

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 30 tháng 9 năm 2023

Thời gian làm bài: 180 phút

**Câu I** (4,0 điểm)

Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3(2m-1)x^2 - 12mx$  có đồ thị  $(C_m)$ , với  $m$  là tham số thực.

1) Khi  $m = 1$ , viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến cắt các trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm phân biệt  $M$  và  $N$  sao cho  $ON = 24OM$ .

2) Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $(C_m)$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành.

**Câu II** (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + x} = y(\sqrt{y^2 + 1} + y) \\ \sqrt{2x^2 - 3y^2 + 7} + x = 2\sqrt{3x - 5} + 3 \end{cases}, \text{ với } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu III** (3,0 điểm)

Xét tập hợp  $S$  gồm tất cả các bộ số  $(x; y; z)$  với  $x, y, z$  là các số nguyên dương không lớn hơn 30.

1) Hỏi có bao nhiêu bộ số  $(x; y; z)$  thuộc tập hợp  $S$  thỏa mãn  $x + y + z = 5$ ?

2) Lấy ngẫu nhiên một bộ số  $(a; b; c)$  từ tập hợp  $S$ . Tính xác suất để lấy được bộ số thỏa mãn  $a + b + c < 30$ .

**Câu IV** (4,0 điểm)

Cho hình chóp  $S.ABC$  có cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , biết  $SA = 3$  và tam giác  $SBC$  là tam giác đều có cạnh bằng 4.

1) Tính số đo của góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

2) Cho điểm  $I$  xác định bởi  $2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 4\overline{IC} = \vec{0}$ . Xét mặt phẳng  $(\alpha)$  thay đổi đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $SI$  và cắt các tia  $SA, SB, SC$  lần lượt tại các điểm  $M, N, P$  (với  $M, N, P$  không trùng với  $S$ ).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = \frac{4}{SM^2} + \frac{9}{SN^2} + \frac{16}{SP^2}$ .

**Câu V** (4,0 điểm)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = \frac{6u_n}{\sqrt{11u_n + 9} + 3}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1) Chứng minh dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm.

2) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Câu VI** (2,0 điểm)

Xét  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b = 3(1 - c)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = abc(a^2 + b^2 + 9c^2)$ .

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: .....

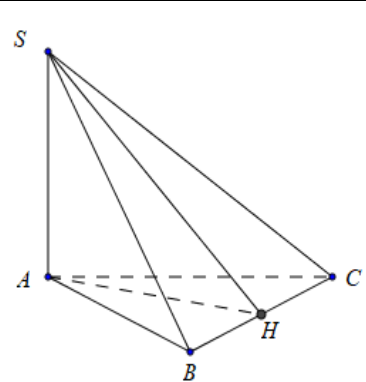
Số báo danh: .....

Họ tên, chữ kí cán bộ coi thi thứ nhất:

Họ tên, chữ kí cán bộ coi thi thứ hai:

HƯỚNG DẪN CHẤM

| Câu   | Hướng dẫn chấm   | Điểm       |
|---|--|------------|
| <b>I</b><br>(4 điểm)  | <b>Cho hàm số</b> $y = 2x^3 - 3(2m-1)x^2 - 12mx$ <b>có đồ thị</b> $(C_m)$ , <b>với</b> $m$ <b>là tham số thực...</b>   | <b>4,0</b> |
|   | 1) Với $m = 1$ , ta có $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ . Tập xác định $\mathbb{R}$ . Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ .  | 0,25       |
|   | Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm. Do hai điểm $M, N$ phân biệt, xét $\triangle OMN$ , ta được   | 0,5        |
|   | $f'(x_0) = \frac{ON}{OM} = 24 \text{ hoặc } f'(x_0) = -\frac{ON}{OM} = -24.$   | 0,25       |
|   | TH1: $f'(x_0) = 24 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = 24 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{cases}$  | 0,5        |
|   | +) Với $x_0 = 3$ , suy ra $y_0 = -9$ , ta có PTTT: $y = 24x - 81$ .  | 0,5        |
|   | +) Với $x_0 = -2$ , suy ra $y_0 = -4$ , ta có PTTT: $y = 24x + 44$ .   | 0,5        |
|   | TH2: $f'(x_0) = -24 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = -24 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 2 = 0$ (phương trình vô nghiệm).  | 0,5        |
|   | KL: Hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 24x - 81$ và $y = 24x + 44$ .   | 0,5        |
|   | 2) Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m-1)x - 12m$ , suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2m \end{cases}$  | 0,5        |
| Để hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq -\frac{1}{2}$ .   | 0,5  |            |
| +) Với $x = -1$ , ta có $y = 6m + 1$ .  | 0,5  |            |
| +) Với $x = 2m$ , ta có $y = -8m^3 - 12m^2$ .   | 0,5  |            |
| Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành thì  | 0,5  |            |
| $y_{\text{CĐ.VCT}} < 0 \Leftrightarrow -(8m^3 + 12m^2)(6m + 1) < 0 \Leftrightarrow 4m^2(2m + 3)(6m + 1) > 0$ (*)                                      | 0,5  |            |
| KL: Tập các giá trị của tham số $m$ thỏa mãn đề bài là $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ . | 0,5  |            |
| <b>II</b><br>(3 điểm)   | <b>Giải hệ phương trình</b> $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + x} = y(\sqrt{y^2 + 1} + y) & (1) \\ \sqrt{2x^2 - 3y^2 + 7} + x = 2\sqrt{3x - 5} + 3 & (2) \end{cases}$  | <b>3,0</b> |
|   | Điều kiện $\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ y^2 + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 3y^2 + 7 \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 7 \geq 0 \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$ | 0,25       |
|   | Từ phương trình (1), do VT(1) dương nên $y > 0$ .  | 0,5        |
|   | PT(1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + x} = y(\sqrt{y^2 + 1} + y) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + x} = y^2 + \sqrt{y^4 + y^2}$ .   | 0,5        |
|   | Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + t}, t > 0$ . Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}} > 0, \forall t > 0$ .  | 0,5        |
| Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .  |  |            |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
|   | Ta được $y^2 = x$ , phương trình (2) trở thành $\sqrt{2x^2 - 3x + 7} + x = 2\sqrt{3x - 5} + 3$  | 0,25  |  |
|   | $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 7} - (x + 1)\right) + 2(x - 1 - \sqrt{3x - 5}) = 0$  |   |  |
|   | $\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left( \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 7} + x + 1} + \frac{2}{x - 1 + \sqrt{3x - 5}} \right) = 0.$   | 0,5   |  |
|   | TH1: $x^2 - 5x + 6 = 0$ nên $x = 2; x = 3.$   |   |  |
|   | TH2 : Đánh giá được từ $x \geq \frac{5}{3}$ nên $\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 7} + x + 1} + \frac{2}{x - 1 + \sqrt{3x - 5}} > 0.$   | 0,5   |  |
|   | KL: Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; \sqrt{2})$ và $(x; y) = (3; \sqrt{3}).$   | 0,5   |  |
| <b>III</b><br>(3 điểm)  | <b>Xét tập hợp <math>S</math> gồm tất cả các bộ số <math>(x; y; z)</math> với <math>x, y, z</math> là các số nguyên dương...</b>  | <b>3,0</b>  |  |
|   | 1) Có 6 bộ số thỏa mãn đề bài là $(1; 2; 2); (2; 1; 2); (2; 2; 1)$<br>và $(1; 1; 3); (1; 3; 1); (3; 1; 1).$   | 0,75  |  |
|   | 2) Không gian mẫu có số phần tử là $30^3 = 27000.$  | 0,5   |  |
|   | Do $a + b + c < 30$ nên tồn tại $d \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a + b + c + d = 30.$<br>Suy ra số bộ $(a; b; c)$ thỏa mãn đề bài là $C_{29}^3.$   | 0,5   |  |
|   | Xác suất cần tìm bằng $\frac{C_{29}^3}{27000}.$   | 0,5   |  |
|   |   |   |  |
| <b>IV</b><br>(4 điểm)   | <b>Cho hình chóp <math>S.ABC</math> có cạnh bên <math>SA</math> vuông góc với mặt phẳng <math>(ABC)</math> và <math>SA = 3...</math></b>  | <b>4,0</b>  |  |
|   | 1) Gọi $H$ là trung điểm $BC$ , ta có $SH \perp BC, AH \perp BC.$   | 0,5   |  |
|   | Suy ra góc giữa $(SBC)$ và $(ABC)$ là $\widehat{SHA}.$  | 0,5   |  |
|   | Vì $\Delta SBC$ đều, có cạnh bằng 4 nên $SH = 2\sqrt{3}.$<br>Ta có $\sin \widehat{SHA} = \frac{SA}{SH} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SHA} = 60^\circ.$<br>Vậy $\left(\widehat{(SBC), (ABC)}\right) = 60^\circ.$                     | 0,5   |  |
|   |   |  |  |
|   | 2) Đặt $\frac{2}{SM} = x, \frac{3}{SN} = y, \frac{4}{SP} = z$ với $x, y, z > 0.$ Gọi $O$ là trung điểm của đoạn thẳng $SI.$   |   |  |
|   | Ta có $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 18\vec{SO} = 2\vec{SA} + 3\vec{SB} + 4\vec{SC} = 2\frac{SA}{SM}\vec{SM} + 3\frac{SB}{SN}\vec{SN} + 4\frac{SC}{SP}\vec{SP}$<br>$\Leftrightarrow 18\vec{SO} = 3x\vec{SM} + 4y\vec{SN} + 4z\vec{SP}.$ | 0,5   |  |
|   | Vì bốn điểm $M, N, P, O$ đồng phẳng và các vector $\vec{SM}, \vec{SN}, \vec{SP}$ không đồng phẳng nên $3x + 4y + 4z = 18.$  |   |  |
| Khi đó $T = \frac{4}{SM^2} + \frac{9}{SN^2} + \frac{16}{SP^2} = x^2 + y^2 + z^2.$                     | 0,5   |   |  |
| Do $T = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(3^2 + 4^2 + 4^2)}{3^2 + 4^2 + 4^2} \geq \frac{(3x + 4y + 4z)^2}{41}.$ | 0,5   |   |  |
| Suy ra $T = \frac{4}{SM^2} + \frac{9}{SN^2} + \frac{16}{SP^2} \geq \frac{324}{41}.$                   | 0,5   |   |  |
| Vậy GTNN của $T$ bằng $\frac{324}{41}$ khi $x = \frac{54}{41}, y = \frac{72}{41}, z = \frac{72}{41}.$ | 0,5   |   |  |

|   |   |      |
|---|---|------|
|   | Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{6u_n}{\sqrt{11u_n + 9} + 3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ...   | 4,0  |
| V<br>(4 điểm)   | 1) Chứng minh dãy số $(u_n)$ là dãy số dương:<br>Có $u_1 = 1$ . Giả sử $u_n > 0$ đúng đến $n = k$ với $k \geq 1$ .  | 0,5  |
|   | Khi đó $u_{k+1} = \frac{6u_k}{\sqrt{11u_k + 9} + 3} > 0$ . Theo nguyên lý quy nạp, suy ra $(u_n)$ là dãy số dương.  | 0,5  |
|   | Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n}{\sqrt{11u_n + 9} + 3} - u_n$ . Nhận xét được $\sqrt{11u_n + 9} + 3 > 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  | 0,5  |
|   | Suy ra $\frac{6u_n}{\sqrt{11u_n + 9} + 3} - u_n < 0$ nên $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Vậy dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.   | 0,5  |
|   | 2) Ta có $u_{n+1} = \frac{6u_n(\sqrt{11u_n + 9} - 3)}{11u_n} = \frac{6(\sqrt{11u_n + 9} - 3)}{11}$ .  | 0,5  |
|   | Suy ra $11u_{n+1} = 6(\sqrt{11u_n + 9} - 3) \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{396}{121}(u_n - u_{n+1})$ .   | 0,5  |
|   | Nên $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = 1 + \frac{396}{121}(u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + \dots + u_{n-1} - u_n) = 1 + \frac{396}{121} - \frac{396}{121}u_n$<br>với $n \geq 2$ . | 0,5  |
|   | Ta có dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn.<br>Gọi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , chứng minh được $a = 0$ .                             | 0,25 |
|   | Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 + \frac{396}{121} = \frac{47}{11}$ .  | 0,25 |
| VI<br>(2 điểm)  | <b>Tìm GTLN của <math>P = abc(a^2 + b^2 + 9c^2)</math>.</b>   | 2,0  |
|   | Đặt $z = 3c$ , ta được $a + b + z = 3$ và $3P = abz(a^2 + b^2 + z^2)$ .   | 0,25 |
|   | Ta có $3P = abz(a^2 + b^2 + z^2) = abz(a^2 + b^2) + abz^3 = \frac{1}{2}z \cdot 2ab[(a+b)^2 - 2ab] + abz^3$ .  |      |
|   | $\leq \frac{1}{2}z \frac{(a+b)^4}{4} + \frac{(a+b)^2}{4}z^3 = \frac{1}{8}(3-t)t^4 + \frac{t^2(3-t)^3}{4}$ . Với $t = a+b$ .   | 0,25 |
|   | Do vai trò $a, b, z$ như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{a, b, z\}$ .  |      |
|   | Do đó $z \leq 1$ nên $a+b \geq 2$ hay $t \geq 2$ .  |      |
|   | Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{8}(3-t)t^4 + \frac{t^2(3-t)^3}{4}$ với $t \geq 2$ .   |      |
| Ta có $f(t) - 3 = \frac{1}{8}(3-t)t^4 + \frac{t^2(3-t)^3}{4} - 3 = -\frac{3}{8}(t-2)^2[t(t-1)(t-2) + 2] \leq 0, \forall t \geq 2$ . | 0,5   |      |
| Vậy $f(t) \leq 3, \forall t \geq 2$ .   |   |      |
| Suy ra $\max_{[2; +\infty)} f(t) = 3$ khi $t = 2$ .   | 0,5   |      |
| Do đó GTLN của biểu thức $P$ bằng 1 khi $a = b = z = 1$ (hay $a = b = 1; c = \frac{1}{3}$ ).  | 0,5   |      |

**Chú ý:** Học sinh làm theo cách khác nhưng đúng vẫn cho điểm tối đa.  
Điểm thành phần chi tiết đến 0,25. Giám khảo không được làm tròn tổng điểm.