln(2017-4x)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 170. **B.** 169. **C.** Vô số. **D.** 168.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\ln(2x+3)\ge\ln(2017-4x)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\ge 2017-4x\\2017-4x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1007}{3}\approx 335,7\\x<\frac{2017}{4}=504,25\end{cases}$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{336;337;...;504\}$. Vậy bất phương trình có 169 nghiệm nguyên dương.

Câu 66: Tìm tập hợp nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2+1)<\log_{\frac{\pi}{4}}(2x+4)$.

A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(3;+\infty)\cup(-2;-1)$. **C.** $S=(-2;-1)$ **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Điều kiện $x>-2$. Do $\frac{\pi}{4}<1$ nên với điều kiện trên ta có

$\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2+1)<\log_{\frac{\pi}{4}}(2x+4)\Leftrightarrow x^2+1>2x+4\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>3\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x>-2$, nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-2;-1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 67: Bất phương trình $\log_2(2^x+1)+\log_2(4^x+1)\le 2$ có tập nghiệm

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;\ 0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;\ 0]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\log_2(2^x+1)+\log_2(4^x+1)\le 2\Leftrightarrow\log_2(2^x+1)(4^x+1)\le 2$

$\Leftrightarrow(2^x+1)(4^x+1)\le 4\Leftrightarrow 2^{3x}+2^{2x}+2^x-3\le 0\Leftrightarrow(2^x-1)(2^{2x}+2.2^x+3)\le 0\Leftrightarrow 2^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0.$

Câu 68: Bất phương trình $\log_{\frac{4}{25}}(x+1)\ge\log_{\frac{2}{5}}x$ tương đương với bất phương trình nào dưới đây

A. $2\log_{\frac{2}{5}}(x+1)\ge\log_{\frac{2}{5}}x$. **B.** $\log_{\frac{4}{25}}x+\log_{\frac{4}{25}}1\ge\log_{\frac{2}{5}}x$.

C. $\log_{\frac{2}{5}}(x+1)\ge 2\log_{\frac{2}{5}}x$. **D.** $\log_{\frac{2}{5}}(x+1)\ge\log_{\frac{4}{25}}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\log_{\frac{4}{25}}(x+1)\ge\log_{\frac{2}{5}}x\Leftrightarrow\log_{\left(\frac{2}{5}\right)^2}(x+1)\ge\log_{\frac{2}{5}}x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{5}}(x+1)\ge\log_{\frac{2}{5}}x\Leftrightarrow\log_{\frac{2}{5}}(x+1)\ge 2\log_{\frac{2}{5}}x$

Câu 69: Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x-3)-\log_2(x^2-2x)\geq 0$ được

A. $2<x\leq 3$. **B.** $\frac{3}{2}<x\leq 3$. **C.** $1\leq x\leq 3$. **D.** $x\geq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x-3)\geq\log_2(x^2-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x>0 \\ 2x-3\geq x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \\ x^2-4x+3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \\ 1\leq x\leq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2<x\leq 3$.

Câu 70: Bất phương trình $3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\leq 3$ có tập nghiệm là

A. $(1;2]$. **B.** $[1;2]$. **C.** $\left[\frac{-1}{2};2\right]$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $x>1$.

Ta có $3\log_3(x-1)+3\log_3(2x-1)\leq 3 \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)]\leq 1 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)\leq 3$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}\leq x\leq 2$. Kết hợp với điều kiện tập nghiệm là $S=(1;2]$.

Câu 71: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$.

A. $S=\left(1;\frac{6}{5}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(\frac{2}{3};\frac{6}{5}\right)$. **D.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. ĐK $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ x<\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<x<\frac{6}{5}$

$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2>6-5x \Leftrightarrow 8x>8 \Leftrightarrow x>1$

Kết hợp ĐK ta có $1<x<\frac{6}{5}$ hay $x\in\left(1;\frac{6}{5}\right)$. Suy ra $S=\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

VẬN DỤNG

Câu 72: Nghiệm của bất phương trình $\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<\log_2(2x+3)$ là

A. $x<-\frac{3}{2}$ **B.** $x>-\frac{3}{2}$ **C.** $-1<x<0$ hoặc $x>0$ **D.** $-\frac{3}{2}<x\leq -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. TXĐ: $D=\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{0\}$.

$\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<\log_{\sqrt{2}}(2x+3) \Leftrightarrow \log_2 x^2-\log_2(x+2)<\log_2(2x+3)$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2<\log_2(2x+3)+\log_2(x+2) \Leftrightarrow \log_2 x^2<\log_2((2x+3).(x+2)) \Leftrightarrow x^2<2x^2+7x+6 \Leftrightarrow x>-1$

So với điều kiện $x\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

Câu 73: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq\log_{\sqrt{2}}(2x+3)$

A. $S=\left(-\frac{3}{2};-1\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$. **C.** $S=[-1;+\infty)$. **D.** $S=\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. TXĐ: $D=\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{0\}$. Ta có:

$\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\ge\log_{\sqrt{2}}(2x+3)\Leftrightarrow\log_2 x^2-\log_2(x+2)\ge\log_2(2x+3)^2\Leftrightarrow x\le-1$.

Kết hợp với điều kiện tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{3}{2};-1\right]$.

Câu 74: Bất phương trình $3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le3$ có tập nghiệm là :

A. $(1;2]$. **B.** $[1;2]$. **C.** $\left[\frac{-1}{2};2\right]$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện $x>1$. $3\log_3(x-1)+3\log_3(2x-1)\le3\Leftrightarrow\log_3[(x-1)(2x-1)]\le1$

$(x-1)(2x-1)\le3\Leftrightarrow2x^2-3x-2\le0\Leftrightarrow\frac{-1}{2}\le x\le2$.

Kết hợp với điều kiệntập nghiệm là $S=(1;2]$

Câu 75: Tìm m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1)\ge\log_5(mx^2+4x+m)$ thoả mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\le0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m\le3$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. BPT thoả mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$. $\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\5(x^2+1)\ge mx^2+4x+m\end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\(5-m)x^2-4x+5-m\ge0\end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\16-4m^2<0\\5-m>0\\16-4(5-m)^2\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.\\m<5\\\left[\begin{array}{l}m\le3\\m\ge7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow2<m\le3.$$

Câu 76: Biết $x=\frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $2\log_a(23x-23)>\log_{\sqrt{a}}(x^2+2x+15)$ $(*)$

Tập nghiệm T của bất phương trình $(*)$ là

A. $T=\left(-\infty;\frac{19}{2}\right)$. **B.** $T=\left(1;\frac{17}{2}\right)$. **C.** $T=(2;8)$. **D.** $T=(2;19)$.

Hướng dẫn giải

$2\log_a(23x-23)>\log_{\sqrt{a}}(x^2+2x+15)\Leftrightarrow\log_a(23x-23)>\log_a(x^2+2x+15)$

Nếu $a>1$ ta có

$$\log_a(23x-23)>\log_a(x^2+2x+15)\Leftrightarrow\begin{cases}23x-23>x^2+2x+15\\x^2+2x+15>0\end{cases}\Leftrightarrow2<x<19$$

Nếu $0<a<1$ ta có

$$\log_a(23x-23)>\log_a(x^2+2x+15)\Leftrightarrow\begin{cases}23x-23<x^2+2x+15\\23x-23>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\x>19\end{array}\right.$$

Mà $x=\frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình.

Chọn D.

Câu 77: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{5}}4$ vô nghiệm?

A. $-4\le m\le 4$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>4\\m<-4\end{array}\right.$. **C.** $m<4$. **D.** $-4<m<4$.

Hướng dẫn giải

$\log_{\frac{1}{5}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{5}}4\Leftrightarrow mx-x^2\ge 4\Leftrightarrow x^2-mx+4\le 0$

$x^2-mx+4\le 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2-mx+4>0\ \forall x\in R\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow -4<m<4$

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1\quad(1)$.

A. $m\in[-12;13]$. **B.** $m\in[12;13]$. **C.** $m\in[-13;12]$. **D.** $m\in[-13;-12]$.

Hướng dẫn giải

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1>\dfrac{x^2+4x+m}{5}\\x^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-x^2-4x=f(x)\\m<4x^2-4x+5=g(x)\end{cases}$$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\underset{2<x<3}{Max}\,f(x)=-12 & \text{khi } x=2\\m\le\underset{2<x<3}{Min}\,f(x)=13 & \text{khi } x=2\end{cases}\Leftrightarrow -12\le m\le 13.$

Câu 79: Tìm m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ thoã mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. BPT thoã mãn với mọi

$$x\in\mathbb{R}.\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m\end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\(5-m)x^2-4x+5-m\ge 0\end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\16-4m^2<0\\5-m>0\\16-4(5-m)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.\\m<5\\\left[\begin{array}{l}m\le 3\\m\ge 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3.$$

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(2;5]$. **B.** $m\in(-2;5]$. **C.** $m\in[2;5)$. **D.** $m\in[-2;5)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow 7x^2+7\ge mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0 & (2)\\mx^2+4x+m>0 & (3)\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$m=7$: (2) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$, $m=0$: (3) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

$$(1)\text{ thỏa }\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\\Delta_2'=4-(7-m)^2\le 0\\m>0\\\Delta_3'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\m\le 5\\m>0\\m>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 5.$$

VẬN DỤNG CAO

Câu 81: Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2+x+3)\le\log_m(3x^2-x)$. Biết rằng $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình.

A. $S=(-2;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

B. $S=(-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};2\right]$.

C. $S=[-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

D. $S=(-1;0)\cup(1;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Do $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình nên $\log_m 6\le\log_m 2\Leftrightarrow 0<m<1$.

Vậy bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases}2x^2+x+3\ge 3x^2-x\\3x^2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\le 0\\3x^2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\\frac{1}{3}<x\le 3\end{array}\right..$$

Câu 82: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng $\forall x$.

A. $m\in(2;3]$.

B. $m\in(-2;3]$.

C. $m\in[2;3)$.

D. $m\in[-2;3)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(5-m)x^2-4x+5-m\ge 0 & (2)\\mx^2+4x+m>0 & (3)\end{cases}(*),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

- $m=0$ hoặc $m=5$: (*) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$
- $m\ne 0$ và $m\ne 5$: (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}5-m>0\\\Delta_2'=4-(5-m)^2\le 0\\m>0\\\Delta_3'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\ 2<m\le 3.$

Câu 83: Số giá trị nguyên của tham số m sao cho bất phương trình: $\log 5+\log\left(x^2+1\right)\ge\log\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. 0.

B. $\forall m\in\mathbb{Z}$ và $m\le 3$.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi: $mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow m>2\quad(1)$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi:

$5x^2+5\ge mx^2+4x+m,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(5-m)x^2-4x+5-m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-m>0\\\Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\-m^2+10m-21\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta được $2<m\le 3, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=3$. Vậy có 1 giá trị m. **Chọn C.**

Câu 84: Cho x,y là số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge\ln\left(x^2+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$

A. $P=6$.

B. $P=2\sqrt{2}+3$.

C. $P=2+3\sqrt{2}$.

D. $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ $\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y$. Ta xét:

Nếu $0<x\le 1$ thì $y\ge xy\ge x^2+y\Leftrightarrow 0\ge x^2$ mâu thuẫn.

Nếu $x>1$ thì $xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y\left(x-1\right)\ge x^2\Leftrightarrow y\ge\dfrac{x^2}{x-1}$. Vậy $P=x+y\ge x+\dfrac{x^2}{x-1}$.

Ta có $f\left(x\right)=x+\dfrac{x^2}{x-1}$ xét trên $\left(1;+\infty\right)$.

Có $f'\left(x\right)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(loai)\\ x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}(nhan)\end{array}\right.$. Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} f\left(x\right)=f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+3$.

Câu 85: Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2\left(a+1\right)+\log_2\left(b+1\right)\ge 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S=a+b$ là

A. $\min S=12$. **B.** $\min S=14$. **C.** $\min S=8$. **D.** $\min S=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $\log_2\left(a+1\right)+\log_2\left(b+1\right)\ge 6\Leftrightarrow \log_2\left(a+1\right)\left(b+1\right)\ge 6\Leftrightarrow\left(a+1\right)\left(b+1\right)\ge 64$

Mà $64\le\left(a+1\right)\left(b+1\right)\le\left(\dfrac{a+b+2}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2+4\left(a+b\right)-252\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b\ge 14\\ a+b\le -18(L)\end{array}\right.$.

Nên $\min S=14$.

Câu 86: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4\left(x+y\right)+\log_4\left(x-y\right)\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2x-y$.

A. $P_{\min}=4$. **B.** $P_{\min}=-4$. **C.** $P_{\min}=2\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Điều kiện: $\begin{cases}x-y>0\\ x+y>0\end{cases}$. Từ điều kiện ta có: $2x>0\Leftrightarrow x>0$

Ta có: $\log_4\left(x+y\right)+\log_4\left(x-y\right)\ge 1\Leftrightarrow\log_4\left(x^2-y^2\right)\ge 1\Leftrightarrow x^2-y^2\ge 4$

Vì $x^2-y^2\ge 4$ và $x>0$ ta có: $x\ge\sqrt{y^2+4}$. $P=2x-y=2\sqrt{y^2+4}-y$

Xét: $f(y)=2\sqrt{y^2+4}-y\Rightarrow f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+4}}-1\Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$+\infty$
y'		0	
y	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên ta có: $P_{\min}=2\sqrt{3}$

Câu 87: Cho hai số thực x, $y>1$ thỏa mãn $\log x+\log y\ge\log\left(x^3+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2x+y$.

A. $2\sqrt{2}-2$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $4+4\sqrt{2}$. **D.** $3+2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log x + \log y \ge \log\left(x^3 + y\right) \Leftrightarrow xy \ge x^3 + y \Leftrightarrow y \ge \dfrac{x^3}{x-1}$

$S = 2x + y \ge 2x + \dfrac{x^3}{x-1}$. Khảo sát hàm số $y = f(x) = 2x + \dfrac{x^3}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ được $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right) = 4 + 4\sqrt{2}$.

Câu 88: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y \ge \log\left(x + y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có: $xy \ge x + y^2 \Leftrightarrow x(y-1) \ge y^2 > 0 \Rightarrow y^2 > 1; x \ge \dfrac{y^2}{y-1}$.

Vì vậy $P \ge f(y) = \dfrac{y^2}{y-1} + 3y \ge \min_{(1;+\infty)} f(y) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9$.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ
NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 89. Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\dfrac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\dfrac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$ là:

A. $x = 7$. **B.** $x = 8$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]** **Điều kiện:** $x > 0$

$$\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - \left(3\log_2 x - 3\right)^2 + 9\left(5 - 2\log_2 x\right) - 4\log_2^2 x < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - 13\log_2^2 x + 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 < \log_2^2 x < 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < \log_2 x < 3 \\ -3 < \log_2 x < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < x < 8 \\ \dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

[Phương pháp trắc nghiệm] Lần lượt thay $x = 7; x = 8; x = 4; x = 1$ thấy $x = 7$ đúng.

Câu 90: Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\dfrac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\dfrac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$ trở thành bất phương trình nào?

A. $t^4 + 13t^2 + 36 < 0$. **B.** $t^4 - 5t^2 + 9 < 0$. **C.** $t^4 - 13t^2 + 36 < 0$. **D.** $t^4 - 13t^2 - 36 < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **[Phương pháp tự luận]** **Điều kiện:** $x > 0$

$$\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - \left(3\log_2 x - 3\right)^2 + 9\left(5 - 2\log_2 x\right) - 4\log_2^2 x < 0 \Leftrightarrow \log_2^4 x - 13\log_2^2 x + 36 < 0$$

Câu 91: Bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$ có tập nghiệm là:

A. $S = \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25}\right)$. **B.** $S = (2;3)$. **C.** $S = \left(0; \frac{1}{25}\right)$. **D.** $S = (0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện: $x > 0$

$\log_{0,2}^2 - 5\log_{0,2} x < -6 \Leftrightarrow 2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} < x < \frac{1}{25}$

[Phương pháp trắc nghiệm] Nhập vào màn hình máy tính $\left(\log_{0,2} X\right)^2 - 5\log_{0,2} X + 6$

Nhấn CALC và cho $X = 2,5$ (thuộc đáp án B và D) máy tính hiển thị 9.170746391. Vậy loại đáp án B và D.

Nhấn CALC và cho $X = \frac{1}{200}$ (thuộc đáp án C) máy tính hiển thị 0,3773110048.

Câu 92: Cho bất phương trình $\frac{1-\log_9 x}{1+\log_3 x} \le \frac{1}{2}$. Nếu đặt $t = \log_3 x$ thì bất phương trình trở thành:

A. $2(1-2t) \le 1+t$. **B.** $\frac{1-2t}{1+t} \le \frac{1}{2}$. **C.** $1 - \frac{1}{2}t \le \frac{1}{2}(1+t)$. **D.** $\frac{2t-1}{1+t} \ge 0$.

Hướng dẫn giải

$$\frac{1-\log_9 x}{1+\log_3 x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\log_3 x}{1+\log_3 x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\log_3 x}{2(1+\log_3 x)} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{2-\log_3 x}{1+\log_3 x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\log_3 x - 1}{1+\log_3 x} \ge 0$$

Câu 93: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$ là:

A. $x = 3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận] Điều kiện: $x > 0; x \ne 1; x \ne 3$

$$\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x.(\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x < 0\\ \log_3 x > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x < 1\\ x > 3\end{array}\right.$$

[Phương pháp trắc nghiệm] Loại B, A vì $x \ne 1; x \ne 3$

Loại C vì $x = 2 \Rightarrow \log_2 3 - \log_{\frac{2}{3}} 3 > 0$ **Chọn D.**

Câu 94: Nếu đặt $t = \log_3 \frac{x-1}{x+1}$ thì bất phương trình $\log_4 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}$ trở thành bất phương trình nào?

A. $\frac{t^2-1}{t} < 0$. **B.** $t^2 - 1 < 0$. **C.** $\frac{t^2-1}{t} > 0$. **D.** $\frac{t^2+1}{t} < 0$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Sau khi đưa về cùng cơ số 4, rồi tiếp tục biến đổi về cùng cơ số 3 ta được bất phương trình $\log_3 \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}} < 0$. **Chọn A.**

Câu 95: Nghiệm của bất phương trình $e^x + e^{-x} < \frac{5}{2}$ là

A. $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$ **B.** $\frac{1}{2} < x < 2$ **C.** $-\ln 2 < x < \ln 2$ **D.** $x < -\ln 2$ hoặc $x > \ln 2$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $e^x + e^{-x} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2 - 5e^x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^x < 2 \Leftrightarrow -\ln 2 < x < \ln 2$.

Câu 96: Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x+\log_2 2x-3>0$

A. $S=\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(2;+\infty)$ **C.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(2;+\infty)$ **D.** $S=(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $x>0$. Với điều kiện trên bất phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x+1+\log_2 x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-2\\ \log_2 x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{4}\\ x>2\end{array}\right..$$

Câu 97: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x(125x).\log_{25}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x$ là:

A. $S=\left(1;\sqrt{5}\right)$. **B.** $S=\left(-1;\sqrt{5}\right)$. **C.** $S=\left(-\sqrt{5};1\right)$. **D.** $S=\left(-\sqrt{5};-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0<x\neq 1$ $(*)$.

Ta có: $\log_x(125x).\log_{25}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow \left(\log_x 5^3+\log_x x\right).\log_{5^2}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x$

$$\Leftrightarrow (3\log_x 5+1).\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_5 x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow 2\log_5^2 x-\log_5 x<0$$

$\Leftrightarrow 0<\log_5 x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5^0<x<5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1<x<\sqrt{5}.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(1;\sqrt{5}\right)$.

VẬN DỤNG

Câu 98: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2+3}-\frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x+1}<0.$

A. $(0;1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ **C.** $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};1\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn C. $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2+3}-\frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x+1}<0$ Đặt $t=\log_2 x$. Bất phương trình trở thành

$$\frac{16t}{2t+3}-\frac{6t}{t+1}<0 \Leftrightarrow \frac{2t(2t-1)}{(2t+3)(t+1)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{-3}{2}<t<-1\\ 0<t<\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}\frac{-3}{2}<\log_2 x<-1\\ 0<\log_2 x<\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}\\ 1<x<\sqrt{2}\end{array}\right..$

Câu 99: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\log_2^2 x}-10x^{\log_2\frac{1}{x}}+3>0$ là:

A. $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $S=(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x>0$ $(*)$. Đặt $u=\log_2 x \Rightarrow x=2^u$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2^{u^2}-10\left(2^u\right)^{-u}+3>0 \Leftrightarrow 2^{u^2}-\dfrac{10}{2^{u^2}}+3>0$ (1)

Đặt $t=2^{u^2}$, $t\ge 1$. $(1)\Rightarrow t^2+3t-10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-5 \ \ (l) \\ t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{u^2}>2 \Leftrightarrow u^2>1 \Leftrightarrow u>1$ hoặc $u<-1$

- Với $u>1 \Rightarrow \log_2 x>1 \Rightarrow x>2$

- Với $u<-1 \Rightarrow \log_2 x<-1 \Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>2$ hoặc $0<x<\dfrac{1}{2}$.

Câu 100: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2^2 x+m\log_2 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x\in(0;+\infty)$.

A. Có 4 giá trị nguyên.
B. Có 5 giá trị nguyên.
C. Có 6 giá trị nguyên.
D. Có 7 giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Đặt $t=\log_2 x$ $(x>0)$

Bất phương trình trở thành: $t^2+mt-m\ge 0, \forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\le 0 \Leftrightarrow m^2+4m\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 0$

Vì m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

VẬN DỤNG CAO

Câu 101: Tập các giá trị của m để bất phương trình $\dfrac{\log_2^2 x}{\sqrt{\log_2^2 x-1}}\ge m$ nghiệm đúng với mọi x>0 là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(-5;2)$. **D.** $[0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Đặt $t=\log_2^2 x$ $(t>1)$. Khi đó ta có: $\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}\ge m(*)$

Bất phương trình ban đầu có nghiệm với mọi x>0 $\Leftrightarrow$ $(*)$ nghiệm đúng với mọi t>1

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}$, $t\in(1;+\infty)$. $f'(t)=\dfrac{t-2}{\left(\sqrt{t-1}\right)^3}$ $f'(t)=0\Rightarrow t=2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(t)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to 1} f(t)=+\infty$

BBT

t	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	||	0	
$f(t)$	|| $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Từ BBT ta có thể kết luận bất phương trình có nghiệm với mọi t>1 $\Rightarrow m\le 1$. **Chọn A.**

Câu 102: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$?

A. $m\ge 6$. **B.** $m>6$. **C.** $m\le 6$. **D.** $m<6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\le \text{m} \Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right]\ge \text{m}$

Đặt $t=\log_2(5^x-1)$ do $x\geq 1\Rightarrow t\in[2;+\infty)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t)\geq m\Leftrightarrow t^2+t\geq m\Leftrightarrow f(t)\geq m$ Với $f(t)=t^2+t$

$f'(t)=2t+1>0$ với $t\in[2;+\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t\in[2;+\infty)$. Nên $Min f(t)=f(2)=6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\geq m$ có nghiệm với mọi $x\geq 1$ thì: $m\leq Min f(t)\Leftrightarrow m\leq 6$

Câu 103: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\log_3 x+\sqrt{\log_3^2 x-1}\right)\left(\sqrt{\log_3 x+1}-\sqrt{\log_3 x-1}\right)>1$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $[3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Tập xác định: $D=[3;+\infty)$

Bất phương trình $\left(\log_3 x+\sqrt{\log_3^2 x-1}\right)\left(\sqrt{\log_3 x+1}-\sqrt{\log_3 x-1}\right)>1$ tương đương:

$$\left(2\log_3 x+2\sqrt{\log_3^2 x-1}\right)\left(\log_3 x+1-\log_3 x+1\right)>2\left(\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 x+2\sqrt{\log_3^2 x-1}>\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}\right)^2>\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}<0(!)\\ \sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}>1\end{array}\right.$$

Với $0<x\leq 1$ ta có: $\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}\leq 1$

Với $x>1$ ta có: $\sqrt{\log_3 x+1}+\sqrt{\log_3 x-1}>1$

So với điều kiện ta nhận nghiệm $[3;+\infty)$. So bốn đáp án, chỉ có đáp án **B** thỏa mãn.

PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 104: Bất phương trình $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\leq 1$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left[\log_3\sqrt{73};2\right]$. **B.** $S=\left(\log_3\sqrt{72};2\right]$. **C.** $S=\left(\log_3\sqrt{73};2\right]$. **D.** $S=(-\infty;2]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]** Điều kiện $x>\log_3\sqrt{73}$

$\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\leq 1\Leftrightarrow\log_3\left(9^x-72\right)\leq x\Leftrightarrow 9^x-3^x-72\leq 0\Leftrightarrow 3^x\leq 9\Leftrightarrow x\leq 2$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $x=\log_3\sqrt{73}$ (thuộc B, C, D) vào biểu thức $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)$ được $\log_x(0)$ không xác định, vậy loại B, C, D.

Câu 105: Điều kiện xác định của phương trình $\log_2\left[3\log_2(3x-1)-1\right]=x$ là:

A. $x>\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$. **B.** $x\geq\dfrac{1}{3}$. **C.** $x>0$. **D.** $x\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. **[Phương pháp tự luận]**

Biểu thức $\log_2\left[3\log_2(3x-1)-1\right]=x$ xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 3\log_2(3x-1)-1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(3x-1)>\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>2^{\frac{1}{3}} \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2^{\frac{1}{3}}+1}{3} \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{2^{\frac{1}{3}}+1}{3}$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $x=\dfrac{1}{3}$ (thuộc B, C, D) vào biểu thức $\log_2(3x-1)$ được $\log_2(0)$ không xác định, vậy loại B, C, D.

Câu 106: Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3\left(4.3^{x-1}\right)>2x-1$ là:

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. **[Phương pháp tự luận]**

$\log_3\left(4.3^{x-1}\right)>2x-1 \Leftrightarrow 4.3^{x-1}>3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x<0 \Leftrightarrow 0<3^x<4 \Leftrightarrow x<\log_3 4$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào màn hình máy tính $\log_3\left(4.3^{X-1}\right)-2X+1$

Nhấn CALC và cho $X=3$ (lớn nhất) máy tính hiển thị -1.738140493. Vậy loại đáp án A.

Nhấn CALC và cho $X=2$ máy tính hiển thị -0.7381404929. Vậy loại B.

Nhấn CALC và cho $X=1$ máy tính hiển thị 0.2618595071.

VẬN DỤNG

Câu 107: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(16^x-4^{x+1}-5\right)\cdot\log_4(4x-1)+\log_{\frac{1}{2}}32<16^{\frac{x+1}{2}}-16^x$ là:

A. $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{16};\log_4 5\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{4};\log_4 5\right)\backslash\left\{\dfrac{5}{16}\right\}$. **D.** $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{16}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Tập xác định: $D=\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Bất phương trình đã cho tương đương:

$\left(16^x-4^{x+1}-5\right)\cdot\log_4(4x-1)+\left(16^x-4^{x+1}-5\right)<0 \Leftrightarrow \left(16^x-4\cdot4^x-5\right)\left(1+\log_4(4x-1)\right)<0.$

Chỉ có 2 trường hợp có thể xảy ra:

TH1:

$$\begin{cases} 16^x-4\cdot4^x-5<0 \\ 1+\log_4(4x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x\in(0;5) \\ \log_4(4x-1)>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x>0 \\ 4^x<5 \\ 4x-1>\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x<\log_4 5 \\ x>\dfrac{5}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{16}<x<\log_4 5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho ở trường hợp 1 là: $T_1=\left(\dfrac{5}{16};\log_4 5\right)$.

TH2: $$\begin{cases} 16^x-4\cdot4^x-5>0 \\ 1+\log_4(4x-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x\in(5;+\infty) \\ \log_4(4x-1)<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x>5 \\ 4x-1<\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_4 5 \\ x<\dfrac{5}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{16}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho ở trường hợp 2 là: $T_2=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{16}\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$T=T_1\cup T_2=\left(\dfrac{5}{16};\log_4 5\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{16}\right)=\left(\dfrac{1}{4};\log_4 5\right)\backslash\left\{\dfrac{5}{16}\right\}$. **Chọn C.**

Câu 108: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x-3\cdot 3^x-4\right)\cdot\log_3(2x-1)+\log_{\frac{1}{3}}81<9^{\frac{x+1}{2}}-9^x$ là:

A. $\left(\dfrac{1}{2};\log_3 4\right)\backslash\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};\log_3 4\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Bất phương trình đã cho tương đương:

$\left(9^x-3\cdot 3^x-4\right)\cdot\log_3(2x-1)+\left(9^x-3\cdot 3^x-4\right)<0\Leftrightarrow\left(9^x-3\cdot 3^x-4\right)\left(1+\log_3(2x-1)\right)<0.$

Chỉ có 2 trường hợp có thể xảy ra:

TH1:

$$\begin{cases}9^x-3\cdot 3^x-4<0\\1+\log_3(2x-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x\in(0;4)\\\log_3(2x-1)>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x>0\\3^x<4\\2x-1>\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\x<\log_3 4\\x>\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<x<\log_3 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho ở trường hợp 1 là: $T_1=\left(\dfrac{2}{3};\log_3 4\right)$.

TH2: $$\begin{cases}9^x-3\cdot 3^x-4>0\\1+\log_3(2x-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x\in(4;+\infty)\\\log_3(2x-1)<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x>4\\2x-1<\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\log_3 4\\x<\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x<\dfrac{2}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho ở trường hợp 2 là: $T_2=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$T=T_1\cup T_2=\left(\dfrac{2}{3};\log_3 4\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{2};\log_3 4\right)\backslash\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. **Chọn A.**

Câu 109: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-2^x-2\right)\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}4<2^x-4^x$ (1)

A. $T=(1;+\infty)$. **B.** $T=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $T=\varnothing$. **D.** $T=\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D=(1;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow\left(4^x-2^x-2\right)\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}<2^x-4^x\Leftrightarrow\left(4^x-2^x-2\right)\log_2(x-1)-2<2^x-4^x$

$\Leftrightarrow\left(4^x-2^x-2\right)\log_2(x-1)+\left(4^x-2^x-2\right)<0\Leftrightarrow\left(4^x-2^x-2\right)\left(1+\log_2(x-1)\right)<0$ (2).

Chỉ có 2 trường hợp có thể xảy ra của bất phương trình (2):

TH1: $\begin{cases}4^x-2^x-2<0\\1+\log_2(x-1)>0\end{cases}$.

Đặt $t=2^x, t>0$, bất phương trình $4^x-2^x-2<0$ trở thành: $t^2-t-2<0\Leftrightarrow t\in(-1;2)$.

Vì $t>0$ nên $t\in(0;2)\Leftrightarrow 2^x\in(0;2)\Leftrightarrow\begin{cases}2^x>0\\2^x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\x<1\end{cases}\Leftrightarrow x<1$.

Vì điều kiện bất phương trình là $x\in(1;+\infty)$ nên trường hợp 1 không xảy ra.

TH2: $\begin{cases}4^x-2^x-2>0\\1+\log_2(x-1)<0\end{cases}$.

Đặt $u=2^x, u>0$, bất phương trình $4^x-2^x-2>0$ trở thành:

$u^2-u-2>0\Leftrightarrow u\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Vì $u>0$ nên $u\in(2;+\infty)\Leftrightarrow 2^x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow 2^x>2\Leftrightarrow x>1$.

$1+\log_2(x-1)<0\Leftrightarrow\log_2(x-1)<-1\Leftrightarrow x-1<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$.

Vậy $\begin{cases}4^x-2^x-2>0\\1+\log_2(x-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}\Rightarrow T=\left(1;\frac{3}{2}\right)$

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

VẬN DỤNG

Câu 110: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-4x+16\right)-\log_2(x)\le-5x^2+40x-74$ là:

A. $(-4;4)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $\{4\}$ **D.** $(-\infty;4)$

Chọn C. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$

Bất phương trình $\log_2\left(x^2-4x+16\right)-\log_2(x)\le-5x^2+40x-74$ tương đương với:

$\log_2\left(\frac{x^2-4x+16}{x}\right)\le-5x^2+40x-78\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{x^2-4x+16}{x}\right)\le 2-5(x-4)^2$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x+\frac{16}{x}-4\right)\le 2-5(x-4)^2(1)$. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có: $\begin{cases}VT(1)\ge 2\\VP(1)\le 2\end{cases}$

Khi đó dấu "=" trong (1) xảy ra $\begin{cases}x^2=16\\x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

So với điều kiện xác định ta nhận nghiệm $x=4$. So bốn đáp án, chỉ có đáp án **C** thỏa mãn.

Câu 111: Cho bất phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}\right)\le-2x+2$. Phát biểu nào sau đây là **sai:**

A. Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $T=(-\infty;-2)\cup(-1;1]$.

B. Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C. Tập xác định của phương trình đã cho là $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

D. Bất phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Chọn B. Bất phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}\right)\le-2x+2$ xác định khi và chỉ khi:

$\begin{cases}x^2+3x+2\ne 0\\\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-1, x\ne-2\\x^2+3x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-1\\x<-2\end{array}\right.$. Tập xác định: $D=(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$

Bất phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}\right)\le-2x+2$ tương đương với:

$\log_2\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}\right)\le -2x+2 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+2x+3\right)-\log_2\left(x^2+3x+2\right)\le 2\left(x^2+2x+3\right)-2\left(x^2+3x+2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+2x+3\right)+2\left(x^2+3x+2\right)\le \log_2\left(x^2+3x+2\right)+2\left(x^2+2x+3\right)$

Xét $f(t)=\log_2 t-2t$ với $t\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-2<-2\ \forall t\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)\Rightarrow f(t)$ nghịch biến $\forall t\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$

Khi đó: $\log_2\left(x^2+2x+3\right)+2\left(x^2+3x+2\right)\le \log_2\left(x^2+3x+2\right)+2\left(x^2+2x+3\right)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3\ge x^2+3x+2 \Leftrightarrow x\le 1$. So với điều kiện ta nhận nghiệm $(-\infty;-2)\cup(-1;1]$

Câu 112: Bất phương trình $\log_2(2^x+1)+\log_3(4^x+2)\le 2$ có tập nghiệm là:

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Xét $x>0\Rightarrow 2^x>2^0=1\Rightarrow 2^x+1>2\Rightarrow \log_2\left(2^x+1\right)>\log_2 2=1(1)$

$x>0\Rightarrow 4^x>4^0=1\Rightarrow 4^x+2>2+1=3\Rightarrow \log_3\left(4^x+2\right)>\log_3 3=1(2)$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được: $\log_2(2^x+1)+\log_3(4^x+2)>2$

Mà BPT: $\log_2(2^x+1)+\log_3(4^x+2)\le 2$ nên $x>0(loai)$

Xét $x\le 0\Rightarrow 2^x\le 2^0=1\Rightarrow 2^x+1\le 2\Rightarrow \log_2\left(2^x+1\right)\le \log_2 2=1(3)$

$x\le 0\Rightarrow 4^x\le 4^0=1\Rightarrow 4^x+2\le 2+1=3\Rightarrow \log_3\left(4^x+2\right)\le \log_3 3=1(4)$

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta được: $\log_2(2^x+1)+\log_3(4^x+2)\le 2(tm)$. Vậy $x\le 0$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 113: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 19.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[6]{a}, t>0$, có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3 \Leftrightarrow f(t)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$$f'(t)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\frac{2}{\ln 2}.\frac{1}{t}=\frac{(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t\ge 1$. Xét $g(t)=(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3$

Ta có $g'(t)=3\ln\dfrac{8}{9}t^2+2\ln\dfrac{4}{9}t=t\left(3\ln\dfrac{8}{9}t+2\ln\dfrac{4}{9}\right)$, $\quad g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2\ln 9/4}{3\ln 8/9}<0$.

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ giảm trên khoảng $[1;+\infty)$.

Suy ra $g(t)\le g(1)=5\ln 2-6\ln 3<0\Rightarrow f'(t)<0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên khoảng $[1;+\infty)$.

Nên $t=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Suy ra $f(t)>0\Leftrightarrow f(t)>f(4)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow \sqrt[6]{a}<4\Leftrightarrow a<4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a=4095$.

Lúc đó $\log_2(2017a)\approx 22{,}97764311$. Nên phần nguyên của $\log_2(2017a)$ bằng 22. **Chọn B.**

CHUYÊN ĐỀ 9. MIN, MAX MŨ – LÔGARIT NHIỀU BIẾN SỐ

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $3^{xy-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y}=2-2xy-2x-4y$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3y$.

A. $6\sqrt{2}-7$. **B.** $\frac{10\sqrt{2}+1}{10}$. **C.** $15\sqrt{2}-20$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Biến đổi giả thiết, ta có:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-xy}-2(1-xy)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y}-2(x+2y)\Leftrightarrow f(1-xy)=f(x+2y)\Leftrightarrow 1-xy=x+2y$.

trong đó $f(t)=\left(\frac{1}{3}\right)^{t}-2t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $y(x+2)=1-x>0\Rightarrow 0<x<1; y=\frac{1-x}{x+2}$.

Và $P=f(x)=2x+3\left(\frac{1-x}{x+2}\right)\geq \min_{(0;1)} f(x)=f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)=6\sqrt{2}-7$.

Câu 2: Cho hai số thực dương x, y thoả mãn $5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=6-2\sqrt{3}$. **B.** $P=4+2\sqrt{6}$. **C.** $P=4-2\sqrt{6}$. **D.** $P=6+2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Theo giả thiết ta có $5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$.

$\Leftrightarrow 5^{x+2y}-3^{-x-2y}+x+2y=5^{xy-1}-3^{1-xy}+xy-1\Leftrightarrow x+2y=xy-1$.

$\Leftrightarrow 1-xy+x+2y=0\Leftrightarrow y(x-2)=x+1>0\Rightarrow x>2, y=\frac{x+1}{x-2}$.

$\Rightarrow P=f(x)=x+\frac{2(x+1)}{x-2}\geq \min_{(2;+\infty)} f(x)=f\left(2+\sqrt{6}\right)=4+2\sqrt{6}$.

Câu 3: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4+3^{x^2-2y+2}=\left(4+9^{x^2-2y}\right)7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+2y$.

A. $-\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $-\frac{33}{8}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ giả thiết ta có: $\frac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}}=\frac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}$

$\Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right)=f\left(2\left(x^2-2y\right)\right) \Leftrightarrow x^2-2y+2=2\left(x^2-2y\right)$.

Trong đó $f(t)=4\left(\frac{1}{7}\right)^{t}+\left(\frac{3}{7}\right)^{t}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $2y = x^2 - 2$ và $S = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$.

Câu 4: Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{136}{3}$ **B.** $\frac{391}{16}$ **C.** $\frac{383}{16}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019} \Leftrightarrow \frac{2017^{1-y}}{2017^x} = \frac{x^2+2018}{(1-y)^2+2018}$

$2017^x\left(x^2+2018\right) = 2017^{1-y}\left[(1-y)^2+2018\right] \Leftrightarrow f(x) = f(1-y)$

Xét hàm số $f(t) = 2017^t\left(t^2+2018\right) = t^2.2017^t + 2018.2017^t$, có

$f'(t) = 2t.2017^t + t^2.2017^t.\ln 2017 + 2018.2017^t.\ln 2017 > 0; \forall t > 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ mà $f(x) = f(1-y) \Rightarrow x+y=1$

Lại có $P = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy = 16x^2y^2+12x^3+12y^3+34xy$

$16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy = 16x^2y^2+12(1-3xy)+34xy = 16x^2y^2-2xy+12$

Mà $1 = x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$ nên đặt $t = xy \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$ khi đó $P = f(t) = 16t^2-2t+12$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2-2y+12$ trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ ta được $\begin{cases} \min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16} \\ \max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} \end{cases}$

Câu 5: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} - y = \frac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3+2y^2-2x^2+8y-x+2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b$.

A. $S = 85$. **B.** $S = 31$. **C.** 75. **D.** 41.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Giả thiết có $-1 \leq x \leq 1$ và có biến đổi $4e^{x-4y+\sqrt{1+x^2}} - 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} = y^2-(x-4y)$

$\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2}+4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} = y^2+\sqrt{1-x^2}+4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow f\left(x-4y+\sqrt{1-x^2}\right) = f\left(y^2+\sqrt{1-x^2}\right) \Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2} = y^2+\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = y^2+4y$

Trong đó $f(t) = t+4e^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $P = x^3-2x^2-x+2+2\left(y^2+4y\right) = f(x) = x^3-2x^2+x+2 \leq \max\limits_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$

Vậy: $S = 58+27 = 85$.

Câu 6: Cho hai số thực dương x, y thoả mãn $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy$.

A. $P=\frac{1}{9}$. **B.** $P=\frac{1}{3}$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo giả thiết ta có $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$

$$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3(3xy) \Leftrightarrow x+y+1=3xy \Rightarrow P=xy=\frac{x+y+1}{3}\geq\frac{2\sqrt{xy}+1}{3}.$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{2\sqrt{P}+1}{3}\Leftrightarrow P\geq 1.$$

Câu 7: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3\frac{2-ab}{a+b}=3ab+a+b-7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+5b$

A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$. **C.** $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$. **D.** $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\log_3\frac{2-ab}{a+b}=3ab+a+b-7 \Leftrightarrow \log_3(2-ab)-\log_3(a+b)=3(ab-2)+(a+b)-1$.

$\Leftrightarrow \log_3[3(2-ab)]+3(ab-2)=\log_3(a+b)+(a+b)\Leftrightarrow 3(2-ab)=a+b\Leftrightarrow b=\frac{6-a}{3a+1}$

Khi đó $S=a+5b=a+\frac{5(6-a)}{3a+1}=\frac{3a^2-4a+30}{3a+1}$. Khảo sát hàm số $\frac{3x^2-4a+30}{3x+1}$ trên $(0;6)$ được $\min\limits_{x\in(0;6)}f(x)=f\left(\frac{\sqrt{95}-1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$.

Câu 8: Các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Điều kiện: $ab<1$.

Ta có $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow \log_2[2(1-ab)]+2(1-ab)=\log_2(a+b)+(a+b)(*)$.

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó,

$(*)\Leftrightarrow f[2(1-ab)]=f(a+b)\Leftrightarrow 2(1-ab)=a+b\Leftrightarrow a(2b+1)=2-b\Leftrightarrow a=\frac{-b+2}{2b+1}$.

Ta có $P=a+2b=\frac{-b+2}{2b+1}+2b=g(b)$.

$g'(b)=\dfrac{-5}{(2b+1)^2}+2=0\Leftrightarrow(2b+1)^2=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2b+1=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}$ (vì $b>0$).

Lập bảng biến thiên ta được $P_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 9: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{9}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$

$\Leftrightarrow\log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)=3(xy-1)+(x+2y)-1$

$\Leftrightarrow\log_3 3(1-xy)-\log_3(x+2y)=3(xy-1)+(x+2y)$

$\Leftrightarrow\log_3 3(1-xy)+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)$

Xét $f(t)=\log_3 t+t$, $(t>0)$ $\quad f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$

Suy ra: $f\big(3(1-xy)\big)=f(x+2y)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\Leftrightarrow x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$

Điều kiện $\dfrac{1-xy}{x+2y}>0\Leftrightarrow\dfrac{5y-2}{6y^2+3}>0\Leftrightarrow y>\dfrac{2}{5}$

$P=x+y=y+\dfrac{3-2y}{1+3y}\qquad P'=1+\dfrac{-11}{(1+3y)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{3}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{11}}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{-1+\sqrt{11}}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	||			0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ||		↘	$\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$	↗	$+\infty$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 10: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tím giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. 6. **B.** $3+2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ điều liện bài toán ta có

$$\log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)+(2x+y+1)=\log_3\big(3(x+y)\big)+3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)=2x+y+1 \Leftrightarrow x+2y=1$$

Khi đó $S=f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}}\ge \min\limits_{(0;1)} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$. **Chọn A.**

Câu 11: Cho hai số thực không âm x,y thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tím giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1}{e}$. **D.** $m=e-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Từ điều kiện bài toán ta có

$$(x+1)^2+\log_2(x+1)=y+\frac{1}{2}\log_2(2y+1) \Leftrightarrow 2(x+1)^2+2\log_2(x+1)=2y+\log_2(2y+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log\left(2(x+1)^2\right)=(2y+1)+\log_2(2y+1) \Leftrightarrow 2(x+1)^2=2y+1.$$

Do đó $P=f(x)=e^{2x-1}+4x^2-\left(2(x+1)^2-1\right)+1\ge \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 12: Cho các số thực x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt[4]{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy-y+4}=x(x+y-3)+y(y-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+5y^2+2xy+39x$.

A. 100. **B.** 125. **C.** 121. **D.** 81.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ giả thuyết ta có

$$\log_{\sqrt[4]{3}}(3x+3y)+3(x+y)=\log_{\sqrt[4]{3}}\left(x^2+y^2+xy-y+4\right)+\left(x^2+y^2+xy-y+4\right)$$

$$\Leftrightarrow f(3x+3y)=f\left(x^2+y^2+xy-y+4\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy-y+4=3(x+y)$$

Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhai ẩn x và ẩn y có $x\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right], y\in\left[1;\dfrac{1}{7}\right]$.

Suy ra $P=3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+5y^2+2\left(3x+3y-4+y-x^2-y^2\right)+39x$

$$=3x^3+18x^2+45x-8-3y^3+3y^2+8y$$

Đặt $f(x)=3x^3+18x^2+45x-3; g(x)=-3y^3+3y^2+8y$

Ta có: $P\le \max\limits_{\left[0;\frac{4}{3}\right]} f(x)+\max\limits_{\left[1;\frac{7}{3}\right]} g(y)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)+g\left(\dfrac{4}{3}\right)=100$.

Dấu "=" đạt tại $x=y=\dfrac{4}{3}$. Thử lại điều kiện thấy thỏa mãn.

Câu 13: Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-4)+y(y-4)+xy$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+1}{x+y+2}$ là $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=221$. **B.** $S=231$. **C.** $S=195$. **D.** $S=196$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Thực hiện tượng tự câu trên ta có $\dfrac{25-\sqrt{170}}{26}\le P\le\dfrac{25+\sqrt{170}}{26}$

Câu 14: Biết $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$

và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x\Leftrightarrow\log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow\log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$. Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) có dạng $f\left((2x-t)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow(2x-1)^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{l}\dfrac{9-\sqrt{5}}{4}(l)\\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4}(tm)\end{array}\right.\Rightarrow a=9;b=5\Rightarrow a+b=9+5=14$

Cách 2: Bấm Casio.

Câu 15: Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\dfrac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$.

A. 7 **B.** $\dfrac{13}{2}$ **C.** $\dfrac{17}{2}$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\dfrac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]\Leftrightarrow3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)^2=\log_2(2-2xy)$

$\Leftrightarrow3^{x^2+2xy+y^2-2+2xy}.\log_2(x-y)^2=\log_2(2-2xy)\Leftrightarrow3^{(x-y)^2}.\log_2(x-y)=3^{2-2xy}.\log_2(2-2xy)$

Xét hàm số $f(t)=3^t.\log_2 t$ trên khoảng $(0;+\infty)$, có $f'(t)=3^t\ln3.\log_2 t+\dfrac{3^t}{t.\ln 2}>0;\forall t>0$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ mà $f\left[(x-y)^2\right]=f(2-2xy)\Rightarrow x^2+y^2=2$

Khi đó $M=2\left(x^3+y^3\right)-3xy=2(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]-3xy$

$\Leftrightarrow 2M=2(x+y)\left[2(x+y)^2-3.2xy\right]-3.2xy$

$2(x+y)\left[2(x+y)^2-3(x+y)^2+6\right]-3(x+y)^2+6$

$=2(x+y)\left[6-(x+y)^2\right]-3(x+y)^2+6=-2a^3-3a^2+12a+6$, với $a=x+y\in(0;4)$

Xét hàm số $f(a)=-2a^3-3a^2+12a+6$ trên $(0;4)$, suy ra $\max\limits_{(0;4)} f(a)=13$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M là $\dfrac{13}{2}$.

Câu 16: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\log_2\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2}=a(a-4)+b(b-4)+c(c-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+2b+3c$.

A. $3\sqrt{10}$. **B.** $12+2\sqrt{42}$. **C.** $12+2\sqrt{35}$. **D.** $6\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ điều kiện ta có:

$\log_2(a+b+c)-\log_2\left(a^2+b^2+c^2+2\right)=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(4(a+b+c)\right)+4(a+b+c)=\log_2\left(a^2+b^2+c^2+2\right)+a^2+b^2+c^2+2$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=10$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$P=(a-2)+2(b-2)+3(c-2)+12$

$\le\sqrt{\left(1^2+2^2+3^2\right)\left((a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right)}+12=12+2\sqrt{35}.$

Dấu “=” đạt tại $\begin{cases}\dfrac{a-2}{1}=\dfrac{b-2}{2}=\dfrac{c-2}{3}\\ a+2b+3c=12+2\sqrt{5}\end{cases}$.

Câu 17: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\log_2\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2}=a(a-4)+b(b-4)+c(c-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+2b+3c}{a+b+c}$.

A. $\dfrac{12+\sqrt{30}}{3}$. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{30}}{3}$. **C.** $\dfrac{8+\sqrt{30}}{3}$. **D.** $\dfrac{6+\sqrt{30}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Từ điều kiện ta có:

$\log_2(a+b+c)-\log_2\left(a^2+b^2+c^2+2\right)=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(4(a+b+c)\right)+4(a+b+c)=\log_2\left(a^2+b^2+c^2+2\right)+a^2+b^2+c^2+2$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=10$.

Và biến đổi: $P(a+b+c)=a+2b+3c\Leftrightarrow (P-1)a+(P-2)b+(P-2)c=0$

$\Leftrightarrow (P-1)(a-2)+(P-2)(b-2)+(P-3)(c-2)=-6P+12$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchuy – Schwarz ta có:

$$(-6P+12)^2 \le \left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2\right)\left((a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (-6P+12)^2 \le 10\left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2\right) \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \le P \le \frac{6+\sqrt{30}}{3}.$$

Câu 18: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+2y+6}$.

A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$. **B.** $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$. **C.** $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$. **D.** $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Từ giả thiết ta có biến đổi:

$$\log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) = x^2+y^2+xy-3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(3(x+y)\right)+3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}-3\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{3y}{2}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

Trong đó $a = x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}$, $b = \frac{2b}{\sqrt{3}}+1$.

Khi đó: $P(x+y+6) = x+2y+3 \Leftrightarrow P\left(a+\frac{b}{\sqrt{3}}+8\right) = a+\frac{2b}{\sqrt{3}}+6$

$$\Leftrightarrow (P-1)a+\frac{1}{\sqrt{3}}(P-3)+8P-6=0$$

Điều kiện để đường tròn và đường thẳng có điểm chung là

$$d(O,d) \le R \Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2+\frac{1}{3}(P-3)^2}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \le P \le \frac{69+\sqrt{249}}{94}.$$

Câu 19: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^3+x+y+\log_2\frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3-2xy+3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+3y$.

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\sqrt{15}-2$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}+3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Từ điều kiện bài toán ta có:

$$(x+y)^3+x+y+\log_2(x+y) = \left(2(1-xy)\right)^3+2(1-xy)+\log_2\left(2(1-xy)\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) = f\left(2(1-xy)\right) \Leftrightarrow x+y = 2(1-xy) \Leftrightarrow y(2x+1) = 2-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 2y;$$

$$y = \frac{2-x}{2x+1}.$$

Trong đó $f(t) = t^3+t+\log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $P = f(x) = x+\frac{3(2-x)}{2x+1} \ge \min\limits_{(0;2)} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right) = \sqrt{15}-2$

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP KHÁC

VẬN DỤNG:

Câu 20: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 100y$.

A. -2499. **B.** -2501. **C.** -2500. **D.** -2490.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ điều kiện bài toán ta có: $\log_2 y + y^2 - 3y = \log_2 \sqrt{1+x} + (1+x) - 3\sqrt{1+x}$ $y = \sqrt{1+x}$.

Khi đó $P = x - 100\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{x+1} - 50\right)^2 - 2501 \ge -2501$. Dấu bằng đạt tại $x = 2499$, $y = 50$.

Câu 21: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

A. $\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Theo giả thiết, ta có

$$\log_2 \frac{2(1-ab)}{a+b} = 2(ab-1) + a + b \Leftrightarrow \log_2\left(2(1-ab)\right) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2(1-ab) = a + b \Leftrightarrow 2 - a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1} > 0 \Rightarrow 0 < a < 2.$$

Do đó $P = f(a) = a + \dfrac{2(2-a)}{2a+1} \ge \min\limits_{(0;2)} f(a) = f\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 22: Cho hai số thực x, y thay đổi thoả mãn $xy = 4, x \ge \dfrac{1}{2}, y \ge 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^2 x + \left(\log_2 y - 1\right)^2$. Tính $S = M + 2m$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = \dfrac{21}{2}$. **D.** $S = \dfrac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $y = \dfrac{4}{x} \ge 1 \Rightarrow x \le 4 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le x \le 4 \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Khi đó $P = \log_2^2 x + \left(\log_2 \dfrac{4}{x} - 1\right)^2 = \log_2^2 x + \left(1 - \log_2 x\right)^2 \Rightarrow f(t) = t^2 + (1-t)^2$.

$M = \max\limits_{[-1;2]} f(t) = f(-1) = f(2) = 5, \mathrm{m} = \min\limits_{[-1;2]} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Do đó $S = 5 + 2.\dfrac{1}{2} = 6$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 23: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\ln\left(x^2 + x\right) - 2^{x+y} = \ln(y + x) - 2^{x^2+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 - 4xy + 8x$.

A. -4. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ điều kiện bài toán ta có $y = x^2$ và $P = f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \ge \min_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(1+\sqrt{3}\right) = -4$.

Câu 24: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40) = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \dfrac{y}{x}$. Tính $a+b$.

A. $a+b = \sqrt{10}$. **B.** $a+b = 2\sqrt{14}$. **C.** $a+b = \dfrac{11}{6}$. **D.** $a+b = \dfrac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40) = 1 \Leftrightarrow 2x^2+xy+3y^2-11x-20y+40 = 0$.

$y = Sx$ và $2x^2 + Sx^2 + 3S^2x^2 - 11x - 20Sx + 40 = 0 \Leftrightarrow \left(4S^2+2\right)x^2 - (20S+11)x + 40 = 0$.

$\Delta_x = (20S+11)^2 - 160\left(4S^2+2\right) \ge 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \le 0$. Do đó $a+b = \dfrac{440}{240} = \dfrac{11}{6}$.

Câu 25: Xét các số thực x, y thỏa $x > 1, y > 1$ và $\dfrac{1}{\log_x 3} + \log_{xy} 81 = 4 - \log_3 y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x^2 + 6y$.

A. $\min F = 27$. **B.** $\min F = 12\sqrt[3]{9}$. **C.** $\min F = 9$. **D.** $\min F = 6\sqrt[3]{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Ta có $\dfrac{1}{\log_x 3} + \log_{xy} 81 = 4 - \log_3 y \Leftrightarrow \log_3 x + \dfrac{1}{\log_{81} xy} = 4 - \log_3 y$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 y + \dfrac{4}{\log_3 x + \log_3 y} - 4 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + \log_3 y)^2 - 4(\log_3 x + \log_3 y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 y = 2 \Leftrightarrow \log_3 xy = 2 \Leftrightarrow xy = 9 \Leftrightarrow y = \dfrac{9}{x}$

Suy ra $F = x^2 + \dfrac{54}{x}$. Ta có $F' = 2x - \dfrac{54}{x^2} = \dfrac{2\left(x^3-27\right)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên

x	1		3		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min F = 27$.

Câu 26: Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}$.

A. $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Để ý y, z đối xứng nên ta sử dụng bất đẳng thức

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{m^2+n^2} \ge \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2}$.

Ta có $P \ge \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log y + \log z)^2 + (2+2)^2}$

$$= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2(yz) + 16} = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 \frac{10}{x} + 16}$$

$$= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(1-\log x)^2 + 16} \ge \sqrt{(1 - \log x + \log x)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{26}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\log x}{1-\log x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \log x=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{10}, y=z=\sqrt[5]{10}$.

Cách 2: điều kiện để mặt phẳng $(P-1)a+(P-2)b+(P-3)c=0$ và mặt cầu $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=10$ có điểm chung là

$$d(I,(\alpha))\le R \Leftrightarrow \frac{|2(P-1)+2(P-2)+2(P-3)|}{\sqrt{(P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2}}\le\sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3}\le P\le\frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Câu 27: Tìm số tự nhiên m lớn nhất để bất đẳng thức $2\log(\sin)+\log\left(\dfrac{1}{x^2}+1-\dfrac{m}{\pi^2}\right)>0$ đúng với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m=5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=6$. **D.** $m=4$.

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\log\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{m}{\pi^2}\right)>\log\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+1-\frac{m}{\pi^2}>\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow m<\pi^2\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{\sin^2 x}\right), \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)(*)$$

Xét hàm số $f(x)=\pi^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$f'(x)=\pi^2\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)<2\pi^2\left(-\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}\right)<0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó $f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Vậy $(*)\Leftrightarrow m\le 4$. **Chọn D.**

Câu 28: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$. **C.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biến đổi giả thiết ta có $4x+4y-4\ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\le 2$.

Đây là một hình tròn (C_1) có tâm $I_1(2;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Và $(x+1)^2+(y-1)^2=m \Rightarrow m\ge 0$ và đây là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1), R_2=\sqrt{m}$.

Ta cần tìm điều kiện của m để $(C_1),(C_2)$ có duy nhất là một điểm chung. Do đó $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau.

Vậy có điều kiện $I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10}=\sqrt{m}+\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

Câu 29: Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$.Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3(x^2+y^2)$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. $T=8$. **B.** $T=141$. **C.** $T=148$. **D.** $T=151$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chú ý với hai căn thức ta có đánh giá sau: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$.

Vậy theo giả thiết,ta có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\geq 2\sqrt{x+y+1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\\x+y+1\geq 4\end{array}\right.$

Và $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\leq 2\sqrt{2(x+y+1)}\Rightarrow x+y+1\leq 8$.

□ Nếu $x+y+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\Rightarrow S=-\dfrac{9476}{243}$.

□ Nếu $t=x+y\in[3;7]$,ta có

$x^2\geq 2x\,(x\geq 2);(y-1)^2\geq 0\Rightarrow y^2\geq 2y-1\Rightarrow x^2+y^2\geq 2(x+y)-1$.

Vì vậy $S\leq 3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-6(x+y)+3$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$ trên đoạn $[3;7]$ ta có:

$f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2-6$.

$f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3+2^{7-t}\ln 2-\left(2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2\right)\ln 2$

$=3^{t-4}\ln^2 3+\left[(t+1)\ln 2-2\right]2^{7-t}\ln 2>0,\forall t\in[3;7]$.

Mặt khác $f'(3)f'(7)<0\Rightarrow f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0\in(3;7)$.

Vậy ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như dưới đây:

t	3		t_0		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	↘	$f(t_0)$	↗	-4

Suy ra $\max S=\max\limits_{[3;7]} f(t)=f(3)=\dfrac{148}{3}$.Dấu bằng đạt tại $x=2;y=1$.

Do đó $T=148+3=151$.

* ***Chú ý:*** Hướng dẫn giải trình bày phía trên thuần tư duy tự luận khi xử lí bất đẳng thức. Để làm nhanh với bài thi trắc nghiệm,kinh nghiệm khi làm các bất đẳng thức có điều kiện biên,cụ thể ở đây $x-2\geq 0;y+3\geq 0$ thì dấu bằng thường đạt được tại biên tức $x-2=0$ hoặc $y+3=0$.

Do đó với $x=2$ thay vào điều kiện có $y+3=2\sqrt{y+3}\Leftrightarrow y=-3;y=1$.

Với $y=-3$ thay vào điều kiện có $x-2=2\sqrt{x-2}\Leftrightarrow x=2;x=6$.

Do vậy ta thử giá trị của S tại các cặp điểm là $(2;-3),(2;1),(6;-3)$ nhận kết quả mà S đạt giá trị lớn nhất.

Câu 30: Cho các số thực $a,b,c>1$ và các số thực dương thay đổi x,y,z thỏa mãn $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{16}{x}+\dfrac{16}{y}-z^2$.

A. 20. **B.** $20-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** 24. **D.** $24-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$a^x = b^y = c^z = (abc)^{\frac{1}{2}} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a t = \dfrac{1}{\log_t a} \\ y = \log_b t = \dfrac{1}{\log_t b} \\ z = \log_c t = \dfrac{1}{\log_t c} \\ \dfrac{1}{2} = \log_{abc} t = \dfrac{1}{\log_t abc} = \dfrac{1}{\log_t a + \log_t b + \log_t c} \end{cases}$$

Do đó: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 - \dfrac{1}{z} \Rightarrow P = f(z) = 32 - \dfrac{16}{z} - z^2 \le f(2) = 20.$

Câu 31: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \dfrac{c}{b} - 2\log_b \dfrac{c}{b} - 1$. Đặt $T = \log_b c - 2\log_a b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T \in (-3;-1)$. **B.** $T \in (-1;2)$. **C.** $T \in (2;5)$. **D.** $T \in (5;10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \dfrac{c}{b} - 2\log_b \dfrac{c}{b} - 1 \Leftrightarrow 6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a c - \log_a b - 2\log_b c + 1$.

$\Leftrightarrow 6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a b \log_b c - \log_a b - 2\log_b c + 1$.

$\Leftrightarrow 6\log_a^2 b = \log_a b(\log_b c - 1) + (\log_b c - 1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{6\log_a^2 b}{(\log_b c - 1)^2} - \dfrac{\log_a b}{(\log_b c - 1)} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6\left(\dfrac{\log_a^2 b}{\log_b c - 1}\right)^2 - \dfrac{\log_a b}{\log_b c - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\log_a b}{\log_b c - 1} = \dfrac{-1}{3} (1) \\ \dfrac{\log_a b}{\log_b c - 1} = \dfrac{1}{2} (2) \end{array}\right.$.

TH1: $(1) \Leftrightarrow 3\log_a b = 1 - \log_b c \Leftrightarrow \log_b c = 1 - 3\log_a b$. Vậy $T = 1 - 5\log_a b$.

Ta có $\log_a b > \log_a a = 1$. $\Rightarrow T < 1 - 5\log_a a = -4$.

TH2: $(2) \Leftrightarrow 2\log_a b = \log_b c - 1 \Leftrightarrow \log_b c = 2\log_a b + 1$. Vậy $T = 1$.

Câu 32: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

A. $T = 27$. **B.** $T = 17$. **C.** $T = 195$. **D.** $T = 207$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo điều kiện đề bài ta có $(x^2 + 2018)2017^x = ((1 - y^2) + 2018)2017^{1-y} \Leftrightarrow x = 1 - y$.

Khi đó $S = (4x^2 + 3(1-x))(4(1-x)^2 + 3x) + 25x(1-x) = 16(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 12$

$g(t) = 16t^2 + 2t + 12 \ge g\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = g\left(-\dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{191}{16}$, trong đó $t = x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \ge -\dfrac{1}{4}$.

Do đó $T = 191 + 16 = 207$.

Câu 33: Cho hai số thực dương x,y thoả mãn $\log_2 x+\log_2\left(x+3y\right)\le 2+2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}}-\dfrac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a}-\dfrac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=30$. **B.** $P=15$. **C.** $P=17$. **D.** $P=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo giả thiết ta có $\log_2\left(x^2+3xy\right)\le\log_2 4y^2.\Leftrightarrow x^2+3xy\le 4y^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+3\left(\dfrac{x}{y}\right)\le 4$

$\Rightarrow 0<t=\dfrac{x}{y}\le 1$. Khi đó $S=f\left(t\right)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}}-\dfrac{2t+3}{t+2},0<t\le 1$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{5-3t}{2\sqrt{\left(t^2-t+2\right)^3}}-\dfrac{1}{\left(t+2\right)^2}\ge\dfrac{2}{2\sqrt{2^3}}-\dfrac{1}{\left(t+2\right)^2}=\dfrac{\left(t+2\right)^2-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\left(t+2\right)^2}>0$.

Dó đó $\max S=\max\limits_{(0;1]} f\left(t\right)=f\left(1\right)=\sqrt{2}-\dfrac{5}{3}\Rightarrow a=2,b=5,c=3\Rightarrow P=10$.

Câu 34: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4\left(a+b+c\right)$.

A. $-3-\log_5 3$. **B.** -4. **C.** $-2-\sqrt{3}$. **D.** $-2-\log_3 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $3^a=5^b=15^{-c}\Leftrightarrow a=b\log_3 5=-c\log_3 15=-c\left(1+\log_3 5\right)\Rightarrow\log_3 5=\dfrac{a}{b}=\dfrac{-c}{b+c}$

$\Rightarrow ab+bc+ac=0$.

$P=a^2+b^2+c^2-4\left(a+b+c\right)=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ac\right)-4\left(a+b+c\right)=\left(\left(a+b+c\right)-2\right)^2-4\ge -4$.

Câu 35: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x+\log y+1\ge\log\left(x+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$.

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{10}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{3+\sqrt{3}}{30}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có

$\log x+\log y+1\ge\log\left(x+y\right)\Leftrightarrow 10xy\ge x+y\Leftrightarrow y\left(10x-1\right)\ge x>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{10}$ và $y\ge\dfrac{x}{10x-1}$.

$S=x+3y\ge x+\dfrac{3x}{10x-1}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x+\dfrac{3x}{10x-1}$ trên $\left(\dfrac{1}{10};+\infty\right)$ được $\min\limits_{x\in\left(\frac{1}{10};+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{10}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$.

Câu 36: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+\log_3\left(x^2+y^2+1\right)=3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left|x-y\right|+\left|x^3-y^3\right|$ là $\dfrac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

A. $T = 25$. **B.** $T = 34$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 41$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Nhận xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1)$ đồng biến và $f(2) = 3$, từ đó

$2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2+y^2+1) = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$

$S = |x-y| + |x^3 - y^3| = |x-y|(1 + x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow S^2 = (x-y)^2(3+xy)^2 = (2-2xy)(3+xy)^2$

Ta Đặt $t = xy$ do $|xy| \le \dfrac{x^2+y^2}{2} = 1$ nên $t \in [-1;1]$. Xét hàm số $g(t) = (2-2t)(3+t)^2$ trên $[-1;1]$ được $\max\limits_{t\in[-1;1]} g(t) = g\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{512}{27}$. Do $S > 0$ nên $S^2 \le \dfrac{512}{27} \Leftrightarrow S \le \dfrac{16\sqrt{6}}{9}$. Vậy $T = 34$.

Câu 37: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{6y}{x} + \ln\left(\dfrac{x+2y}{y}\right)$.

A. $24 + \ln 6$. **B.** $12 + \ln 4$. **C.** $\dfrac{3}{2} + \ln 6$. **D.** $3 + \ln 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $xy \le 4y - 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} \le \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{y^2} = -\left(\dfrac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \le 4$. Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, $0 < t \le 4$.

$S = \dfrac{6y}{x} + \ln\left(\dfrac{x+2y}{y}\right)$ thành $S = \dfrac{6}{t} + \ln(t+2)$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{6}{t} + \ln(t+2)$ trên $(0;4]$ được $\min\limits_{x\in(0;4]} f(t) = f(4) = \dfrac{3}{2} + \ln 6$.

Câu 38: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+1}(2x - 4y) = 1$. Tính $P = \dfrac{x}{y}$ khi biểu thức $S = 4x + 3y - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{8}{5}$. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** $\dfrac{-13}{4}$. **D.** $\dfrac{17}{44}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Ta có $\log_{x^2+y^2+1}(2x-4y) = 1 \Leftrightarrow 2x - 4y = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Mặt khác $S = 4x + 3y - 5 = 4(x-1) + 3(y-2) - 7 \le \sqrt{(4^2+3^2)\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]} - 7 \le 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} \\ 4x + 3y - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$. Do đó $P = \dfrac{-13}{4}$

Câu 39: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{6(2x+y)}{x} + \ln\dfrac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ xy \le 4y - 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{cho } y^2]{\text{chia 2 ve}} \dfrac{x}{y} < -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{4}{y} = -\left(\dfrac{1}{y^2} - 2.2.\dfrac{1}{y} + 4\right) + 4 = -\left(\dfrac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \le 4 \Rightarrow \dfrac{x}{y} \le 4.$$

- Đặt $t=\dfrac{x}{y}\Rightarrow 0<t\le 4\Rightarrow D=(0;4]$
- Biến đổi biểu thức P về dạng:

$P=6\left(2+\dfrac{1}{t}\right)+\ln(t+2)\Rightarrow P'(t)=-\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{21}\notin D\\ x=3+\sqrt{21}\notin D\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, từ đó ta thấy rằng, trong khoảng $(0;4]$ thì hàm *P(t)* nghịch biến

nên $\min P(t)=P(4)=\dfrac{27}{2}+\ln 6\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{27}{2}\\ b=6\end{cases}\Rightarrow a.b=81$. **Chọn B.**

Câu 40: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=(2x^2+y)(2y^2+x)+9xy$.

A. $P_{\max}=\dfrac{27}{2}$. **B.** $P_{\max}=18$. **C.** $P_{\max}=27$. **D.** $P_{\max}=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có $4=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^{x+y}}\Leftrightarrow 4\ge 2^{x+y}\Leftrightarrow x+y\le 2$. Suy ra $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=1$.

Khi đó $P=(2x^2+y)(2y^2+x)+9xy=2(x^3+y^3)+4x^2y^2+10xy$.

$P=2(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+(2xy)^2+10xy$

$\le 4(4-3xy)+4x^2y^2+10xy=16+2x^2y^2+2xy(xy-1)\le 18$. Vậy $P_{\max}=18$ khi $x=y=1$.

Câu 41: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$.

A. $\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$ **B.** $\dfrac{5+\sqrt{87}}{2}$ **C.** $\dfrac{7+\sqrt{87}}{2}$ **D.** $\dfrac{3+\sqrt{87}}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=2^x,b=3^y,c=4^z$ ta có: $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=a+b+c\end{cases}$.

Ta cần tìm $\min P=2a+3b+4c\Rightarrow P-\dfrac{9}{2}=2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)+3\left(b-\dfrac{1}{2}\right)+4\left(c-\dfrac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow\left(P-\dfrac{9}{2}\right)^2\le(2^2+3^2+4^2)\left[\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$

$\Rightarrow\left(P-\dfrac{9}{2}\right)^2\le 29.\dfrac{3}{4}\Rightarrow P_{\max}=\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 42: Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\dfrac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=13$ **B.** $S=42$ **C.** $S=54$ **D.** $S=71$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $2\ge 2x^2\Rightarrow x\le 1$; Tương tự ta có: $0\le x,y,z\le 1$.

Và $2\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)\le 2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$.

Ta có: $x^4+y^4+z^4\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow \ln\left(x^4+y^4+z^4\right)\le \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 0$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=4^t-3t-1$ ta có: $f'\left(t\right)=4^t\ln 4-3; f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\log_4\dfrac{3}{\ln 4}\in\left[0;1\right]$.

Lập bảng biến thiên từ đó suy ra:

$$f\left(t\right)\le \max_{[0;1]}f\left(t\right)=\max\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(\log_4\frac{3}{\ln 4}\right)\right\}=f\left(0\right)=f\left(1\right)=0.$$

Vậy ta có: $4^t\le 3t+1,\forall t\in\left[0;1\right]$. Áp dụng ta có: $4^x+4^y+4^z\le 3\left(x+y+z\right)+3$.

Từ đó suy ra: $P\le 3\left(x+y+z\right)+3-\dfrac{3}{4}\left(x+y+z\right)^4\le\dfrac{21}{4}$. **Chọn C.**

Câu 43: Cho các số thực $a,b,c\in\left[2;3\right]$. Biết giá trị lớn nhất của $S=4^a+4^b+4^c-\dfrac{1}{4}\left(a+b+c\right)^3$ là $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $P=m+2n$.

A. $P=257$ **B.** $P=258$ **C.** $P=17$ **D.** $P=18$

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^x\le 48x-80,\forall x\in\left[2;3\right]$. Dấu bằng đạt tại $x\in\left\{2;3\right\}$.

Do đó $S\le 48\left(a+b+c\right)-240-\dfrac{1}{4}\left(a+b+c\right)^3\le 16$. Dấu bằng đạt tại $\left(a;b;c\right)=\left(3;3;2\right)$ hoặc các hoán vị. **Chọn D.**

Câu 44: Cho ba số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}$.

A. $\dfrac{1}{12}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $1-\log_4 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C. Với $a,b,c\ge 1$ ta có $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1$.

Do đó $abc\ge\left(a+b-1\right)c=ac+bc-c\ge\left(a+c-1\right)+\left(b+c-1\right)-c=a+b+c-2$.

Áp dụng ta có $2^x.4^y.8^z\ge 2^x+4^y+8^z-2=2$. Do đó $x+2y+3z\ge 1\Rightarrow S=\dfrac{x+2y+3z}{6}\ge\dfrac{1}{6}$.

Câu 45: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $4^a-2^{a+1}+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b$.

A. $\dfrac{\pi}{2}-1$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $\pi-1$ **D.** $\dfrac{3\pi}{2}-1$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Biến đổi giả thiết, ta có:

$$\left(2^a\right)^2-2.2^a+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+2=0\Leftrightarrow\left(2^a-1\right)^2+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)\right)^2+1-\sin^2\left(2^a+b-1\right)=0\Leftrightarrow\left(2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)\right)^2+\cos^2\left(2^a+b-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(2^a+b-1\right)=0\\2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^a+b-1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\2^a-1\pm 1=0\end{cases}$$

Do đó $a=1,b=\frac{\pi}{2}-1+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Do $b>0\Rightarrow b\ge\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow S\ge 1+2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-1$.

Câu 46: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\le 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{6(2x+y)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

x,y dương ta có: $xy\le 4y-1\Leftrightarrow xy+1\le 4y\le 4y^2+1\Leftrightarrow 0<\frac{x}{y}\le 4$.

Có $P=12+6\frac{y}{x}+\ln\left(\frac{x}{y}+2\right)$. Đặt $t=\frac{x}{y}$, điều kiện: $0<t\le 4$ thì

$P=f(t)=12+\frac{6}{t}+\ln(t+2)$

$f'(t)=-\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t+2}=\frac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3+\sqrt{21}\\t=3-\sqrt{21}\end{array}\right.$

t 0 4	
$f'(t)$ −	‖
$P=f(t)$	‖ ↘ $\frac{27}{2}+\ln 6$

Từ BBT suy ra $GTNN(P)=\frac{27}{2}+\ln 6$ khi $t=4$ $\Rightarrow a=\frac{27}{2}, b=6\Rightarrow ab=81$.

Câu 47: Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a>0$, $0<b<2$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{(2b)^a}{(2^a-b^a)^2}+\frac{2^a+2b^a}{2b^a}$.

A. $P_{\min}=\frac{9}{4}$. **B.** $P_{\min}=\frac{7}{4}$. **C.** $P_{\min}=\frac{13}{4}$. **D.** $P_{\min}=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $P=\frac{(2b)^a}{(2^a-b^a)^2}+\frac{2^a+2b^a}{2b^a}=\frac{\left(\frac{2}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{2}{b}\right)^a-1\right)^2}+\frac{\left(\frac{2}{b}\right)^a+2}{2}$. Đặt $t=\left(\frac{2}{b}\right)^a,(t>1)$.

Khi đó: $P=g(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{t+2}{2}(t>1)$ $\quad g'(t)=\frac{t^3-3t^2+t-3}{2(t-1)^3},g'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Từ bảng biến thiên ta được $P_{min}=\frac{13}{4}$.

CHUYÊN ĐỀ 10. MỘT SỐ ĐỀ KT MẪU

Đề 102 (Đề gồm 20 câu hỏi với 02 trang)

Câu 1. Cho hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$, trong đó α là hằng số. Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Khi α là số nguyên dương, hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$

B. Khi α là số nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, hàm số trên xác định với mọi $x \neq 0$

C. Khi α là số không nguyên, hàm số trên có tập xác định là tập các số thực dương

D. Khi α là số không nguyên, hàm số trên có tập xác định là tập các số thực không âm

Câu 2. Sự tăng dân số thế giới ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 1998 dân số thế giới khoảng 5926,5 triệu người và tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,32%. Khi đó dự đoán dân số thế giới năm 2008 (10 năm sau) sẽ là

A. 5676,8 triệu người B. 7162,8 triệu người

C. 6762,8 triệu người D. 9062,8 triệu người

Câu 3. Nếu $a > 0$ thì tích $\sqrt[6]{a}.\sqrt[3]{a}$ bằng

A. $\sqrt[9]{a}$ B. $\sqrt{a}$ C. $\sqrt[9]{a^2}$ D. $\sqrt[18]{a}$

Câu 4. Nếu $\log_a b > \log_a c$ thì

A. $b > c > 0$ và $a > 1$ B. $b > c > 0$ và $0 < a < 1$ C. $b > c > 0$ và $a > 0$ D. $c > b > 0$ và $a > 1$

Câu 5. Cho $0 < a \neq 1$, khi đó $a^{3\log_a 2}$ bằng

A. 8 B. 16 C. 6 D. 2

Câu 6. Cho $\mathrm{E} = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)$ và $\mathrm{F} = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)$. Khi đó

A. $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ B. $\mathrm{E} > \mathrm{F}$ C. $\mathrm{E} \geq \mathrm{F}$ D. $\mathrm{E} < \mathrm{F}$

Câu 7. Cho $\mathrm{M} = 3^{2000}$ và $\mathrm{N} = 4^{1500}$. Khi đó

A. $\mathrm{M} = \mathrm{N}$ B. $\mathrm{M} < \mathrm{N}$ C. $\mathrm{M} > \mathrm{N}$ D. $\mathrm{M} \leq \mathrm{N}$

Câu 8. Biết $\log_5 2 = a$; $\log_5 3 = b$. Tính $\log_{30}5$ theo a, b

A. $a + b$ B. $\dfrac{1}{a+b+1}$ C. $a+b+1$ D. $\dfrac{1}{a+b}$

Câu 9. Khi viết 2^{2008} trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số (lấy giá trị gần đúng của log2 là 0,3010)

A. 606 chữ số B. 605 chữ số C. 2008 chữ số D. 2007 chữ số

Câu 10. Với $x \neq 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt[3]{x}} + \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ là

A. $2^{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ B. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{3}{2x}$ C. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}.\ln 2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{3x}$ D. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{3x}$

Câu 11. Hàm số $y = x^2e^x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty\,;-2)$ và $(0\,;+\infty)$ B. $(-\infty\,;-2)$ C. $(0\,;+\infty)$ D. $(-2\,;0)$

Câu 12. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=7ab$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $\log_2\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 a+\log_2 b\right)$ B. $\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$

C. $\log_2\dfrac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$ D. Tất cả đều sai

Câu 13. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) ?

A. 22,59 triệu đồng B. 20,59 triệu đồng C. 21,59 triệu đồng D. 19,19 triệu đồng

Câu 14. Cho $0<a\neq 1$, mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Đồ thị hàm số $y=a^x$ luôn qua A(0 ; 1) B. Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ luôn qua B(1 ; 0)

C. Đồ thị hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

D. Đồ thị hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đều có tiệm cận ngang

Câu 15. Cho $\log_{12}27=a$, biểu diễn $\log_{36}24$ theo a là

A. $\dfrac{9-a}{6-2a}$ B. $\dfrac{9-a}{6+2a}$ C. $\dfrac{9+a}{6+2a}$ D. $\dfrac{9+a}{6-2a}$

Câu 16. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)e^{3x}$ là

A. $(3x^2+2x+3).e^{3x}$ B. $2x.e^{3x}$ C. $3(x^2+1).e^{3x}$ D. $6x.e^{3x}$

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y=\ln\left(\ln|x|\right)$ là

A. $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ B. $(0;+\infty)$ C. $(-\infty\,;\,+\infty)$ D. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2e^x$ trên đoạn [–1 ; 1] là

A. e B. $\dfrac{1}{e}$ C. 0 D. $2e$

Câu 19. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. Với hai số thực *a; b* thỏa mãn $0 < a < b$ và số nguyên *n*, ta có $a^n < b^n$

B. Với số thực *a* khác 0 và hai số nguyên *m; n*, ta có, nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$

C. Với hai số thực *a; b* cùng khác 0 và số nguyên *n*, ta có $(ab)^n = a^nb^n$ và $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

D. Với số thực *a* và các số nguyên *m; n,* ta có $a^m.a^n = a^{mn}$ và $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{\frac{m}{n}}$

Câu 20. Cho hai số dương khác nhau a, b. Rút gọn biểu thức $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}$ bằng

A. $a-b$ B. $a+b$ C. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ D. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.

Nguyễn Quốc Hoàn 0913 661 886

Đề 279 (Đề gồm 20 câu hỏi với 02 trang)

Câu 1. Sự tăng dân số Việt Nam ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2001 dân số nước ta là 78 685 800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người

A. 2016 B. 2017 C. 2014 D. 2015

Câu 2. Nếu $\log_a b > \log_a c$ thì

A. $0 < b < c$ B. $b > c > 0$ và $a > 0$ C. $0 < b < c$ và $0 < a < 1$ D. $c > b > 0$ và $a > 1$

Câu 3. Cho E = $\log_4 5$ và F = $\log_5 4$. Khi đó

A. E = F B. E > F C. E < F D. E ≥ F

Câu 4. Cho $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây đúng

A. ab + 5(a – b) = 1 B. ab = 5(a – b) C. ab – 5(a – b) = 1 D. ab = 5(b – a)

Câu 5. Cho $0 < a \neq 1$, khi đó $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ bằng

A. 16 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 6. Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi) ?

A. 1 năm B. 8 năm C. 15 năm D. 10 năm

Câu 7. Tỉ số $\dfrac{50^{500}}{25^{250}}$ bằng

A. 10^{250} B. 2^{250} C. 10^{500} D. 2^{500}

Câu 8. Cho hai số dương a, b và khác 1, thỏa mãn: đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$ và đồ thị hàm số $y = \log_b x$ nằm ở phía trên trục hoành khi $x > 1$. Khi đó

A. $a > 1$ và $b > 1$ B. $0 < a < 1$ và $b > 1$ C. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$ D. $a > 1$ và $0 < b < 1$

Câu 9. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}$ thứ tự là

A. 3 và 2 B. 3 và $2\sqrt{2}$ C. 4 và $2\sqrt{2}$ D. 4 và 2

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x\ln x$ trên đoạn [1 ; e] thứ tự là

A. $-\dfrac{1}{e}$ và e B. $\dfrac{1}{e}$ và e C. 0 và e D. $-\dfrac{1}{e}$ và 0

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ là

A. $\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ B. $\dfrac{1-\ln(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$ C. $\dfrac{2x}{x^2+1}$ D. $\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\left(1-\ln(x^2+1)\right)$

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \ln(x+1) + \ln(1-x)$ là

A. $(-1 ; 1)$ B. $[-1 ; 1]$ C. $(-\infty ; -1]$ D. $(1 ; +\infty)$

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ là

A. 0 B. 2 C. 1 D. Vô số

Câu 14. Cho $0 < a \neq 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbf{R}_+$

B. Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $\mathbf{R}_+$

C. Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $\mathbf{R}$

D. Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbf{R}$

Câu 15. Cho hàm số $y = x^{\frac{\pi}{6}}$, có đồ thị là (C). Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. (C) luôn qua điểm A(1 ; 1)

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận

C. Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó

D. Hàm số có tập xác định $(0 ; +\infty)$

Câu 16. Cho hàm số $y = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $xy' + 1 = e^y$ B. $xy' + y' = 1$ C. $xy' + 1 = e^x$ D. $xy' - 1 = e^x$

Câu 17. Nếu $\ln(\ln x) = -1$ thì x bằng

A. $\dfrac{1}{e}$ B. e^e C. e D. $e^{\frac{1}{e}}$

Câu 18. Cho các hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}$, $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y = \log_5 x$. Số các hàm số mà đồ thị có tiệm cận ngang là

A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 19. Cho $\log_{12}27 = a$, biểu diễn $\log_{36}24$ theo a là

A. $\dfrac{9-a}{6-2a}$ B. $\dfrac{9+a}{6+2a}$ C. $\dfrac{9-a}{6+2a}$ D. $\dfrac{9+a}{6-2a}$

Câu 20. Dãy số $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $(3,142)^{\pi}$ xếp theo thứ tự tăng dần là

A. $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$

B. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$

C. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $(3,142)^{\pi}$

D. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$.

Đề 389 (Đề gồm 20 câu hỏi với 02 trang)

Câu 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. Với hai số thực *a; b* thỏa mãn $0 < a < b$ và số nguyên *n*, ta có $a^n < b^n$

B. Với số thực *a* khác 0 và hai số nguyên *m; n*, ta có, nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$

C. Với số thực *a* và các số nguyên *m; n,* ta có $a^m.a^n = a^{mn}$ và $\frac{a^m}{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$

D. Với hai số thực *a; b* cùng khác 0 và số nguyên *n*, ta có $(ab)^n = a^n b^n$ và $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Câu 2. Hàm số $y = x^2 e^x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty ; -2)$ và $(0 ; +\infty)$ B. $(-\infty ; -2)$ C. $(-2 ; 0)$ D. $(0 ; +\infty)$

Câu 3. Cho $E = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)$ và $F = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)$. Khi đó

A. E = F B. E < F C. E > F D. E ≥ F

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \ln(\ln|x|)$ là

A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ B. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty ; +\infty)$

Câu 5. Cho $0 < a \neq 1$, mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đều có tiệm cận ngang

B. Đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

C. Đồ thị hàm số $y = a^x$ luôn qua A(0 ; 1) D. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ luôn qua B(1 ; 0)

Câu 6. Cho $0 < a \neq 1$, khi đó $a^{3\log_a 2}$ bằng

A. 16 B. 6 C. 2 D. 8

Câu 7. Nếu $\log_a b > \log_a c$ thì

A. $b > c > 0$ và $0 < a < 1$ B. $b > c > 0$ và $a > 0$ C. $b > c > 0$ và $a > 1$ D. $c > b > 0$ và $a > 1$

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 e^x$ trên đoạn [–1 ; 1] là

A. $\frac{1}{e}$ B. e C. 0 D. $2e$

Câu 9. Cho $M = 3^{2000}$ và $N = 4^{1500}$. Khi đó

A. M = N B. M > N C. M < N D. M ≤ N

Câu 10. Cho $\log_{12}27 = a$, biểu diễn $\log_{36}24$ theo a là

A. $\frac{9-a}{6-2a}$ B. $\frac{9+a}{6+2a}$ C. $\frac{9-a}{6+2a}$ D. $\frac{9+a}{6-2a}$

Câu 11. Nếu $a > 0$ thì tích $\sqrt[6]{a}.\sqrt[3]{a}$ bằng

A. $\sqrt[9]{a}$ B. $\sqrt[9]{a^2}$ C. $\sqrt[18]{a}$ D. $\sqrt{a}$

Câu 12. Với $x \neq 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt[3]{x}} + \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ là

A. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}.\ln 2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{3x}$ B. $2^{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ C. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{3}{2x}$ D. $\dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{3x}$

Câu 13. Khi viết 2^{2008} trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số (lấy giá trị gần đúng của log2 là 0,3010)

A. 606 chữ số B. 2008 chữ số C. 605 chữ số D. 2007 chữ số

Câu 14. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) ?

A. 22,59 triệu đồng B. 20,59 triệu đồng C. 19,19 triệu đồng D. 21,59 triệu đồng

Câu 15. Cho hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$, trong đó α là hằng số. Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Khi α là số không nguyên, hàm số trên có tập xác định là tập các số thực dương

B. Khi α là số không nguyên, hàm số trên có tập xác định là tập các số thực không âm

C. Khi α là số nguyên dương, hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$

D. Khi α là số nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, hàm số trên xác định với mọi $x \neq 0$

Câu 16. Sự tăng dân số thế giới ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 1998 dân số thế giới khoảng 5926,5 triệu người và tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,32%. Khi đó dự đoán dân số thế giới năm 2008 (10 năm sau) sẽ là

A. 6762,8 triệu người B. 7162,8 triệu người

C. 5676,8 triệu người D. 9062,8 triệu người

Câu 17. Cho hai số dương khác nhau a, b. Rút gọn biểu thức $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab}$ bằng

A. $a - b$ B. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$ C. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ D. $a + b$

Câu 18. Biết $\log_5 2 = a; \log_5 3 = b$. Tính $\log_{30}5$ theo a, b

A. $\dfrac{1}{a+b+1}$ B. $a + b$ C. $a+b+1$ D. $\dfrac{1}{a+b}$

Câu 19. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$ B. $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$

C. $\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}\left(\log_2 a + \log_2 b\right)$ D. Tất cả đều sai

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2+1)e^{3x}$ là

A. $2x.e^{3x}$ B. $(3x^2+2x+3).e^{3x}$ C. $3(x^2+1).e^{3x}$ D. $6x.e^{3x}$.

Nguyễn Quốc Hoàn 0913 661 886

Đề 568 (Đề gồm 20 câu hỏi với 02 trang)

Câu 1. Cho các hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$, $y=\dfrac{x^2}{x+1}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_5 x$. Số các hàm số mà đồ thị có tiệm cận ngang là

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\ln(x+1)+\ln(1-x)$ là

A. $[-1\,;\,1]$ B. $(-\infty\,;-1]$ C. $(-1\,;1)$ D. $(1\,;+\infty)$

Câu 3. Cho $0<a\neq 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là **R+**

B. Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là **R**

C. Hàm số $y=\log_a x$ có tập xác định là **R+**

D. Hàm số $y=\log_a x$ có tập xác định là **R**

Câu 4. Nếu $\log_a b>\log_a c$ thì

A. $0<b<c$ và $0<a<1$ B. $0<b<c$ C. $b>c>0$ và $a>0$ D. $c>b>0$ và $a>1$

Câu 5. Cho hàm số $y=\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $xy'+1=e^y$ B. $xy'+y'=1$ C. $xy'+1=e^x$ D. $xy'-1=e^x$

Câu 6. Cho E = $\log_4 5$ và F = $\log_5 4$. Khi đó

A. E = F B. E < F C. E ≥ F D. E > F

Câu 7. Cho hàm số $y=x^{\frac{\pi}{6}}$, có đồ thị là (C). Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. (C) luôn qua điểm A(1 ; 1)

B. Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó

C. Đồ thị (C) không có tiệm cận

D. Hàm số có tập xác định $(0\,;+\infty)$

Câu 8. Cho $\log_{12}18=a$, $\log_{24}54=b$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây đúng

A. ab = 5(a – b) B. ab + 5(a – b) = 1 C. ab – 5(a – b) = 1 D. ab = 5(b – a)

Câu 9. Cho hai số dương a, b và khác 1, thỏa mãn: đồ thị hàm số $y=a^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$ nằm ở phía trên trục hoành khi $x>1$. Khi đó

A. $a>1$ và $b>1$ B. $0<a<1$ và $b>1$ C. $0<a<1$ và $0<b<1$ D. $a>1$ và $0<b<1$

Câu 10. Cho $0<a\neq 1$, khi đó $a^{\log_{\sqrt{a}}4}$ bằng

A. 4 B. 2 C. 16 D. 1

Câu 11. Tỉ số $\dfrac{50^{500}}{25^{250}}$ bằng

A. 10^{250} B. 2^{250} C. 2^{500} D. 10^{500}

Câu 12. Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi) ?

A. 10 năm B. 1 năm C. 8 năm D. 15 năm

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ là

A. 0 B. 2 C. 1 D. Vô số

Câu 14. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}$ thứ tự là

A. 3 và 2 B. 4 và $2\sqrt{2}$ C. 4 và 2 D. 3 và $2\sqrt{2}$

Câu 15. Cho $\log_{12}27 = a$, biểu diễn $\log_{36}24$ theo a là

A. $\dfrac{9-a}{6-2a}$ B. $\dfrac{9-a}{6+2a}$ C. $\dfrac{9+a}{6+2a}$ D. $\dfrac{9+a}{6-2a}$

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x\ln x$ trên đoạn $[1\,;\,e]$ thứ tự là

A. 0 và e B. $-\dfrac{1}{e}$ và e C. $\dfrac{1}{e}$ và e D. $-\dfrac{1}{e}$ và 0

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ là

A. $\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ B. $\dfrac{1-\ln(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$ C. $\dfrac{2x}{x^2+1}$ D. $\dfrac{2x}{x^2+1}\left(1-\ln(x^2+1)\right)$

Câu 18. Dãy số $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $(3,142)^{\pi}$ xếp theo thứ tự tăng dần là

A. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$

B. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $(3,142)^{\pi}$

C. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$

D. $(3,14)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-\pi}$; $(3,142)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\pi}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-\pi}$

Câu 19. Sự tăng dân số Việt Nam ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2001 dân số nước ta là 78 685 800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người

A. 2017 B. 2016 C. 2015 D. 2014

Câu 20. Nếu $\ln(\ln x) = -1$ thì x bằng

A. $\dfrac{1}{e}$ B. $e^{\frac{1}{e}}$ C. e^{e} D. e.

Đề 789 (Đề gồm 50 câu hỏi với 04 trang)

Câu 1. Số nghiệm thực của phương trình $8^x.3^{1+x^2}=3^{2x+1}$ là

A. 1 **B.** 2 C. 3 D. 4

Câu 2. Tổng các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3(3x)-1=0$ là:

A. 36. B. 30. **C.** 84. D. 90.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$ ta được:

A. x^2+1 B. x^2-x+1 C. x^2-1 **D.** x^2+x+1

Câu 4. Nếu $f(x)=\dfrac{4^x}{\ln 4}$ thì $f'(x+2)+2f'(x-1)$ là:

A. $\dfrac{33}{2}f(x)\ln 4$ B. $16f(x)\ln 4$ C. $\dfrac{65}{4}f(x)\ln 4$ D. $24f(x)\ln 4$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log(x^2-2mx+m)$ xác định với mọi $x\in\mathbf{R}$

A. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. C. $[0;1]$. D. $[1;+\infty)$.

Câu 6. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\ln(4x-x^2)$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó M + 2N bằng:

A. $2\ln 6$. B. $2\ln 18$. C. $2\ln 5$. D. 2ln12.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $2\log_9^2 x=\log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$ là:

A. x = 1 B. x = 4 C. x = 0, x =1 **D.** x = 1, x = 4

Câu 8. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y=\ln(2x^2+e^2)$ trên [0;e]. Khi đó tổng $a+b$ là:

A. 1+ln3 B. 2+ln3 C. 3+ln3 **D.** 4+ln3

Câu 9. Phương trình: $4^x-2(m-1)2^x+2m-4=0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$ khi:

A. $m=6$ B. $m=\dfrac{5}{2}$ C. $m=\dfrac{7}{3}$ D. $m=\dfrac{7}{2}$

Câu 10. Cho các số thực a, b, α với $a>b>0$, $\alpha\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $(a+b)^\alpha=a^\alpha+b^\alpha$ B. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha=\dfrac{a^\alpha}{b^{-\alpha}}$ C. $(a-b)^\alpha=a^\alpha-b^\alpha$ D. $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$

Câu 11. Rút gọn $A=\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}}.5^{1+\sqrt{7}}}$

A. 5 B. $5^{\sqrt{7}}$ C. 10 D. $10^{\sqrt{7}}$

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{11^x+4^x}{8^x}$. Giá trị của $y'(0)$ là

A. $\ln\dfrac{11}{4}$ B. 2 C. $\ln\dfrac{11}{16}$ D. 8

Câu 13. Số nào dưới đây là nghiệm của phương trình $3x^{\frac{2}{3}}-10\log(x+2)=(4x)^{\frac{1}{5}}$

A. -1 B. 0 C. 6 D. 8

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $6.9^x-13.6^x+6.4^x=0$ là

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $(1,5)^{5x-7}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$ là

A. $(-1\,;1)$ B. $(1\,;+\infty)$ C. $(-\infty\,;1)$ D. $(-\infty\,;0)$

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = (44-7x-x^2)^{\sqrt{5}}$ là

A. $\mathbf{R} \setminus \{-11\,;\,4\}$ B. $(-\infty\,;-11) \cup (4\,;+\infty)$ C. $[-11\,;\,4]$ D. $(-11\,;\,4)$

Câu 17. Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau *t* tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20.\ln(t+1)$, $t \geq 0$ ($M(t)$ đơn vị %). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới *10%*

A. Khoảng 23 tháng *B*. Khoảng 24 tháng ***C***. Khoảng 25 tháng *D*. Khoảng 26 tháng

Câu 18. Hàm số $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2+x-2}\right)$ có tập xác định là

A. $(-\infty\,;\,2)$ B. $(-\infty\,;-2] \cup [1;\,2)$ C. $(-2\,;\,1)$ D. $[1\,;\,2)$

Câu 19. Số nguyên dương lớn nhất của m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm là

A. 2 B. 4 C. 9 D. 10

Câu 20. Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

Câu 21. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log\left(2x^2\right)$

A. $y' = \dfrac{2\ln 10}{x}$ B. $y' = \dfrac{2}{x\ln 10}$ C. $y' = \dfrac{1}{2x^2.\ln 10}$ D. $\dfrac{\ln 10}{2x^2}$

Câu 22. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+1} = 1$ là

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 23. Cho x = 2017! , khi đó $A = \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_4 x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{2017} x}$ có giá trị bằng

A. log2017 B. 2017! C. 1 D. không tính được

Câu 24. Cho $\begin{cases} a = \log_2 m \\ A = \log_m(8m) \end{cases}$ với $0 < m \neq 1$. Khi đó mối quan hệ giữa *A* và *a* là

A. $A = \dfrac{3+a}{a}$ B. $A = (3+a)a$ C. $A = \dfrac{3-a}{a}$ D. $A = (3-a)a$

Câu 25. Cho $A = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{6} + \log_4 81 - \log_2 27 + 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$. Chọn mệnh đề đúng

A. $\log_A 626 = 2$ B. $616^{\log_A 9} = 3$ C. $A = 313$ D. $\log_2 A = 1 + \log_2 313$

Câu 26. Cho các phát biểu sau:

(i) Hàm số $y = \sqrt{x}$ đồng nhất với hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$ (ii) Nếu $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p < \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-q}$ thì $p < q$

(iii) Hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ đồng nhất với hàm số $y = x^{\frac{1}{3}}$ (iv) Với *n* là số nguyên dương thì $\sqrt[n]{a^n} = a$

Tổng số phát biểu **sai** trong các phát biểu trên là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 27. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x\right)$ là

A. $(0;2)$ B. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ C. $[0;2]$ D. $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x-18.2^x+1<0$ là tập con của tập

A. $(1;4)$ B. $(-4;\,0)$ C. $(-3;1)$ D. $(-5;-2)$

Câu 29. Tìm m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có đúng ba nghiệm

A. $2<m<3$ B. $m>3$ C. $m=2$ D. $m=3$

Câu 30. Tìm đạo hàm của hàm số $y=3^{1-x}$

A. $y'=3^{1-x}$ B. $y'=3^{1-x}.\ln 3$ C. $y'=-3^{1-x}.\ln 3$ D. $y'=3^{x-1}.\ln 3$

Câu 31. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log(10-x)<e^{\ln 2}$

A. $S=(-90\,;\,+\infty)$ B. $S=(-\infty\,;\,10)$ C. $S=(-2\,;\,10)$ D. $S=(-90\,;\,10)$

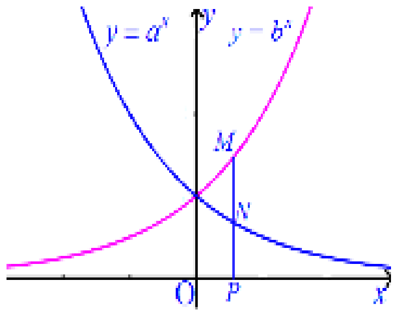
Câu 32. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{5\sqrt{2}-7}\left[(5\sqrt{2}-7)^{2016}(5\sqrt{2}+7)^{2017}\right]$

A. $P=-1$ B. $P=5\sqrt{2}+7$ C. $P=5\sqrt{2}-7$ D. $P=1$

Câu 33. Cho a là số thực bất kỳ, $a\neq\pm1$ và $P=\log_{a^2}\sqrt{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $P=\dfrac{1}{2}\log_a\sqrt{3}$ B. $P=2\log_a\sqrt{3}$ C. $P=\dfrac{1}{2}\log_{|a|}\sqrt{3}$ D. $P=2\log_{|a|}\sqrt{3}$

Câu 34. Cho các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ có đồ thị như hình vẽ bên, với $0<a,b\neq1$. Đường thẳng $x=2$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ lần lượt tại các điểm P, N, M. Biết rằng N là trung điểm của MP, mệnh đề nào dưới đây đúng



A. $b=a\sqrt{2}$ B. $a=b\sqrt{2}$

C. $b=-a$ D. $b=\dfrac{1}{a}$

Câu 35. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2\left(x-1\right)+\log_2\left(x-1\right)=2$

A. $S=\left\{\dfrac{5}{4}\,;\,3\right\}$ B. $S=\left\{\dfrac{3}{2}\,;\,3\right\}$ C. $S=\left\{\dfrac{3}{2}\,;\,3\,;\,9\right\}$ D. $S=\left\{\dfrac{5}{4}\,;\,3\,;\,9\right\}$

Câu 36. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a\neq1$, $a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{2}$. Tính $P=\log_{\frac{a}{\sqrt{b}}}\dfrac{b^2}{a}$

A. $P=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$ B. $P=\dfrac{5-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ C. $P=3\sqrt{2}-2$ D. $P=3\sqrt{2}+2$

Câu 37. Hỏi phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{7}{5}=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{e^{-x}}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $2y' + xy'' = -e^{-x}$ B. $2y' + xy'' = e^{-x}$ C. $y' + y'' = e^{-x}$ D. $y' + y'' = -e^{-x}$

Câu 39. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-6\,;6]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(2-x)$ có nghiệm duy nhất

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt

A. $m > 0$. **B.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$. **C.** $m \geq 2$. **D.** Không tồn tại m

Câu 41. Cho phương trình $4\log_9{}^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $1 < m < 2$. **B.** $3 < m < 4$. **C.** $0 < m < \frac{3}{2}$. **D.** $2 < m < 3$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt

A. $-1 < m \neq 0$. **B.** $m > -1$. **C.** Không tồn tại m . **D.** $-1 < m < 0$.

Câu 43. Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu ?

A. $-4 < m < -1$. B. Không tồn tại m . C. $-1 < m < \frac{3}{2}$. D. $-1 < m < -\frac{5}{6}$.

Câu 44. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3} + 1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng ?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 45. Phương trình $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4.3^x - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 46. Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4 .

Câu 47. Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, chọn phát biểu đúng

A. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$ **B.** $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$ **C.** $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. **D.** $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2+1) > \log_5(x^2+4x+m) - 1 \quad (1)$.

A. $m \in [-12;13]$ **B.** $m \in [12;13]$ **C.** $m \in [-13;12]$ **D.** $m \in [-13;-12]$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2+7) \geq \log_2(mx^2+4x+m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (2;5]$. **B.** $m \in (-2;5]$. **C.** $m \in [2;5)$. **D.** $m \in [-2;5)$.

Câu 50. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$

A. $P = 6$ **B.** $P = 2\sqrt{2} + 3$ **C.** $P = 2 + 3\sqrt{2}$ **D.** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.